بسم الله الرحمن الرحيم

إنه من سليمان وإنه

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

تبدیل لاپلاس در ابعاد بالاتر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

حسین عابدی

استاد راهنما

دکتر محمود بینای مطلق

۱۳۷۸

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی آقای حسین عابدی اندانی

تحت عنـوان

تبدیل لاپلاس در ابعاد بالاتر

در تاریخ ۷۸/۱۲/۹ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ ـ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر محمود بینای‌مطلق
۲ ـ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر حمیدرضا ظهوری‌زنگنه
۳ ـ استاد داور ۱	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی
۴ ـ استاد داور ۲	دکتر فرید بهرامی
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر امیر نادری

قدردانی

در این‌جا لازم است از کلیه‌ی افرادی که مرا در انجام این پروژه کمک نموده‌اند، خصوصاً اساتید گرامی آقای دکتر محمود بینامطلق و آقای دکتر ظهوری زنگنه تشکر کنم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این رساله ما یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی هذلولوی به شکل

$$y_{,lk} + a^l_{lk} y_{,l} + a^k_{lk} y_{,k} + c_{lk} y + h_{lk} = 0 \quad , \quad 1 \leq k \neq l \leq n$$

در نظر می گیریم که در آن ضرایب دستگاه توابعی هموارند و در شرایط انتگرالپذیري معینی صدق می‌کنند . به عنوان تعمیمی از نظریهٔ کلاسیک معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی هذلولوی مرتبهٔ دو در صفحه ، ما پایاهای لاپلاس در ابعاد بالاتر را برای دستگاه فوق تعریف می کنیم . با توجه به این پایاها ، تبدیل لاپلاس را برای دستگاه فوق تعریف کرده و تعبیر هندسی آن را بیان می کنیم و در حالات خاص دستگاه را حل می کنیم . همچنین یک شکل نرمال برای دستگاه فوق بر حسب این پایاها به دست می آوریم . علاوه بر این مسألهٔ از دوره تناوب یک بودن برای تبدیل لاپلاس در ابعاد بالا از چنین دستگاهی را حل می‌کنیم .

واژه‌های کلیدی: تبدیل لاپلاس ، پایاهای لاپلاس ، منیفلد کارتان

فصل اول

مقدمه

به نام خالق یکتا و پروردگار بی همتا و با درود فراوان بر مفخر عالمیان و سرور آدمیان. سالیانی است به ریاضیات مشغول گشته‌ایم، چندان که گویی همدممان شده‌است، به امید رسیدن به مقصودی که در پی آن بوده‌ایم، اما حیف و دو صد حیف که تا کنون... چه خوش گفته است شیخ بهایی :

خوش آنکه صلای جام وحدت سر داد — خاطر ز ریاضی و طبیعی آزاد
بر منطقهٔ فلک نزد دست خیال — در پای عناصر سر فکرت ننهاد

کاری ز وجود ناقصم نگشاید — گویی که ثبوتم انتفا می‌زاید
شاید ز عدم ، من به وجودی برسم — زان رو که ز نفي نفی ، اثبات آید

آنچه در پیش رو دارید رساله‌ای‌است در شاخهٔ معادلات دیفرانسیل و هندسه منیفلد. از آنجا که گفته‌اند « کم گوی و گزیده گوی چون دُر » من هم از توضیح واضحات تا آنجا که شده است

خودداری کرده‌ام .

این رساله کاری است روی مقالهٔ [۱۲] که در اینجا فصول یک و سه و چهار و پنج را شامل می شود . فصل شش از قسمتهایی از مقالهٔ دیگر ایشان [۱۳] به دست آمده است . در واقع این فصل به رساله اضافه شده است .

ذکر این نکته ضروری است که نویسندگان مقاله در قسمتِ ۴ مقاله یک سری روابط (که در این رساله همان روابط (۵–٦) است) برای ضرایب دستگاههای تحت بررسی را نتیجه‌ای از شرایط اولیهٔ دستگاه و مشتق‌پذیری ضرایب دانسته‌اند ، اما این روابط از آن مفروضات نتیجه نمی‌شود و من در جای خود مثال نقض در این باره را آورده‌ام و هم در آنجا گفته‌ام که چنین روابطی را شبیه آنچه در فصل ۴ تحت عنوان « هندسهٔ منیفلدهای کارتان » بیان و بررسی کرده‌ایم ، انتظار داریم و با اضافه کردن یک فرض، چنین روابطی برقراراست. این موضوع را طی چند نامه با جناب آقای پروفسور کامران مطرح کرده و ایشان قبول کردند.

در اینجا باید این نکته را تذکر دهیم که تبدیل لاپلاسی که در اینجا بررسی می شود با تبدیل لاپلاس در معادلات دیفرانسیل معمولی کاملاً متفاوت است .

مطالعهٔرابطهٔعمیق بین هندسه دیفرانسیل ومعادلات دیفرانسیل پاره‌ای تاریخ طولانی و مشخصی دارد وبه کارهای افرادی چون داربو[۱] ، لی[۲] ، بک‌لاوند[۳] ، گورسا[۴] و کارتان[۵] برمی‌گردد. این رابطه از این واقعیت نشأت می‌گیرد که اکثر خواص موضعی رویه‌ها به طور طبیعی با معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیان می‌شوند.بعنوان مثال شرط اینکه رویهٔ $z = z(x, y)$ دارای انحنای گاوسی ثابت باشد معادلهٔ منژ–آمپر[٦] را برای $z(x, y)$ می‌دهد.در واقع این شرط برای انحنای منفی بامعادلهٔ سینوسی گوردن (sine-Gordon) وبرای انحنای مثبت با معادلهٔبیضوی سینوس هذلولوی گوردن (elliptic sinh-Gordon) بیان می‌شود. به مراجع [٦] و [۷] و [۸] مراجعه کنید.

بنابرین مطالعهٔتبدیلاتی از رویه‌ها که خواص هندسی رویه‌ای را که با معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیان می‌شود حفظ می‌کند از اهمیت زیادی برخوردار است،چرا که فرمولبندی آنالیزی این

---

[۱] Darboux
[۲] Lie
[۳] Backlund
[۴] Goursat
[۵] E.Cartan
[٦] Monge-Ampere

تبدیلات به نگاشتهای حافظ کلاس معادلات دیفرانسیل پاره‌اي تحت بررسی منجرمی‌شود. بالاخره انتظار بر آنست که هندسهٔ یک رویهٔ تبدیل یافته،استلزامات منطقيِ قابل توجهی درشکل تحلیلی را دارا باشد،بالاخص هنگامیکه به صورت معادلات دیفرانسیل پاره‌اي به طور صریح انتگرالپذیر بیان می‌شود.

شاید شناخته‌شده‌ترین مثال از چنین تبدیلی از رویه‌ها تبدیل بک‌لاوند است که یک رویه با انحنای گوسی ثابت ومنفی (یک رویهٔشبه کروی) را به رویهٔ دیگری با همین خاصیت می‌فرستد. (ر.ک.[۹]) با توجه به اینکه رویه‌های شبه کروی متناظر با جوابهای معادلهٔ سینوسی گوردن هستند،فرمول‌بندی این تبدیل به صورت نگاشتی تعریف خواهدشد که جوابهای معادلهٔسینوسی گوردن را به دیگر جوابها می‌برد. یک تبدیل از رویه‌ها،به همان اندازه جالب ولی کمتر شناخته‌شده، تبدیل لاپلاس[۷] است. از یک رویه S که دارای یک تور از منحنیها که برای فرم اساسی درجه دوم مزدوج است شروع می‌کنیم. فرض کنید تور، یک تور پارامتریزه با پارامترهای v و u است ، داریم:

$$X_{uv} = \Gamma^{1}_{12} X_u + \Gamma^{2}_{12} X_v \qquad (1-1)$$

که یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی هذلولوی از $X(u,v)$ است. دو تبدیل لاپلاس S_1 و S_{-1} از S که به ترتیب با $\mathcal{L}_1(S)$ و $\mathcal{L}_{-1}(S)$ نشان داده می‌شوند به طور هندسی چنین تعریف می‌شوند: منحنی مختصاتی $X(u,v_0)$ را در نظر گرفته و به سطح گسترش‌پذیر حاصل از خطوط مماس بر منحنیهای مختصاتی $X(u_0,v)$ در نقاط $X(u,v_0)$ توجه‌کنید. روی چنین خطی نقطه‌ای چون X_1 هست که خط، مماس بر یال برگشت است. وقتی که u و v تغییرکنند رویهٔ $S_1 = \mathcal{L}_1(S)$ که با $X_1(u,v)$ پارامتریزه شده است به دست می‌آید. به طور مشابه اگر نقش u و v را عوض کنیم رویهٔ $S_{-1} = \mathcal{L}_{-1}(S)$ پارامتریزه شده با$X_{-1}(u,v)$ به دست‌می‌آید. مطلب قابل تأکید در اینجا این است که تور مختصاتی برای رویه‌های به دست آمدهٔ S_1 و S_{-1} نیز مزدوج است، به گونه‌ای که $X_1(u,v)$ و $X_{-1}(u,v)$ نیز در معادله دیفرانسیلی به شکل (۱-۱) صدق می‌کنند. چندان مشکل نیست که ببینیم این دو تبدیل لاپلاس معکوس یکدیگرند، یعنی

$$\mathcal{L}_{-1}(\mathcal{L}_1(S)) = \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_{-1}(S)) = S$$

---

[۷] Laplace

برای هر رویه که دارای تور مزدوج است.

از موارد جالب حالتی است که در آن یکی از تبدیلات لاپلاس به یک منحنی کاهش یابد. (یعنی S_1 یا S_{-1} منحنی شود) در واقع معادله دیفرانسیل پاره‌ای در این حالت می‌تواند با مربع کردن ، به طور صریح انتگرالگیری شود چنانکه در فصل ۳ خواهیم دید. این روشِ‌هندسیِ‌ساختاری، ما را به روش زیبایی از انتگرالگیری برای معادلات خطی هذلولویِ‌حاصل از رویه‌هایی چون S که تحت یک دنبالهٔ متناهی از تبدیلات لاپلاس به منحنی تبدیل می‌شوند، هدایت می‌کند. می‌توان عمل انتگرالگیری با مربع کردن را برای معادلهٔ آخری بکار برد و با استفاده از فرمولهای معکوس کار را ادامه داد تا به معادلهٔ اول برسیم. مقالات داربو و گورسا شامل نتایج جالب زیادی که از بکار بردن این روش انتگرالگیری به دست آمده ، می‌باشد. (ر.ک.[۱۰] و [۱۱])

کار بسیار دشوار و تقریباً بیهوده‌ای است که سعی شود این روشها از حالت رویه‌ها به زیر منیفلدها با ابعاد بالاتر تعمیم داده شود. تننبلت [۸] و ترنگ [۹] روش بک‌لاوند را به ابعاد بالاتر تعمیم داده‌اند، آنان همچنین تبدیل بک‌لاوند متناظر از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای که معادلهٔ سینوسی گوردن را تعمیم می‌دهد ، به دست آورده‌اند. این کار به پیشرفتهای مهمی در حوزهٔ معادلات دیفرانسیل پاره‌ایِ‌انتگرالپذیرِ چند بعدی منتهی شده است، معادلاتی چون: تعمیم هندسی معادلات موج ، معادلات بیضوی سینوس هذلولوی گوردن و معادلات لاپلاس.
چرن [۱۰] یک توصیف هندسی زیبایی از تعمیم تبدیل لاپلاس به کلاس زیرمنیفلدهای n-بعدی در فضای تصویری ارائه داده است که قبل از او کارتان به روش دیگری این موضوع را بررسی کرده است. این زیر منیفلدها که چرن آنها را منیفلدهای کارتان می‌نامد، پارامتریزه شده با یک تور مزدوج هستند. چرن نشان می دهد که چگونه برای هر منیفلد کارتانِ n-بعدی ، $n(n-1)$ تبدیل لاپلاس تعمیم یافته ، که عموماً هر کدام از آنها منیفلد کارتان n-بعدی می‌شود ، بسازیم.

در اینجا توجهٔ ما به منیفلدهای کارتان در فضای اقلیدسی است تا فضای تصویری. به

[۸] Tenenblet
[۹] Terng
[۱۰] Chern

طور تحلیلی این موضوع ایجاب می‌کند توابعی که منیفلد را پارامتریزه می‌کنند در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم به شکل

$$X_{ij} = \Gamma^i_{ij} X_i + \Gamma^j_{ij} X_j \ , \ ۱ \leq i \neq j \leq n \qquad (۱-۲)$$

صدق می‌کنند ، که در اینجا روی اندیسهای تکراری هیچگونه جمعی نیست. ابتدا ما نوع اقلیدسی تبدیل لاپلاس تعمیم یافتهٔ‌چرن را انجام می‌دهیم که این کار در حالت کلی $n(n-۱)$ تبدیل لاپلاس برای یک منیفلد کارتان می‌دهد.متناظر با هر یک از این تبدیلات از یک منیفلد کارتان یک دستگاه از نوع (۱—۲) موجود است.
همچنین ما یک تبدیل برای دستگاههایی به شکل

$$y_{,lk} + a^l_{lk} y_{,l} + a^k_{lk} y_{,k} + c_{lk} y + h_{lk} = ۰, ۱ \leq k \neq l \leq n \qquad (۱-۳)$$

به دست می آوریم که تبدیل لاپلاس را برای معادلات مرتبه دوم خطی هذلولوی در صفحه تعمیم می دهد.این کار با پیدا کردن شکل تحلیلی ساختارهندسی تبدیل چرن انجام می‌شود. سپس این تبدیل را برای حل دستگاه (۱—۳)که دارای داده‌های کوشی همواراست و با مقادیر y در امتداد n منحنی گذرنده از نقطهٔ‌مفروضی چون $x^۰$ مشخص شده ،به کار می‌بریم. بویژه نشان خواهیم داد حالاتی که زیرمنیفلدهای حاصل از تبدیل به یک منحنی تقلیل یافته ،دقیقاًهمانهایی هستند که انتگرالگیری از دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به یک دستگاه ازهمان نوع شامل $n-۱$ متغیرمستقل‌کاهش می‌یابدواین منجربه روشی از انتگرالگیری از این دستگاههامی‌شود.
در اینجا تاکید می کنیم که بیان تحلیلی این تعمیم از تبدیل لاپلاس نمی تواند براساس یک مبنای کاملاًصوری ،آنچنانکه فرمولهای آشنادرموردرویه هاداریم ، استنتاج شود.اساس کاردرطی این رساله هندسهٔ‌مسأله است که انگیزهٔ‌آن ازروش هندسی چرن است .
همچنین یادآورمی شویم دستگاه (۱—۳)که تبدیل لاپلاس با بعد بالا در مورد آن قابل استفاده است ،نقش قاطعی در تحلیل وبررسی یک کلاس مهم ازمعادلات دیفرانسیل پاره‌ای باچند متغیر مستقل بازی می کند.
در فصل ۳ روش لاپلاس را در مورد انتگرالگیری از معادلات مرتبه دوم خطی هذلولی در صفحه یادآوری می کنیم و تعبیر هندسی آنرادر جملاتی از تبدیل لاپلاس رویه‌ها بیان می کنیم.در فصل

۴ شکل اقلیدسی تبدیل لاپلاس چرن رابرای منیفلدهای کارتان nبعدی پیدا می کنیم .درفصل ۵ یک بیان تحلیلی از تبدیل لاپلاس تعمیم یافته آنگونه که در مورد دستگاه به شکل (۱−۳) به کار می رود،به دست می‌آوریم . با به کار بردن دسته بندی حاصل از فصل ۴ پایاهای لاپلاس چند بعدی را تعریف می کنیم و قضیهٔاصلی یعنی قضیهٔتقلیل برای انتگرالگیری دستگاههایی که پایاهای لاپلاس چند بعدی آنهاصفرمی شودرا ثابت می کنیم. در فصل ۶ به بررسی دستگاههای متناوب از دوره تناوب یک می پردازیم .

فصل دوم

پیشنیازها

همانطور که از نام این فصل پیداست در این فصل بعضی از مفاهیم هندسه دیفرانسیل و هندسه منیفلد را که در آینده مورد استفاده هستند، به طور اختصار یادآوری کرده و توضیح می‌دهیم.ابتدا مفاهیمی از هندسه دیفرانسیل:

فرض می‌کنیم $f : U \subseteq R^{2} \to R^{3}$ نمایش یک رویهٔ منظم M با پارامترهای u_{1}, u_{2} باشد. منظور از بردار مماس $X_i(u_{1}, u_{2})$ همان بردار $\frac{\partial f}{\partial u_i}(u_{1}, u_{2})$ است و بردار قائم که با $N(u_{1}, u_{2})$ نشان می‌دهیم بردار یکهٔ $\frac{X_{1} \times X_{2}}{|X_{1} \times X_{2}|}$ می باشد.

ضرایب متریک: بنا به تعریف ضرایب متریک که با g_{ij} نشان می‌دهیم عبارتند از $g_{ij} =< X_i, X_j >$، ماتریس (g_{ij}) یک ماتریس متقارن مثبت معین است و در حالت کلی معکوسپذیر است و معکوس آنرا با (g^{ij}) نشان می دهیم .

فضای مماس: منظور از فضای مماس در نقطهٔ p از رویه (که در اینجا یک صفحه است)

فضای تشکیل شده از بردارهای مماس بر رویه در نقطهٔ p است و آن را با T_pM نشان می‌دهیم.

فرم اساسی اول: منظوراز فرم اساسی اول یک رویه که آنرا با I نشان می‌دهیم فرم دوخطی زیر است :

$$\forall X, Y \in T_pM, I(X,Y) = < X, Y > = \sum g_{ij} X^i Y^j$$

که در آن X^i, Y^j مختصاتهای X, Y در پایهٔ $\{X_i\}$ هستند.

نمادهای کریستوفل:منظور از X_{ij} مشتق دوم f نسبت u_i, u_j است. اگر فرض کنیم :

$$X_{ij} = L_{ij} N + \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k$$

آنگاه ضرایب L_{ij} را ضرایب فرم اساسی دوم و ضرایب Γ^k_{ij} را نمادهای کریستوفل نامیم.می توان دید که

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_s g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial u_i} \right)$$

منحنیهای $f(u_1^0, u_2)$ و$f(u_1, u_2^0)$ را منحنیهای مختصاتی گوییم و گوییم رویه پارامتریزه شده با مختصات مزدوج است و یا رویه دارای تورِمزدوج[1] است هر گاه $L_{12} = L_{21} = 0$ به عبارت دیگر هر گاه برای $i \neq j$ بردار X_{ij} در فضای تولید شده بابردارهای X_i, X_j باشد.

رویه خط‌دار[2]: یک رویهٔ خط‌دار رویه‌ای است با این خاصیت که از هر نقطهٔ آن خط مستقیمی می گذرد که کاملاًروی رویه قراردارد. خطوط مذکور را خطوط جاری رویه گویند.با توجه به تعریفِ رویه خط‌دار معادلهٔ رویه را می‌توان چنین نوشت:

$$X(u_1, u_2) = r(u_1) + u_2 T(u_1)$$

که r یک منحنی است و T بردار یکه .

---

[1] conjugate net
[2] ruled surface