بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

روش‌های تجزیه آدومیان و اختلال هموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال

استادان راهنما:

دکتر مهدی رمضانی

دکتر محسن شاهرضایی

دانشجو:

مهدی رحیمی سراجی

دی‌ماه ۱۳۹۰

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم :

به او که نمی‌دانم از بزرگی‌اش بگویم یا مردانگی، سخاوت، سکوت، مهربانی و ...

به او که به من آموخت تا چگونه در عرصه‌ی زندگی ایستادگی و تلاش را تجربه نمایم.

تقدیم با عشق به مادر عزیزم :

به او که دریای بی‌کران فداکاری، عشق، مهربانی، از خودگذشتگی و ... است.

به او که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر.

تقدیم به همسر عزیزم :

به او که اسطوره‌ی زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم است.

به او که از نگاهش صلابت، از رفتارش محبت و از صبرش ایستادگی را آموختم.

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را

که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان ساخت.

به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود.

و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

بر خود لازم می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی‌های اساتید راهنما، آقایان دکتر مهدی رمضانی و دکتر محسن شاهرضایی در راستای انجام این پایان‌نامه در طول یك سال گذشته و از تمامی کسانی که مرا در انجام این پایان‌نامه کمک کردند، تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر یدا... اردوخانی و دکتر محمّد افضلی‌نژاد که زحمت قرائت و داوری این پایان‌نامه را تقبل کردند،کمال تشکر را دارم.

چکیده

یکی از مسائل اساسی در آنالیز عددی (و از قدیمی‌ترین مسائل تقریب عددی) پیدا کردن جواب معادله‌ی $f(x) = 0$ برای تابع مفروض f است که در یک همسایگی از ریشه ساده‌ی x هموار باشد. در اکثر حالت‌ها، پیدا کردن جوابی تحلیلی برای معادله‌ی $f(x) = 0$ دشوار است. روش تجزیه آدومیان (ADM) و روش اختلال هموتوپی (HPM) دو روش قدرتمند هستند که جوابی تقریبی از معادله‌های غیرخطی را در قالب یک سری نامتناهی ارایه می‌کنند که معمولاً به جواب اصلی معادله همگرا است. در سال‌های اخیر، این دو روش در دامنه‌ی گسترده‌ای از مسائل خطی و غیرخطی به کار برده شده‌است. در این پایان‌نامه بوسیله‌ی تحلیل نظری این دو روش، نشان داده می‌شود که این دو روش در حل معاله‌های غیرخطی هم‌ارز هستند. همچنین در این پایان‌نامه، این دو روش را برای پیدا کردن جواب معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم به کار می‌بریم. نتایج به دست آمده با جواب‌های دقیق این معادله‌ها مقایسه شده‌اند. با ارایه تعدادی مثال، توانایی و قابل اعتماد بودن این دو روش را نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: معادله‌های غیرخطی، معادله انتگرال غیرخطی ولترای نوع دوم، روش تجزیه آدومیان، روش اختلال هموتوپی، همگرایی سراسری

عنوان **صفحه**

رابطه **صفحه**

پیشگفتار

یکی از اهداف مهم در علم ریاضیات، حل معادله‌های خطی و غیرخطی می‌باشد. بیان دو روش تجزیه آدومیان و روش اختلال هموتوپی برای حل معادله‌های غیرخطی و اختصاصاً معادله انتگرال غیرخطی ولترای نوع دوم، در این پایان‌نامه مورد نظر می‌باشد. بدین منظور ابتدا در فصل يك، اشاره‌ای به پیش نیازهای مربوط به روش‌های بیان‌شده در این پایان‌نامه از جمله، تعاریف و مفاهیم اولیه در آنالیز حقیقی [۱] و در همچنین در آنالیزعددی [۲] و [۳] پرداخته‌ایم.

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های آنالیز ریاضی است .اصولاً اهمیت آن از لحاظ مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است. معادلات انتگرال درخیلی از مسائل فیزیک ، فنی و مهندسی و ...ظاهر می‌شوند.در تحقیقات قرن اخیر، این نوع معادلات نقش مهمی را ایفاء کرده‌اند، بخصوص آن دسته‌ای از آنها که به معادلات انتگرال منفرد شهرت دارند . معادلات انتگرال برای سالهای زیادی است که در ریاضی ظاهر شده‌اند. زیرا مبدا آن به تئوری انتگرال فوریه برمیگردد (۱۸۱۱). لیکن در حقیقت توسعه نظریه معادلات انتگرال تنها در اواخر قرن ۱۹ شروع شد.

در مورد نظریه‌ی پیشنهادی معادلات انتگرال گفته‌های فراوانی بیان شده‌است. اشخاصی مانند لاپلاس[1] در سال ۱۷۸۲ و آبل[2] برای حل معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال را مطرح نمودند. در حدود سال ۱۸۹۶ بود که یک ریاضیدان ایتالیایی به نام ولترا[3] برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرال را به رسمیت شناخت و آن را ارائه کرد. همچنین یک ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم[4] نوع خاصی از معادلات انتگرال ولترا را به شکل معادله انتگرال خطی زیر ارائه کرد.

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

او درهمان سالها کارهای مشهور و جالب خود را روی یک روش جدید، جهت حل مسأله دیریکله[5] به کار برد. از آن زمان به بعد تا عصر حاضر معادلات انتگرال، موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده است ،زیرا

[1] Laplas

[2] Abel

[3] Volterra

[4] Fredholm

[5] Dieichlet

آنها بطور پیوسته با مسائل جدید و جالبی برخورد می‌کنند. البته نظریه‌های مختلفی در مورد پیدایش معادله انتگرال وجود دارد. به همین منظور در فصل دوم، به معرفی معادله انتگرال‌ها و لزوماً معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم و نیز تاریخچه‌ی مختصری از آن‌ها می‌پردازیم [۴].

روش‌های مختلفی برای حل انواع معادله‌های غیرخطی ارائه شده‌است. جرج آدومیان[6] در سال ۱۹۸۰ روشی که مبنای آن بر جوابی به شکل یک سری نامتناهی است را پیشنهاد و ارائه کرد [۵]. این روش منتسب به نام او به روش تجزیه آدومیان شناخته می‌شود. عبدالمجید وزواز[7] از جمله بارزترین محققانی است که بعد از او مطالعات زیادی در مورد این روش انجام داده و این روش را برای انواع معادلات دیگر از جمله برای معادلات انتگرال به کاربرده و بررسی کرده است [۶].

روش دیگری که برای حل این گونه معادلات معرفی شده است، روش اختلال هموتوپی می‌باشد که در سال ۲۰۰۰ توسط جی هوآن هی[8] ارائه شده است. این روش حالت خاصی از روش آنالیز هموتوپی می‌باشد. در سال‌های اخیر، کاربردهای تکنیک اختلال توسط دانشمندان و مهندسان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است [۷]. در اکثر روش‌های اختلال، پارامتر کوچکی وجود دارد که نقش زیادی در الگوریتم این روش دارد. بنابراین در فصل سوم، پس از شرح تاریخچه‌ی مختصری از روش تجزیه آدومیان، به توضیح ساختار کلی این روش در حل انواع معادلات غیرخطی می‌پردازیم [۸]. سپس این روند را بر روی معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم نیز به کار می‌گیریم. پس از انجام این مراحل، به بیان نکات و قضیه‌هایی می‌پردازیم که یکتایی و همگرایی جواب به‌دست آمده با استفاده از روش تجزیه آدومیان برای معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم را تحت شرایط خاصی امکان‌پذیر می‌کند [۹]. پس از کامل شدن مطالب مربوط به روش تجزیه آدومیان، همین مراحل را برای روش اختلال هموتوپی نیز انجام می‌دهیم. یعنی پس از شرح تاریخچه‌ی مختصری از روش اختلال هموتوپی و توضیح مختصری در مورد روش آنالیز هموتوپی، به توضیح ساختار کلی این روش در حل انواع معادلات غیرخطی می‌پردازیم [۸]. سپس الگوریتم روش اختلال هموتوپی را بر روی معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم پیاده می‌کنیم و نیز نکات لازم در مورد ساختار این روش بیان می‌کنیم. در ادامه، یکتایی و

[6] George Adomian

[7] Abdul Majid Wazwaz

[8] Ji Huan He

همگرایی جواب محاسبه شده با استفاده از روش اختلال هموتوپی برای معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم در شرایطی خاص را با اثبات قضایایی مورد بررسی قرار می‌دهیم [۱۰].

در فصل چهارم، پس از آشنایی کامل با ساختار الگوریتم دو روش به بیان و اثبات قضیه‌هایی می‌پردازیم که این دو روش و چندجمله‌ای موجود در این دو روش را در حل انواع معادله‌های غیرخطی هم‌ارز می‌کند [۸]. در ادامه با توجه به تمام توضیحاتی که داده شد، به مقایسه مختصری از ساختار کلی این دو روش می‌پردازیم.

در فصل پنجم با ارائه چند مثال از معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم و حل آن‌ها با استفاده از این دو روش، به انجام مقایسه‌هایی عددی می‌پردازیم.

در فصل ششم با بیان خلاصه‌ای از کارهای انجام شده در این پایان‌نامه، به بیان نتیجه‌گیری کلی در قالب چند نکته از ساختار این دو روش در حل معادلات غیرخطی می‌پردازیم.

در پایان قابل ذکر است که مطالب اصلی و محوری این پایان‌نامه براساس اطلاعات موجود در مراجع [۸]، [۹] و [۱۰] می‌باشد.

۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

۱-۱)   مقدمه

قبل از شروع هر مبحث علمی، ابتدا باید با پیش تعاریف و اصطلاحات علمی به‌کار رفته در آن به‌خوبی آشنا بود تا بتوان در ادامه با مطالب بیان شده ارتباط برقرارکرد و همچنین در صورت نیاز به مطالب کامل‌تر و همچنین ایده‌های جدید بتوان از سایر مراجع دیگر نیز با دید بازتر و مفیدتر استفاده نمود. در فصل اول این پایان‌نامه ما بطور مفصل به پیش نیازهای مربوط به موضوعات بیان‌شده در این پایان‌نامه پرداخته‌ایم [۱] و [۲] و [۳]. همچنین در ارائه مطالب سعی بر آن داشته‌ایم تا لیست کاملی از مراجع را در اختیار خواننده قرار دهیم تا در صورت نیاز به اطلاعات تکمیلی و جهت آشنایی بیشتر با عناوین، با رجوع به آنها نیاز خواننده برطرف گردد.

دراین فصل ابتدا به تبیین تعاریف اولیه و مفاهیم مورد نیاز می‌پردازیم که نقش مهمی در تحلیل روش‌های به‌کار رفته در حل معادلات انتگرال دارند. البته قضایای اولیه در مورد این تعاریف و مفاهیم نیز بیان شده‌اند.

۱-۲) تعاریف اولیه

تعریف ۱-۲-۱:

فرض کنید X یک فضای برداری (خطی) روی $\mathbb{R}$ باشد، به تابع $\|.\|$ از X به $\mathbb{R}$ یک نرم گوییم هرگاه

۱) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $x = 0$ اگر وتنها اگر $\|x\| = 0$.

۲) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x \in X$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳) به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف ۱-۲-۲:

به فضای خطی X که دارای یک نرم است، فضای خطی نرم‌دار گوییم.

اگر X یک فضای خطی نرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

آنگاه به d یک متریک روی X گوییم (d متر تولید شده به‌وسیله‌ی نرم است). بنابراین هر فضای نرم‌دار، یک فضای متریک است.

تعریف ۱-۲-۳:

دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم‌دار X همگرا به x گوییم هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

تعریف ۱-۲-۴:

دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در فضای خطی نرم‌دار X، کشی[1] گوییم هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad m, n > N \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon \qquad (۱-۱)$$

تعریف ۱-۲-۵:

$\{S_n\}$ به $S \in \mathbb{R}$ همگرا است اگر دو ثابت حقیقی p و C وجود داشته باشند به‌طوری‌که داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{S_{n+1} - S}{(S_n - S)^p}\right| = C \qquad (۲-۱)$$

---

[1] Cauchy

در این‌صورت p را مرتبه‌ی همگرایی $\{S_n\}$ گوییم.

تعریف ۱-۲-۶:

فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد، نرم $\|.\|_c$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_c = \sup_{a\le x\le b}|f(x)| = \max_{a\le x\le b}|f(x)| \qquad (۳-۱)$$

تعریف ۱-۲-۷:

هرگاه هر دنباله‌ی کشی در فضای خطی نرم‌دار X، همگرا باشد، X را فضای کامل گوییم.

تعریف ۱-۲-۸:

فضای خطی نرم‌دار X را یک فضای باناخ[1] گوییم هر گاه نسبت به متریک تولید شده کامل باشد، یعنی هر زیر دنباله‌ی کشی در X همگرا باشد.

تعریف ۱-۲-۹:

برای $1 \le p \le \infty$ فضای متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیر $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ که $\int_a^b |f(t)|^p dt \le \infty$ ($\mathbb{C}$ بیانگر مجموعه اعداد مختلط است) باشد را فضای $L^p[a,b]$ گوییم.

$$L^p[a,b] = \{f | f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \text{اندازه‌پذیر } f, \int_a^b |f(t)|^p dt \le \infty\}$$

قضیه‌ی ۱-۲-۱:

$L^p[a,b]$ برای $1 \le p \le \infty$، فضایی کامل است.

$L^p[a,b]$ فضایی برداری است و با نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

در حالت خاص $L^2[a,b]$، یعنی $L^2[a,b] = \{f | f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \text{اندازه‌پذیر } f, \int_a^b |f(t)|^2 dt \le \infty\}$ با نرم $\|f(x)\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای باناخ است.

[1] Banach space

تعریف ۱-۲-۱۰:

اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار X باشد، گوییم سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است، هرگاه دنباله‌ی $s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ به x همگرا باشد و در این صورت می‌نویسیم $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$.

سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ را همگرای مطلق گوییم هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\| < \infty$.

قضیه‌ی ۱-۲-۲:

فضای نرم‌دار X باناخ است اگر و تنها اگر هر سری همگرای مطلق، همگرا باشد.

تعریف ۱-۲-۱۱:

فضای خطی حقیقی (یا مختلط) X را یک فضای ضرب داخلی گوییم، هرگاه یک تابع حقیقی (یا مختلط) روی $X \times X$ که آن را با نماد $(,)$ نشان می‌دهیم، وجود داشته باشد به‌طوریکه برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

۲) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

۳) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$

۴) $(x, x) \geq 0$ و $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

آنگاه (x, y) ضرب داخلی x و y نامیده می‌شود.

تذکر ۱-۲-۱:

این ضرب داخلی یک نرم به صورت زیر تعریف می‌کند

$$\forall x \in X \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

تعریف ۱-۲-۱۲:

فضای برداری کامل H با ضرب داخلی $< f, g >$ با نرم $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$ تشکیل فضای هیلبرت[1] می‌دهد.

فضای هیلبرت همیشه یک فضای باناخ است اما عکس آن همیشه برقرار نیست.

[1] Hilbert space

قضیه‌ی ۱-۲-۳:

فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه به ازای هر $x, y \in X$ داریم

۱) نامساوی کشی-شوارتز[1]: $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$

۲) نامساوی مثلث: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

تعریف ۱-۲-۱۳:

تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر عددی مانند M وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $x \in D_f$، داشته باشیم $|f(x)| \leq M$. آنگاه $f(x)$ را تابعی کران‌دار گوییم.

تعریف ۱-۲-۱۴:

فرض کنید که $L > 0$ ثابتی دلخواه و $f: X \longrightarrow Y$ تابعی باشد که برای هر $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم.

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad (۴\text{-}۱)$$

آنگاه تابع $f(x)$ را پیوسته‌ی لیپ‌شیتز[2] با ثابت L گویند.

تعریف ۱-۲-۱۵:

تابع $f(x)$ را در همسایگی نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر گوییم هرگاه

۱. $f(x)$ در نقطه‌ی x_0 پیوسته باشد.

۲. مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ موجود و متناهی باشد.

تعریف ۱-۲-۱۶:

اگر تابع $f(x)$ در همسایگی x_0 بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f(x)$ را می‌توان به صورت مجموعی از عبارت‌هایی که شامل توان‌هایی از $(x-x_0)$ است، نوشت، یعنی

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (۵\text{-}۱)$$

---

[1] Cauchy Showartz

[2] Lipschitz

که به آن بسط یا سری تیلور[1] تابع $f(x)$ گویند. حالت خاص بسط تیلور که حول نقطه‌ی صفر می‌باشد را بسط مک‌لورن[2] تابع $f(x)$ می‌گویند.

$$f(x)\text{تابع}\ \text{بسط مک‌لورن} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (۱-۶)$$

تعریف ۱-۲-۱۷:

فرض کنید f_1 و f_2 دو نگاشت پیوسته از فضای توپولوژیک X به فضای توپولوژیک Y باشند. گوییم f_1 با f_2 هموتوپ است هرگاه نگاشت پیوسته‌ای چون $F: X \times I \to Y$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $x \in X$ وبرای بازه‌ی $I = [0,1]$ داشته باشیم:

$$F(x,0) = f_1 \quad , \ F(x,1) = f_2$$

نگاشت F یک هموتوپی بین f_1 و f_2 نامیده می‌شود.

اگر $f: [0,1] \to X$ نگاشتی پیوسته باشد به طوری‌که برای $x_0, x_1 \in X$ داشته باشیم $f(0) = x_0$ و $f(1) = x_1$، در این صورت گوییم f یک مسیر در X و از x_0 به x_1 است. x_0 را نقطه‌ی ابتدایی و x_1 را نقطه‌ی انتهایی مسیر گوییم [۴].

تعریف ۱-۲-۱۸:

دو مسیر $f, f': [0,1] \to X$ را هموتوپ مسیری گوییم اگر دارای نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی مشترک x_0 و x_1 باشند و بعلاوه اگر نگشت پیوسته‌ای چون $F: I \times I \to X$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $s, t \in I$ داشته باشیم:

$$F(s,0) = f(s) \quad F(s,1) = f'(s)$$
$$F(0,t) = x_0 \qquad F(1,t) = x_1$$

در این صورت F را هموتوپی بین مسیرهای f و f' گوییم.

تعریف ۱-۲-۱۹:

سری به صورت $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots$ را سری هندسی با قدر نسبت r گویند. در این سری a مقداری ثابت است.

---

[1] Taylor

[2] Maclaurin

مجموع جزئی سری هندسی که به شکل $S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$ است با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \tag{۷-۱}$$

قضیه‌ی ۱-۲-۴:

سری هندسی برای $|r| < 1$ همگرا و برای $|r| \geq 1$ واگرا می‌باشد و در صورت همگرایی، مقدار آن به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$S_n = \frac{a}{1-r} \tag{۸-۱}$$