بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده‌ی ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

عنوان:

مباحثی در هندسه تماس روی منیفلدهای سه‌بعدی

استاد راهنما:

دکتر حسین خورشیدی

استاد مشاور:

دکتر اکبر دهقان نژاد

پژوهش‌گر:

اشرف دهقانی زاده بغداداباد

بهمن ۱۳۸۹

سپاس‌گزاری

سپاس بی‌کران به درگاه حق، که بی‌شک بدون لطف و یاری او نمی‌توان سرانجامی برای امور تصور کرد.

خداوند را شاکرم که یگانه دست‌گیر و کمک‌رسان در تمامی لحظات زندگی‌ام بوده و مرا یاری نمود تا در بهترین مسیر زندگی یعنی فراگیری علم و دانش گام بردارم.

بر خود لازم می‌دانم به رسم ادب از کسانی که در این امر مرا یاری نموده‌اند قدردانی کنم:

از استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر حسین خورشیدی، استاد راهنمای این پژوهش، که افق‌های جدیدی بر پنجره‌ی ذهنم گشودند، سپاس‌گزارم و رهنمودهای ایشان را ارج می‌نهم. راهنمایی‌ها و پیشنهادات ارزنده جناب آقای دکتر اکبر دهقان‌نژاد به عنوان استاد مشاور این پژوهش درخور تقدیر و تشکر است.

از جناب آقای دکتر بازیگران و جناب آقای دکتر فاتحی‌نیا که زحمت داوری این پژوهش را تقبل فرمودند و راهنمایی هایشان باعث منسجم تر شدن پایان نامه شد، سپاسگزارم. از پدر و مادر مهربان و همسر عزیزم که پشتیبان همیشگی و بزرگ‌ترین مشوق من در راه فراگیری دانش بوده‌اند کمال سپاس و تشکر را دارم و توفیق جبران هر قطره از دریای بی‌کران مهر این عزیزان را غنیمت می‌شمارم.

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم، همسر عزیزم و فرزند دلبندم

چکیده

مطالعه هندسه تماس همانند هندسه همتافته به سبب کاربردهایی که در شاخه‌هایی از فیزیک (مانند مکانیک کلاسیک و ترمودینامیک) دارد، حائز اهمیت است. هندسه تماس، یک ساختار هندسی را روی منیفلدهای هموار مورد بررسی قرار می‌دهد که به وسیله یک میدان فراصفحه غیر انتگرال پذیردر کلاف مماس مشخص می‌شود. با استفاده از قضیه فروبنیوس می‌توان گفت که هندسه تماس، در مقابل برگ بندی حاصل از انتگرال‌پذیری است. از طرفی هندسه تماس مربوط به منیفلدهایی با بعد فرد است در حالی که هندسه همتافته به منیفلدهایی با بعد زوج می‌پردازد.

در فصل اول با مرور مفاهیمی از هندسه دیفرانسیل و توپولوژی جبری و ویژگی‌هایی از برگ بندی، پیش نیازهای لازم برای فصل‌های بعدی را مهیا می‌کنیم. در فصل دوم ساختار تماس را در مقایسه با ساختار همتافته بررسی می‌کنیم. در فصل سوم به کمک ابزاری از نظریه گره‌ها، قضیه مارتینت را اثبات می‌کنیم که این قضیه وجود یک ساختار تماس بر روی هر منیفلد ۳- بعدی هموار را تضمین می‌کند. در پایان با ارائه مفاهیمی مانند مدارهای ریب و منحنی‌های هلومرفیک تعریفی برای همولوژی تماس روی یک منیفلد تماس را بیان می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل ، ابتدا مفاهیمی را از هندسه دیفرانسیل نظیر تعاریفی از منیفلد، کلاف و همولوژی بیان می‌کنیم. در بخش بعدی نکاتی را از نظریه برگ بندی که برای بیان رابطه بین برگ بندی و ساختار تماس مورد نیاز است، ذکر می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیمی از هندسه دیفرانسیل

در این بخش برای آن که مقایسه مناسبی بین مفاهیم منیفلد باناخ، شبه منیفلد، شبه منیفلد شاخه دار و ... صورت گیرد تعریف منیفلد را نیز آورده ایم.

تعریف ۱.۱.۱. (منیفلد) یک منیفلد دیفرانسیل پذیر (با بعد متناهی) M یک فضای توپولوژیک (همبند) با خواص زیر است :

۱. M موضعا همئومرف با $\mathbb{R}^n$ است که $n < \infty$. به این ترتیب حول هر نقطه $p \in M$ ، همسایگی بازی مانند U و همئومرفیسمی مانند ϕ از U به گوی بازی در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد.

۲. اگر $(U_۱, \phi_۱)$ و $(U_۲, \phi_۲)$ دو کارت مختصاتی از این نوع باشند، آن گاه توابع تغییر کارت

$$\phi_۲ \circ \phi_۱^{-۱} : \phi_۱(U_۱ \cap U_۲) \longrightarrow \phi_۲(U_۱ \cap U_۲)$$

توابعی C^k هستند؛ به عبارت دیگردو کارت C^k - مرتبط می‌باشند. منیفلد را هموار یا C^∞ گوییم هرگاه بی‌نهایت بار دیفرانسیل پذیر باشد.

یک خانواده از کارت های C^k - مرتبط $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \epsilon A}$ تشکیل یک اطلس C^k از بعد n روی M می‌دهد اگر حوزه تعریف آن ها M را بپوشاند، یعنی $M = \bigcup_{\alpha \epsilon A} U_\alpha$. یک اطلس C^k از M را ماکزیمال یا کامل گوییم اگر زیر مجموعه یک اطلس C^k دیگر نباشد.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک اطلس C^k باشد. در این صورت یک و تنها یک اطلس C^k ماکزیمال $\bar{\mathcal{A}}$ وجود دارد که شامل $\mathcal{A}$ است.

برهان : [۴۰] را ببینید.

مجموعه M را با یک اطلس C^k ماکزیمال n- بعدی را یک منیفلد دیفرانسیل پذیر n- بعدی از کلاس C^k گوییم.

تعریف ۳.۱.۱. (منیفلد باناخ) یک فضای توپولوژیک که درهر نقطه یک همسایگی همئومورف با یک مجموعه باز در فضای باناخ داشته باشد را منیفلد باناخ گوییم. یادآور می‌شویم که یک فضای باناخ یک فضای برداری نرم دار کامل است یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا است.

برای بیان تعریف بعدی، فضاهای توپولوژیک که به‌طور جزئی هموارند را در نظر می‌گیریم یعنی فضای توپولوژیک Y که به صورت تصویری از یک نگاشت دوسویی پیوسته $i_Y : Y_{sm} \longrightarrow Y$ می‌باشد و در آن Y_{sm} اجتماعی متناهی از زیر مجموعه های مجزای باز است که هر کدام یک منیفلد باناخ هموار می‌باشند. (یعنی Y فضایی با دو توپولوژی است : یک توپولوژی تعریف شده روی Y و توپولوژی دیگر از بازهایی همئومرف با فضای باناخ به دست می‌آید.)

تعریف ۴.۱.۱. (شبه منیفلد [۳۱])یک شبه منیفلد جهت پذیر بسته از بعد d یک فضای توپولوژیک به طور جزئی هموار، هاسدرف و فشرده است به طوری که یک مولفه از Y_{sm} یک منیفلد d- بعدی هموار جهت پذیر باشد که به وسیله i_Y به روی یک زیر فضای باز چگال Y^{top} از Y نگاشته

شود. به علاوه فرض می‌کنیم همه مولفه‌های دیگر Y_{sm}، بُعدی کوچکتر یا مساوی با $d-۲$ دارند. Y^{sing} را تصویر زیر منیفلد هایی با بعد کمتر از d تحت نگاشت i_Y یعنی $Y-Y^{top}$ قرار می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. (شبه منیفلد شاخه دار [۳۱]) یک شبه منیفلد شاخه دار[۱] Y از بعد d یک فضای به طور جزئی هموار $Y \longrightarrow Y_{sm}$ است که مولفه های Y_{sm} حداکثر بعد d دارند. مولفه های از بعد d را M_i و آن هایی که از بعد $d-۱$ اند را B_j گوییم و نماد $Y_{\leqslant k}$ را برای اجتماعی از مولفه‌های Y_{sm} که بعدی کمتریا مساوی با k دارند، در نظر می‌گیریم. می‌نویسیم :

$$Y^{top} = \bigcup_i M_i \ ، \ B = \bigcup_j B_j \ ، \ Y^{sing} = Y - (Y^{top} \bigcup B) = Y_{\leqslant d-۲}$$

مجموعه B را شاخه های اقاقیا [۲] گوییم.

تعریف دیگری نیز از منیفلد شاخه دار در[۱۱] بیان شده که از ذکر آن صرف نظر می‌کنیم.

تعریف ۶.۱.۱. (شبه منیفلد شاخه دار برچسب دار [۳۱]) یک شبه منیفلد شاخه دار Y از بعد d برچسب دار[۳] است اگر Y فشرده و مولفه های M_i جهت پذیر باشد و برچسب گویای مثبت $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ ای داشته باشد به طوری که شرایط زیر برقرار باشد :

برای هر $x \in B$ یک جهت روی T_xB قرار می‌دهیم و مولفه های M_i که x در بستار آن است را به دو گروه I^+ و I^- بر طبق سازگاری جهت انتخابی روی T_xB و جهت مرزی مربوط به M_i تقسیم می‌کنیم و بنابراین $\sum_{i\in I^+} \lambda_i = \sum_{i \in I^-} \lambda_i$.

تعریف ۷.۱.۱. (منیفلد با گوشه [۱۲]) منیفلد با گوشه‌هایی از مرتبه m یعنی یک فضای توپولوژیک M مجهز به یک زنجیر از زیر فضاها

$$M \supset M' \supset M'' \supset \cdots \supset M^{(m)}$$

(که $M^{(m+۱)} = \varnothing$ و $M^{(\circ)} := M$) به طوری که

[۱] $Branched\ Pseudomanifold$
[۲] $Branch\ Locus$
[۳] $Labelled$

۱. $M^{(j)} \backslash M^{(j+1)}$ یک منیفلد C^{∞} برای $j = 0, \cdots, m$ باشد،

۲. $M^{(j)}$ از مرتبه $m - j$ برای $j = 1, \cdots, m$ باشد(مرتبه ۰ یعنی C^{∞})،

۳. برای هر $y \in M^{(j)} \backslash M^{(j+1)}$ یک همسایگی V به صورت لبه $\Omega \times X^{\Delta}_{j-1}$ داشته باشیم که X_{j-1} یک منیفلد از مرتبه $j - 1$ ، به ازای $j = 1, \cdots, m$ و $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{q_j}$ باز باشد. منظور از X^{Δ} مخروط $X^{\Delta} := (\overline{\mathbb{R}}_{+} \times X)/(\{0\} \times X)$ است.

تعاریف بالا در فصل چهار مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۸.۱.۱. (میدان برداری) فرض کنیم M یک منیفلد باشد. یک میدان برداری از کلاس C^r، یک نگاشت X از کلاس C^r است که به هر نقطه $p \in M$ بردارمماس X_p را نسبت می‌دهد.

$$X : M \longrightarrow TM \ ، p \longmapsto X_p$$

مجموعه همه میدان های برداری C^{∞} روی M را با $\chi(M)$ نشان می‌دهیم. اگر به جای یک بردار از فضای مماس یک زیر فضا از آن را در نظر بگیریم به مفاهیمی مانند میدان مسطح و میدان فرا صفحه می‌رسیم. یک میدان مسطح ξ روی M یک زیر کلاف از کلاف مماس TM است به طوری که $\xi_p = T_pM \cap \xi$ یک زیر فضای ۲- بعدی از T_pM برای هر $p \in M$ باشد. هرگاه زیر کلاف با بعد متمم یک باشد آن را میدان فراصفحه گوییم.

تعریف ۹.۱.۱. (متریک ریمانی) یک متر ریمانی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M تابعی است که به هر نقطه $p \in M$ یک ضرب داخلی متقارن، دوخطی و مثبت معین روی فضای مماس نسبت می‌دهد یعنی

$$p \in M \ ، p \longmapsto g_p$$

به طوری که

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow R$$

و اگر X و Y میدان های برداری در M باشند آن گاه

$$p \longmapsto g_p(X_p, Y_p)$$

تابعی دیفرانسیل پذیرروی اشتراک دامنه های X و Y باشد. یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با این متر را منیفلد ریمانی گوییم.

در این جا تعریفی را از شار و مدار بیان می‌کنیم، این تعریف در [۴۰] به صورت یک قضیه آورده شده است.

تعریف ۱۰.۱.۱. (شار و مدار روی یک منیفلد قضیه / تعریف) فرض می‌کنیم $X \in \chi(M)$ از کلاس C^k باشد، آن گاه برای هر $p \in M$ یک مجموعه باز U شامل p، یک $\delta > 0$ و یک مجموعه یکتا از دیفئومرفیسم ها ی $\{\varphi_t\}$

$$\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U) \subset M$$

وجود دارد که به ازای $|t| < \delta$ تعریف می‌شود و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. φ از کلاس C^k است و

$$\varphi : (-\delta, \delta) \times U \subset \mathbb{R} \times M \longrightarrow M \text{ ، } (t, x) \longmapsto \varphi_t(x)$$

۲. $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ ، $\varphi_0 = Id$

۳. اگر $q \in U$ آن گاه

$$X_q = \frac{d}{dt}\varphi_t(q)|_{t=0}$$

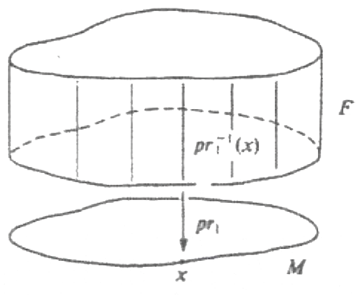
بردار سرعت منحنی $\varphi_t(x)$ است.

خانواده $\{\varphi_t\}$ را گروه موضعی یک پارامتری وابسته به میدان برداری X گوییم. نگاشت φ را شار موضعی میدان برداری X گوییم. اگر $x_0 \in U \subset M$ را ثابت در نظر بگیریم، منحنی $t \longrightarrow \varphi_t(x_0)$ را مدار x_0 برای شار φ می‌نامیم.

تعاریف زیر مربوط به کلاف ها هستند و از [۳۹] نقل شده اند، البته می‌توان این تعاریف را در [۱۴] و [۳۴] و... نیز مشاهده کرد.

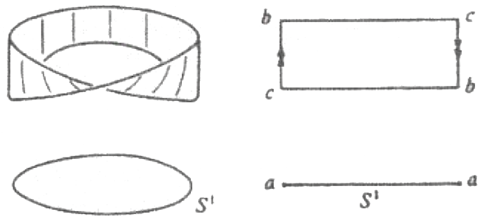
تعریف ۱۱.۱.۱. (کلاف) یک کلاف یک سه تایی (E, π, M) است که E و M فضا های توپولوژیکی بوده و $\pi : E \longrightarrow M$ یک نگاشت پیوسته است. E را فضای کلی یا فضای کلاف و M رافضای پایه نامند. نگاشت π به نگاشت تصویری موسوم است. برای $x \in M$ مجموعه $\pi^{-۱}(x) \subset E$ یک تار (یا فیبر) روی x نامیده می‌شود. اگر به ازای هر $x \in M$ ، $\pi^{-۱}(x)$ با یک فضای مشترک F ، همئومرف باشد (یعنی یک همئومرفیسم از $\pi^{-۱}(U)$ به $U \times F$ که $U \subset M$ وجود داشته باشد)، آن گاه F را تاری از کلاف و کلاف را، کلاف تاری می‌نامیم. تعریف کلاف C^∞ همانند بالاست با این تفاوت که E و M منیفلد های C^∞ بوده و π یک نگاشت C^∞ می‌باشد. توجه کنید که فضای کلی E را اغلب کلاف می‌نامند گرچه کلاف، اشاره به سه‌تایی (E, π, M) دارد.

مثال ۱۲.۱.۱. یکی از ساده ترین مثال ها از یک کلاف تاری، کلاف حاصل ضربی بر M با تار F و $pr_۱ : M \times F \longrightarrow M$ است که به صورت سه‌تایی $(M \times F, pr_۱, M)$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۱.۱: کلاف حاصل ضربی

مثال ۱۳.۱.۱. مثالی مشهور از یک کلاف تاری نوار موبیوس است (شکل ۲.۱ را ببینید)، یک نوار تابیده شده که فضای پایه آن دایره $S^۱$ می‌باشد .



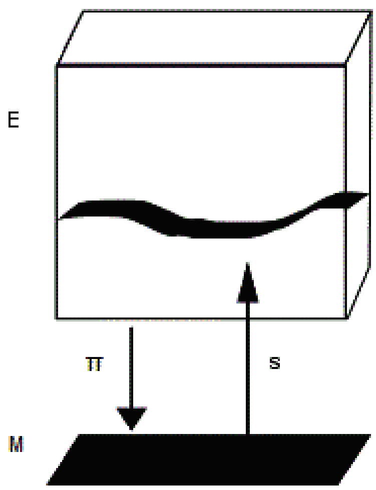
شکل ۲.۱: نوار موبیوس

از دیدگاه کار برد در فیزیک نظری یکی از مهمترین ایده ها درنظریه کلاف تاری ایده‌ی بخش (یا مقطع) عرضی است. شایان ذکر است که میدان های برداری ویک فرمی های دیفرانسیل پذیر را می‌توان به ترتیب مقاطع عرضی کلاف های مماس و کلاف های مماس دوم (کلاف کتانژانت) درنظر گرفت این ایده را می‌توان تعمیم داد.

تعریف ۱۴.۱.۱. یک بخش عرضی از یک کلاف (E, π, M) نگاشت $s : M \longrightarrow E$ است به طوری که تصویر هرنقطه $x \in M$ در تار $\pi^{-1}(x)$ بر x قرار دارد به عبارت دیگر

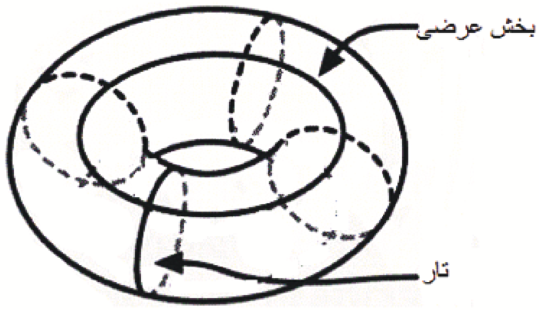
$$\pi \circ s = id_M$$

منظور از یک بخش موضعی از کلاف (E, π, M) نگاشت پیوسته $s : U \longrightarrow E$ است که U یک مجموعه باز در M است و برای هر $x \in U$ داشته باشیم: $\pi(s(x)) = x$.



شکل ۳.۱: بخش عرضی از کلاف

فرض کنید E یک کلاف مستدیر (یا دایره ای) باشد یعنی $\pi : E \longrightarrow S^1$ و فیبر ها S^1 باشند. در این حالت فضای کلی یک چنبره یا بطری کلاین است. برای به دست آوردن یک بخش از کلاف مستدیر از هر فیبر یک نقطه انتخاب می‌کنیم؛ با وصل کردن این نقاط به هم یک منحنی بسته روی فضای کلی کلاف کلی حاصل می‌شود. این منحنی بسته یک بخش از کلاف مستدیر است.



شکل ۴.۱: بخش عرضی و تار از یک کلاف مستدیر

تعریف ۱۵.۱.۱. (زیرکلاف) کلاف (E', π', M')، زیر کلافی از کلاف $\xi = (E, \pi, M)$ نامیده می‌شود و با نماد $\xi|_{M'}$ آن را نشان می‌دهند هر گاه

۱. $E' \subset E$

۲. $M' \subset M$

۳. $\pi' = \pi|_{E'}$

تعریف ۱۶.۱.۱. (مورفیسم بین کلاف ها) یک مورفیسم بین یک زوج از کلاف های (E, π, M) و (E', π', M') یک زوج از نگاشت های (u, f) می‌باشد به طوری که $u : E \longrightarrow E'$ و $f : M \longrightarrow M'$ به قسمی که نمودار زیر جابجایی باشد یعنی $\pi' \circ u = f \circ \pi$. اگر $M = M'$، مورفیسم (u, id_M) یک M - مورفیسم نامیده می‌شود.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"'] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\
M \arrow[r, "f"'] & M'
\end{tikzcd}
$$

تعریف ۱۷.۱.۱. (کلاف بدیهی و موضعا بدیهی)

۱. دوکلاف ξ ، η با فضای پایه یکسان M ایزومرف موضعی گفته می‌شوند اگربرای هر $x \in M$ ، یک همسایگی باز U از x وجود داشته باشد به طوری که $\xi|_U$ و $\eta|_U$ ، U- ایزومرف باشند. (تعریف ۱۶.۱.۱ را ببینید.)

۲. یک کلاف $\xi = (E, \pi, M)$ بدیهی است اگر با کلاف حاصل ضربی

$$(M \times F, pr_۱, M)$$

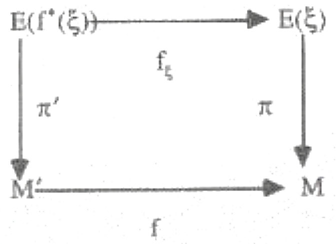
به ازای یک فضای F ، M - ایزومرف باشد وموضعا بدیهی نامیده می‌شود اگر به طور موضعی با کلاف حاصل ضربی ایزومرف باشد.

توجه کنید که یک کلاف بدیهی موضعی لزوما کلافی با یک تار می‌باشد. در حقیقت یک تعریف دیگر از یک کلاف تاری عبارت است از یک سه تایی (E, π, M) به طوری که به ازای هر $x \in M$ یک همسایگی باز $U \subset M$ و هومورفیسم $h : U \times F \longrightarrow \pi^{-۱}(U)$ وجود دارد به قسمی که به ازای هر $y \in F$ ، $x \in U$ ، $\pi(h(x, y)) = x$

تعریف ۱۸.۱.۱. (کلاف القایی یا عقب بر) فرض کنید $\xi = (E, \pi, M)$ یک کلاف با فضای پایه M و $f : M' \longrightarrow M$ یک نگاشت باشد. در این صورت کلاف القایی (یا عقب بر) از ξ کلاف $f^*(\xi)$ روی M' با فضای کلی

$$E' = \{(x', e) \in M' \times E | f(x') = \pi(e)\}$$

است که نگاشت تصویری $\pi' : E' \longrightarrow M'$ با $\pi'(x', e) := x'$ تعریف شده است.



شکل ۵.۱: کلاف القایی

تعریف ۱۹.۱.۱. (G- کلاف) این که G- فضای راست عمل گروه G روی منیفلد E است یعنی G با $E \times G \longrightarrow E$ روی Eعمل می‌کند که G یک گروه از دیفئومرفیسم های منیفلد E می باشد. در این صورت کلاف (E, π, M) یک G - کلاف نامیده می‌شود هرگاه با کلاف $(E, \rho, \frac{E}{G})$ ایزومرف باشد که در آن $\frac{E}{G}$ فضای مدار عمل G بر E و ρ نگاشت تصویری کانونی است.

اگر G به طور آزاد بر E عمل کند یعنی تنها دیفئومرفیسم دارای نقاط ثابت نگاشت همانی باشد آن گاه (E, π, M) یک G - کلاف اصلی است و G گروه ساختاری کلاف می‌باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱. (کلاف برداری و مورفیسم کلاف برداری)

۱) یک کلاف برداری n - بعدی حقیقی (مختلط) (E, π, M) یک کلاف تاری است که در آن هر تار دارای ساختاری از یک فضای برداری n - بعدی حقیقی (مختلط) باشد علاوه بر این باید به ازای هر $x \in M$ ، یک همسایگی $U \subset M$ از x و یک بدیهی سازی موضعی $h : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $y \in U$ ، $h : \{y\} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(y)$ یک نگاشت خطی باشد.

۲) یک مورفیسم کلاف برداری بین یک زوج از کلاف های برداری (E, π, M) و (E', π', M') یک نگاشت (u, f) است که در آن تحدید $u : E \longrightarrow E'$ به هرتار، یک نگاشت خطی می‌باشد.

مثال ۲۱.۱.۱. در این جا چند مثال از کلاف برداری بیان می‌کنیم.

۱. فضای حاصلضرب $M \times \mathbb{R}^n$ یک کلاف بدیهی روی M است.

۲. کلاف مماس TM از یک منیفلد دیفرانسیل پذیر یک کلاف برداری حقیقی است که بعد آن دو برابر بعد M است همچنین کلاف کتانژانت T^*M کلاف برداری است.

۳. فرض کنید M یک زیر منیفلد m - بعدی به طور هموار نشانده شده در $\mathbb{R}^n$ به ازای n ای باشد آنگاه کلاف نرمال M در $\mathbb{R}^n$ عبارت است از یک کلاف برداری $(n-m)$ - بعدی $\nu(M)$ بر M با فضای کلی

$$E(\nu(M)) := \{(x,v) \in M \times \mathbb{R}^n | v.w = \circ \ \forall w \in T_xM\}$$

که در آن $v.w$ ضرب اسکالر در فضای $\mathbb{R}^n$ است ونگاشت تصویری $E \longrightarrow E(\nu(M))$ به وسیله $\pi(x,v) := x$ تعریف شده است.

تعریف ۲۲.۱.۱. (کلاف خارج قسمتی [۲]) فرض کنید $i : N \longrightarrow M$ یک نشانننده از زیر منیفلد N در M باشد. بدیهی است که دیفرانسیل i فضای مماس در نقطه $n \in N$ را به زیر فضای مماس بر M در نقطه $i(n)$ تصویر می‌کندو لذا $T_{i(n)}M/di(T_nN)$ به عنوان فضای خارج قسمت بامعناست. حال کلاف خارج قسمتی را به صورت مجموعه ای از جفت های زیر در نظر می‌گیریم :

$$(n, t + di(T_nN)) \text{ ، } t \in T_{i(n)}M$$

توجه کنید که این کلاف، کلافی روی N خواهد بود.

در این قسمت نکاتی در مورد مشتق گیری از جبر خارجی $\Omega(M)$ بیان می‌کنیم که جزئیات بیشتر را می‌توان در [۴۰] دید.

فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعد n روی میدان K باشد. یک p- فرمی خارجی(یا یک فرم از درجه p) عبارت است از نگاشت p- خطی متناوب ω که به صورت زیر می‌باشد.

$$\omega : E \times E \times \cdots \times E \longrightarrow K$$

مجموعه p- فرمی های خارجی یک فضای برداری است که آن را توسط $\Omega^p E$ نمایش می دهیم. روی مجموعه فرم های خارجی یک ضرب به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. (ضرب خارجی) فرض کنید $\omega \in \Omega^p E$ و $\pi \in \Omega^q E$ ، ضرب خارجی این دو فرم یک فرم $(p+q)$- فرمی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Omega^p E \times \Omega^q E \longrightarrow \Omega^{p+q} E$$

$$(\omega, \pi) \longmapsto \omega \wedge \pi$$

ضرب خارجی دارای خواصی از جمله شرکت پذیری، توزیع پذیری و جابه‌جایی است.

فرض می‌کنیم $\Omega(M) = \{\Omega^p(M)\}_{p \in N}$ ، $\Omega(M)$ را جبر خارجی روی M می‌نامیم به عبارت دقیق تر $\Omega(M)$ را جمع مستقیم $\Omega^p(M)$ نیز می‌نامند.

تعریف ۲۴.۱.۱. (مشتق گیری از درجه π) یک مشتق گیری از درجه π عبارت است از نگاشت

$$D : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M)$$

به طوری که در شرایط زیر صدق کند :

الف) $D\Omega^p(M) \subset \Omega^{p+\pi}(M)$

ب) به ازاءهر تابع ثابت k داشته باشیم : $Dk = 0$

ج) $D(\omega_1 + \omega_2) = D\omega_1 + D\omega_2$

د) $D(\omega_1 \wedge \omega_2) = D\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\pi p_1} \omega_1 \wedge D\omega_2$ در این جا p_1 درجه ω_1 فرض شده است.

لذا با توجه به تعاریف بالا می‌توان چند نوع مشتق گیری را بیان نمود که آن ها را در تعاریف ۲۵.۱.۱ و۲۶.۱.۱ و ۲۷.۱.۱ به شرح زیر مطرح می‌کنیم: