بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه،گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد
گرایش آنالیز

عنوان

میانگین پذیری جبرهای باناخ دوگان

استاد راهنما
دکتر امین محمودی کبریا

استاد مشاور
دکتر داوود ابراهیمی بقا

نگارش
نگین خرمی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به همسرم

که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من است، کسی که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بود و تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات، و وجودش مایه دلگرمی من می باشد.

تقدیم به مادرم، مهربان فرشته‌ای

که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز اوست. سپاسگزار او هستم که سرآغاز تولد من بود و تار مویی از او به پای من سیاه نماند.

سپاسگزاری

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

حال که توفیق جمع آوری و تهیه این مجموعه را یافته‌ام بر خود واجب می‌دانم از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پژوهش از راهنمایی و یاری‌شان بهره‌مند گشته‌ام تشکر و قدردانی کنم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی نمایم.

از استاد راهنمای ارجمند جناب آقای دکتر امین محمودی کبریا که با سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و با ارائه نظرات سازنده و رهنمودهای بی‌دریغشان در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشته‌اند، کمال تشکر را دارم.

شکر خداوند متعال را به جای آورده که توفیق نصیب من کرد تا این پایان نامه را به پایان برسانم . از استاد مشاورم جناب آقای دکتر داوود ابراهیمی بقا که همواره اینجانب را مورد تفقد قرار می‌دهند کمال تشکر را دارم.

از داور محترم جناب آقای دکتر آژینی که زحمت بازخوانی و داوری این مجموعه را به عهده داشته‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. از کلیه اساتید گرانقدر دانشکده که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، تشکر می‌نمایم.

فهرست مطالب

چکیده

گوئیم جبر باناخ A دوگان است اگر یک زیر مدول بسته‌ی A_* از A^* موجود باشد که $A = (A_*)^*$.

رده جبرهای باناخ دوگان شامل تمام w^*-جبرهاست و همچنین شامل تمام جبرهای M(G) بـرای گروه‌های موضعاً فشرده‌ی G و تمام جبرهای $L(E)$ برای فضای باناخ بازتابی E است.

ابتدا نشان می‌دهیم تحت شرایطی معین یـک جبـر بانـاخ دوگـان میـانگین‌پـذیر، یـک جبـر بانـاخ ابر– میانگین‌پذیر و بنابراین متناهی‌البعد است. سپس دو مفهوم میانگین‌پذیری، کن– میانگین‌پـذیری و کن میانگین‌پذیری قوی را توسیع می‌دهیم که در آنها توپولوژی ضعیف ستاره را روی جبر بانـاخ دوگان قرار داده‌ایم. سپس میانگین‌پذیری جبر باناخ منظم آرنز A را به کن– میانگین‌پـذیر (قـوی) A^{**} نسبت می‌دهیم. [1]

[1] کلمات کلیدی: Banach algebra - amenable - Cones amenability - Super amenability - Compact weakly- Diagonal - Derivation

مقدمه

جبرهای باناخ میانگین‌پذیر به وسیله جانسون معرفی شده است. در سال ۱۹۷۲ جانسون[۱] ثابت کرد برای گروه موضعاً فشرده G، جبر پیچشی $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد[25] . بعد از آن تحقیقات جالبی روی میانگین‌پذیر صورت گرفته است. در سال ۱۹۸۳، هاجرآب[۲] نشان داد که یک C^* جبر میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر هسته‌ای باشد[21].

همچنین در سال ۱۹۸۸ ، ایفر[۳] ثابت کرده است که جبر نویمان، کن- میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر به طور قوی، کن- میانگین‌پذیر باشد[12]. در سال ۱۹۹۸ ، نشان داده شد اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد آنگاه M(G) میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر G گسسته و میانگین‌پذیر باشد[18].

در این پایان‌نامه دو هدف را دنبال می‌کنیم.

اولاً نشان داده می‌شود جبرهای باناخ نادری موجودند که میانگین‌پذیر هستند، سپس با قضایای مناسب ثابت می‌شود و ثانیاً نظریه میانگین‌پذیری به طور مناسبی برای جبرهای باناخ دوگان تعمیم داده می‌شود که آن را کن- میانگین‌پذیری می‌نامیم.

در این پایان‌نامه مقاله آقای ولکر رونده[۴]، در مورد میانگین پذیری جبرهای باناخ که در سال ۲۰۰۲ به چاپ رسیده را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهم[39].

---

[۱] B.E. JOHNSON
[۲] U.HAAGERUP
[۳] E.G.EFFROS
[۴] Volker Runde

فصل اول

پیش نیازها

۱-۱ فضاهای باناخ

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد قرار دهید $X^* = \{f / \ f{:}X \to F\}$، در این صورت X^* را *دوگان* X می‌نامند و به اعضای آن یعنی توابع مانند f، تابعک خطی می‌نامند.

نمادگذاری ۱-۱-۲. فرض کنید $\Lambda \in X^*$ در آن صورت $\Lambda(\mathrm{x})$ را به صورت $\langle x, \Lambda \rangle$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱-۱-۳. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد در آن صورت فضای X^* با نرم $\| . \|$ یک فضای باناخ است. همچنین $\| \Lambda \| = \sup_{\Lambda \in X^*, x \in X, \|x\| \leq 1}$.

تعریف ۱-۱-٤. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و X^* *دوگان* X باشد در این صورت گوییم X^* *نقاط* X *را جدا* می‌کند هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ که $x_1 \neq x_2$، یک عضو $\phi \in X^*$ موجود باشد به طوری که $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$.

تعریف ۱-۱-۵. یک مجموعه جهت‌دار I ، مجموعه‌ای با ترتیب جزئی $(I, \leq)$ می‌باشد به قسمی که هرگاه $i_2, i_1 \in I$ آنگاه $i_3 \in I$ موجود باشد به قسمی که $i_1 \leq i_3$ و $i_2 \leq i_3$.

تعریف ۱-۱-٦. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد یک شبکه در X عبارت است از زوج $\big((I, \leq), X\big)$ که در آن $(I, \leq)$ یک مجموعه جهت‌دار و X یک تابع از I به توی X می‌باشد. معمولاً

به ازای هر $i \in I$، $X(i)$ را با نماد X_i نمایش می‌دهیم و تابع X را با $\{X_i\}_{i\in I}$ نمادگذاری مـی‌کنـیم در این صورت $\{X_i\}_{i\in I}$ را یک شبکه در X گوییم.

تعریف ۱-۱-۷. فـرض کنیـد F خـانواده نگاشـتهای f باشـد کـه $f : X \to X_f$ بطوریکـه هـر X_f هاسدورف و X مجموعه‌ای دلخواه باشد در این صورت ضعیفترین توپولوژی که نسبت به آن هر f پیوسته است را *توپولوژی القا شده* توسط خانواده F (f, X_f) می‌نامند.

تعریف ۱-۱-۸. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد و فرض کنیـد X^* دوگان X باشد به طوری که نقاط X را جدا کند. توپولوژی القا شده روی X توسط X^* را بـا τ_w نمایش می‌دهیم. (X, τ_w) یک فضای توپولوژیک موضعاً محدب است که دوگـان آن همـان X^* است و τ_w ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که نسبت به آن هر عضو X^* پیوسته اسـت. لـذا $\tau_w \subseteq \tau$ را *توپولوژی ضعیف* روی X و τ را توپولوژی اولیـه روی X مـی‌نامنـد و τ_w را بـا نمـاد $\sigma(X, X^*)$ نمایش می‌دهند. در توپولوژی ضعیف این خاصیت مهم وجود دارد که اگـر $\{x_\alpha\}$ یـک تور (دنباله حالت خاصی از توراست) در X باشد و $x \in X$ آنگاه $x_\alpha \to x$ تحت توپولوژی ضـعیف اگر و تنها اگر برای هر $f \in X^*$، $\langle x_\alpha , f\rangle \to \langle x, f\rangle$. همگرائی تور $\{x_\alpha\}$ به x را در این توپولوژی را با نماد $x_\alpha \overset{w}{\to} x$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و X^* دوگان X باشد و فرض کنیـد $x \in X$. نگاشت $f_x \in X^{**}$ که $f_x : X^* \to F$ را برای هـر $\Lambda \in \mathrm{X}^*$ بـا ضـابطه $\mathrm{f}_x(\Lambda) = \Lambda(x)$ در نظر می‌گیریم. f_x یک نگاشت خطی است و خانواده $F = \{f_x / x \in X\}$ نقاط X^* را جدا می‌کنـد. زیرا برای هر $\Lambda_1, \Lambda_2 \in X^*$ و $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ یک $x \in X$ موجود است به طوریکـه $\Lambda_1(x) \neq \Lambda_2(x)$.

بنابراین با توجه به تعریف f_x، $\mathrm{f}_x(\Lambda_1) = \mathrm{f}_x(\Lambda_2)$. حـال F توپولـوژی روی X^* ،X^* را بـه یـک فضای برداری توپولوژیک تبدیل می‌کند این توپولوژی را *توپولوژی ضعیف ستاره* می‌نامنـد و بـا τ_{w*} یا $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهند. در این توپولوژی تور $\{f_\alpha\} \subseteq X^*$ به f تحت توپولوژی ضعیف ستاره همگرا است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $\langle x, f_\alpha \rangle \to \langle x, f \rangle$. همگرائی تـور $\{f_\alpha\}$ بـه f را در این توپولوژی با نماد $f_\alpha \xrightarrow{w*} f$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱–۱–۱۰. فرض کنید X یک فضای باناخ و X^* دوگان X باشد در این صورت X^* باناخ است. *دوگان دوم* X را با X^{**} نمایش می‌دهیم که یک فضای باناخ است. حال برای هر $x \in X$ نگاشت $\phi: x \mapsto \phi_x \in X^{**}$ که در آن برای هر $x^* \in X^*$، $\langle x^*, \phi_x \rangle = \langle x, x^* \rangle$ است را در نظر می‌گیریم. ϕ یک تبدیل خطی است و به علاوه $\|\phi_x\| = \|x\|$. چون،

$$\|\phi_x\| = sup_{x \in X} |\langle\langle x^*, \phi_x \rangle\rangle| = sup_{x \in X} |\langle x, x^* \rangle| = \|x\|$$

از این رو نگاشت $\phi: X \to X^{**}$ یک ایزومورفیسم ایزومتری اسـت. اکنـون $\phi(X) \subseteq X^{**}$، چـون X باناخ است پس کامل است پس $\phi(X)$ زیر فضای بسته X^{**} است. حال با یکی گرفتن X و $\phi(X)$ می‌توان نوشت $X \subseteq X^{**}$. همچنین $\phi: X \to X^{**}$ و $\phi: X \to \phi(X) \subseteq X^{**}$، نگاشتهایی یک به یـک می‌باشند. لذا $X \cong \phi(X)$ پس می‌توان اعضای X و $\phi(X)$ را یکی در نظر گرفت. در واقـع $\phi(X)$ آن دسته از تابعکهای خطی هستند که نسبت به توپولوژی ضعیف سـتاره پیوسـته هسـتند. در واقـع شرط لازم برای آنکه X انعکاسی باشد آن است که X باناخ باشد ولی این شرط کافی نیست. زیـرا اگر $1 < P < \infty$ در این صورت، $L^p(\mu)^{**} = L^q(\mu)^* = L^p(\mu)$. حال اگر $P = 1$ در این صورت،

$$L^1(\mu)^{**} = L^P(\mu)^* \neq L^1(\mu)$$

تعریف ۱-۱-۱۱ . فرض کنید A یک جبر باناخ، $\{a_n\} \subseteq A$ و $a \in A$ به طوریکه $a_n \overset{w^*}{\to} a$. گوییم ضرب در A، به طور جدا ضعیف ستاره پیوسته است هرگاه برای هر $b \in A$، $a_n b \overset{w^*}{\to} ab$ و $ba_n \overset{w^*}{\to} ba$.

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض کنیم A و B دو فضای نرمدار و $T: A \to B$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد. آنگاه *نگاشت الحاقی* T را با نماد T^* نشان می‌دهیم و $T^*: B^* \to A^*$ را برای هر $a\epsilon A\,, \alpha\epsilon B^*$ با ضابطه $\langle a, T^*(\alpha)\rangle = \langle T(a), \alpha\rangle$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱-۱-۱۳. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد نگاشت $\phi: X \to X^{**}$ را برای هر $x \in X\,, \alpha \in X^*$ با ضابطه $\langle \alpha, \phi(x)\rangle = \langle x, \alpha\rangle$ تعریف می‌کنیم. ϕ، یک نگاشت خطی است که برای هر $x \in X$، $\|\phi(x)\| = \|x\|$. این نگاشت را *نشاننده طبیعی (استاندارد)* می‌نامند.

تعریف ۱-۱-۱٤. اگر A و B دو فضای نرمدار باشند مجموعه تمام نگاشت‌های خطی پیوسته از A به B را با نماد *L(A,B)* نشان می‌دهند اگر A=B آنگاه به جای نماد L(A,A) از نماد L(A) استفاده می‌کنند. نرم در این فضا برای $T \in L(A,B)$ به صورت $\|T\| = sup_{\|x\| \le 1}\|Tx\|$ تعریف می‌شود. پس L(A,B) یک فضای نرمدار است.

۱-۲ جبرهای باناخ

تعریف ۱-۲-۱. یک جبر *مختلط* عبارت است از یک فضای برداری مانند A روی میدان اعداد مختلط **C** همراه با نگاشت $A \times A \to A$ با ضابطه $(x,y) \mapsto x.y$ که در اصول موضوعه زیر به ازای هر $x,y,z \in A$ و $a \in \boldsymbol{C}$ صدق کند به جای $x.y$ معمولاً xy می‌نویسیم.

$$(1)\ \ x(yz) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$$
$$(2)\ \ x(yz) = (xy)z$$
$$(3)\ \ (ax)y = a(xy) = x(ay)$$

نگاشت $(x,y) \to xy$ را ضرب A و عضو xy را حاصلضرب x و y می‌نامیم.

$(A, \|.\|)$ را یک جبر *نرمدار* گوییم هرگاه A یک جبر و $\|.\|$ یک نرم در A باشد به طوری که برای هر $x, y \in A$ ، $\|xy\| \le \|x\|.\|y\|$. حال یک جبر *باناخ* عبارت است از جبر نرمدار $(A, \|.\|)$ به طوری که فضای نرمدار A تحت نرم $\|.\|$ کامل باشد. جبر A را *یکدار* نامیم هرگاه عضوی از A که با e نشان می‌دهیم موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$ ، $xe = ex = x$.

مثال ۱-۲-۲. فرض کنید X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند در این صورت $B(X,Y) = \{f \mid f: X \to Y \quad \text{خطی}\}$ که $B(X,Y)$ یک فضای برداری است حال اگر $Y = F$ در این صورت $X^* = B(X, F)$.

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ و A^* دوگان اول A و A^{**} دوگان دوم آن باشد.

ضرب آرنز اول روی A^* با ضابطه زیر در سه مرحله تعریف می‌شود.

(الف) ابتدا ضرب یک عضو A در یک عضو A^*

$$\langle b, fa\rangle = \langle ab, f\rangle \qquad (a, b \in A \ , f \in A^*)$$

(ب) حال ضرب یک عضو A^* در یک عضو A^{**}

$$\langle a, Ff\rangle = \langle fa, F\rangle \qquad (a \in A \, , f \in A^* \, , F \in A^{**})$$

(پ) حال ضرب اعضای A^{**} به یکدیگر (ضرب آرنز اول)

$$\langle f, F \,\square\, G\rangle = \langle Gf, F\rangle \qquad (f \in A^* \ \ , F, G \in A^{**})$$

(ضرب آرنز اول را با □ نشان می‌دهیم).

تعریف ۱-۲-٤. *ضرب آرنز دوم* مانند ضرب آرنز اول در سه مرحله تعریف می‌شود.

(الف) $\langle b, a.f\rangle = \langle ab, f\rangle \qquad (a, b \in A\,, f \in A^*)$

(ب) $\langle a, fF\rangle = \langle a.f, F\rangle \qquad (a \in A, f \in A^*, F \in A^*)$

(پ) $\langle f, F \diamond G\rangle = \langle fG, F\rangle \qquad (f \in A^*\ ,\ F, G \in A^{**})$

(ضرب آرنز دوم را با $\diamond$ نشان می‌دهیم).

تعریف ۱-۲-۵. گوئیم جبر باناخ A، یک *جبر آرنز منظم* است اگر برای هر $\phi, \tau \in A^{**}$، داشته باشیم $\phi \,\square\, \tau = \phi \diamond \tau$.

تعریف ۱-۲-٦. فرض کنیم A یک جبر باناخ روی میدان F و X یک فضای برداری روی F باشد. X را یک *باناخ* A *مدول* چپ گویم هرگاه نگاشت $A \times X \to X$ با ضابطه $(a, x) \mapsto a.x$ موجود باشد به طوری که،

(الف) $a.(x + y) = a.x + a.y \qquad (a \in A\,, x, y \in X)$

(ب) $(a + b).x = a.x + b.x \qquad (x \in X, a, b \in A)$

(پ) $(a_1a_2).x = a_1.(a_2.x) \qquad (a_1, a_2 \in A,\ x \in X)$

(ت) $\|a.x\| \leq \|a\|\|x\| \qquad (a \in A\,,\ x \in X)$

به همین ترتیب گوئیم X یک *باناخ* A *مدول راست* است اگر نگاشتی مانند $X \times A \to X$ با ضابطه $(x, a) \mapsto x.a$ موجود باشد که دارای خواص مشابه فوق باشد.

تعریف ۱-۲-۷. X را *باناخ* A *مدول دوطرفه یا باناخ* A *مدول* گوییم هرگاه هم باناخ A مدول چپ و هم باناخ A مدول راست باشد و ضرب مدولی‌اش برای $a, b \in A, x \in X$ دارای خاصیت $(a.x).b = a.(x.b)$ باشد.

مثال ۱-۲-۸. اگر A یک جبر باناخ و A^* دوگان A باشد آنگاه A^* برای هر $a \in A, f \in A^*, b \in A$ با ضرب مدولی $\langle b, a.f \rangle = \langle ab, f \rangle$ و $\langle b, f.a \rangle = \langle ab, f \rangle$ یک باناخ A مدول است.

تعریف ۱-۲-۹. باناخ A مدول دو طرفه X را *جابجایی* نامیم هرگاه به ازای هر $a \in A$ و $x \in X$، رابطه $a.x = x.a$ برقرار باشد.

۱-۲-۱۰ مثال. فرض کنیم A یک جبر باناخ و E یک فضای باناخ باشد که یک باناخ A مدول نیز است. در این صورت E^* برای هر $b \in E$,$f \in E^*$,$a \in A$ با ضرب $\langle b, af \rangle = \langle ab, f \rangle$ و $\langle b, fa \rangle = \langle ab, f \rangle$ یک *باناخ* A *مدول* است.

مثال ۱-۲-۱۱. اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه A خود با ضرب موجود در خود یک باناخ A مدول است و A^* به صورتی که در قسمت قبل تعریف شده است یک باناخ A مدول است.

تبصره ۱-۲-۱۲. اثر یک نگاشت خطی مانند f را روی a با نماد $\langle a, f \rangle$ به جای $f(a)$ نشان می‌دهیم. یعنی $\langle a, f \rangle$ همان $f(a)$ است.

تعریف ۱-۲-۱۳. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد تور $\{e_\alpha\}$ در A را یک *واحد تقریبی* نامیم هر گاه برای هر $a \in A$ ، $e_\alpha . a \xrightarrow{\|\cdot\|} a$ و $a. e_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} a$. گوییم این *تور واحد تقریبی کراندار* است اگر، $sup\|e_\alpha\| < \infty$.

قضیه تجزیه کوهن ۱-۲-۱۴. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. آنگاه عبارات زیر معادل هستند.

۱) A دارای واحد تقریبی چپ (راست) با کران بالای M می باشد.

۲) عدد ثابت M موجود است که به ازای هر $a \in A$ و هر $\varepsilon > 0$ عناصر $b,c \in A$ وابسته به a یافت می شوند که $a = cb$ ($a = bc$) و $\|c\| \le M$ و $\|a-b\| < \varepsilon$ و $b \in \overline{Aa}$ ($b \in \overline{aA}$).

تعریف ۱-۲-۱۵. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و $f: X \to \boldsymbol{C}$ یک تابع مختلط باشد در این صورت $C_0(X)$ به صورت $C_0(X) = \{f: X \to \boldsymbol{C} \mid$ پیوسته وحد f در بی نهایت صفرشود $f\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۲-۱۶. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. $M(G)$ عبارت است از فضای برداری تمام اندازه‌های بورل مختلط(متناهی) روی G . M(G) با ضرب پیچشی که در زیر تعریف شده به یک جبر باناخ تبدیل می‌شود. برای $\mu, \nu \in M(G)$ *ضرب پیچشی* $\mu * \nu$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\langle f, \mu * \nu \rangle := \int_G \left(\int_G f(gh) d\mu(g) \right) d\nu(h) \qquad (f \in C_0(G))$$

که در آن $C_0(G)$ مجموعه تمام توابع پیوسته روی G است که در بی نهایت صفر می‌شود. یعنی برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه یک مجموعه فشرده $K \subseteq G$ چنان موجود است که برای هر $x \in G - K$، $|f(x)| < \varepsilon$

تعریف ۱-۲-۱۷. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. نگاشت $x \to x^*$ از A به A را یک برگشت نامیم هر گاه دارای خواص زیر باشد.

$(i) \quad (x+y)^* = x^* + y^* \qquad (x, y \in A)$

$(ii) \quad (\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^* \qquad (\alpha \in \mathbb{C},\ x \in A)$

$(iii) \quad (xy)^* = y^* x^* \qquad (x, y \in A)$

$(iv) \quad x^{**} = x \qquad (x \in A)$

جبر باناخ مجهز به برگشت را یک *- جبر نامیم. یک *- جبر با خاصیت $\|x.x\|=\|x\|^2$ را یک C^*- جبر نامیم.

تعریف ۱-۲-۱۸. اگر A یک C* جبر باشد به طوریکه فضای باناخی مانند B یافت شود که به عنوان دو فضای باناخ $A \simeq B^*$ آنگاه A را w^*- جبر نامیم.

۱-۳ ضرب تانسوری

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنیم Z و Y و X فضاهای باناخ باشند نگاشت $\theta: X \times Y \to Z$ را یک *نگاشت دو خطی* نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

(i) برای هر $x \in X$، نگاشت $y \to \theta(x,y)$ خطی باشد.

(ii)برای هر $y \in Y$ ، نگاشت $x \to \theta(x,y)$ خطی باشد.

نگاشت دو خطی θ را *کراندار* گوییم هرگاه $M > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in X\ ,\ y \in Y$، $\|\theta(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$. فضای تمام نگاشت‌های خطی کراندار را با $BL(X,Y,Z)$ نشان می‌دهند که در آن نرم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|\theta\| = sup\{\|\theta(x,y)\| \mid \|x\| \leq 1\ , \qquad \|y\| \leq 1\}$$

تعریف ۱-۳-۲. برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ ، عنصر $x \otimes y \in BL(X^2, Y^2, C)$، برای هر $f \in X^*\ , g \in Y^*$ به صورت $x \otimes y(f,g) = f(x)g(x)$ تعریف می‌شود. *ضرب تانسور جبری* X و Y، را با $X \otimes Y$ نشان می‌دهند. که فضای خطی تولید شده از $\{\, x \otimes y \mid x \in X\ , y \in Y\, \}$ در $BL(X^*, Y^*, C)$ است. در $X \otimes Y$ یک نرم برای $U \in X \otimes Y$ به صورت $\|U\|_P = inf\{\sum \|x_i\|\|y_i\| \mid U = \sum x_i \otimes y_i\}$ تعریف می‌شود. نماد $\|.\|_p$ را نماد نرم تانسور

تصویری در نظر می‌گیریم و این نرم را *نرم تانسور تصویری* نامیم. بستار $X\otimes Y$ را با نـرم $\|.\|_p$ در داخل دوگان دوم نرمی مربوط به این نرم را *ضرب تانسور تصویری* X و Y نامیم و آن را با نماد $X\widehat{\otimes}Y$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۳-۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ و $n\in N$ باشد آنگـاه $M_n(A)$ فضـای بـرداری تمـام ماتریس‌های $(a_{i,j})_{i,j\in\{1,2,\dots n\}}$ می‌باشد که،

$$\|(a_{i,j})_{i,j\in\{1,2,\dots n\}}\| = \sum\nolimits_{i,j\in\{1,2,\dots n\}} \|a_{i,j}\|_A < \infty$$

در این فضا ضرب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(a_{i,j})_{i,j\in\{1,2,\dots n\}} \,.\, (b_{i,j})_{i,j\in\{1,2,\dots n\}} = (c_{i,j})_{i,j\in\{1,2,\dots n\}}$$

در حالی که $C_{i,j} = \sum_{k\in\{1,2,\dots n\}} a_{i,k}b_{k,j}$ با این ضرب $M_n(A).$ یک جبر بانـاخ اسـت. منظـور از M_n ماتریس‌های n در n است.

فصل دوم
میانگین‌پذیری جبرهای باناخ
و میانگین پذیری گروه‌های موضعاً فشرده

۲-۱ مقدمات

تعریف ۲-۱-۱. جبر باناخ A را دوگان نامیم اگر A- مدول بسته A_* به عنوان زیر مجموعه‌ای از A^* موجود باشد که $A \cong (A_*)^*$ ، A_* را پیش دوگان A نامیم و A_* لزوماً منحصر به فرد نیست.

تعریفی که ما از جبر باناخ دوگان آوردیم را همه ریاضیدانان نپذیرفته‌اند. تعریف جبر باناخ دوگان به صورتهای دیگری نیز آمده است. مثلاً در[5] و [6] جبر باناخ دوگان را جبر باناخ با خاصیت DM می‌نامند.

قضیه ۲-۱-۲. فرض کنید A یک جبر باناخ دوگان باشد آنگاه،

(الف) ضرب جبر باناخ A، به طور جدا ضعیف ستاره پیوسته است.

(ب) A دارای واحد تقریبی کراندار است اگر و تنها اگر دارای واحد باشد.

(پ) نگاشت تصویر $Dixmier$، $\pi: A^{**} \cong A_*^{***} \to A_*^* \cong A$ یک هومومورفیسم جبری نسبت به ضرب آرنز روی A^{**} است.

برهان. (الف)، چون A یک جبر باناخ دوگان است پس A مدول A_* به عنوان زیر مجموعه‌ای از A^* موجود است که $A = (A_*)^*$ (طبق تعریف ۲-۱-۱) حال برای آنکه نشان دهیم ضرب در A، به طور جدا، ضعیف ستاره پیوسته است باید نشان دهیم اگر دنباله‌ای مانند $\{a_n\} \subseteq A$ به $a \in A$ به طور ضعیف ستاره همگرا باشد آنگاه برای هر $b \in A$، $a_n b \xrightarrow{w^*} ab$ و $ba_n \xrightarrow{w^*} ba$.

نشان می‌دهیم $a_n b \xrightarrow{w^*} ab$. چون $A = (A_*)^*$ پس می‌توانیم $\{a_n\}$ و b و a را در $(A_*)^*$ در نظر بگیریم. چون $a_n \xrightarrow{w^*} a$ پس برای هر $f \in A_*$،

$$f(a_n) \to f(a) \qquad (۲-۱-۱)$$