بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

مجتمع علوم

دانشکده ریاضی

پایان نامه

کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان:

روشی برای ساختن تجزیه همگن گراف‌ها

استاد راهنما:

دکتر محمد علی ایرانمنش

استاد مشاور:

دکتر بیژن دواز

پژوهش و نگارش:

مهناز کدخدایی

بهمن ماه ۱۳۸۵

تقدیم به

پدر مادر و، همسرم

تقدیر و تشکر:

قبل از پرداختن به هر مطلبی بر خود لازم می‌دانم از استاد گرامی، جناب آقای دکتر محمدعلی ایرانمنش که با راهنمایی‌ها و نظرات سودمند خویش مرا در طول این دوره یاری نمودند، تشکر و قدردانی نمایم و دلسوزی‌ها و همیاری‌های ایشان را ارج می‌نهم. از جناب آقای دکتر بیژن دواز بعنوان استاد مشاور، بخاطر راهنمایی‌ها و نظارت دقیق بر این پایان‌نامه، تشکر و قدردانی می‌نمایم. از جناب آقای دکتر اشرفی و از جناب آقای دکتر هوشمند اصل به خاطر داوری این پایان‌نامه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر مدرس ریاست محترم دانشکده و جناب آقای دکتر هوشمند اصل مدیر گروه ریاضی و از سرکار خانم عابدینی، منشی دانشکده‌ی ریاضی، بخاطر محبت‌ها و زحماتشان نهایت تشکر و قدردانی را دارم. در پایان از پدر و مادر مهربانم که محبت‌های بی‌دریغ‌شان همواره شامل حال من بود و از برادران عزیزم که همواره مشوق من بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم. از همسر عزیزم که با دل‌گرمی‌های خود قوت قلبی برای من بودند، تشکری ویژه دارم. از دوستانی که در طول این دوره با من همراه بودند خانم‌ها سمیه زارعی، مهتاب قمقامی، لاله شاهسون، فرزانه صوفی‌وند، الهه عظیمی، سمیه شایق و کلیه کسانی که دوره کارشناسی ارشد را با آنها سپری کردم تشکر می‌نمایم.

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامـه تحصیلی خانم مهناز کدخدایی دانشجوی کارشناسی ارشد رشتـه/گرایش: ریاضی محض - جبر

تحت عنوان: روشی برای ساختن تجزیه همگن گراف ها

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۱۲/۱۳/ ۸۵ با حضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹ و به حروف نوزده تمام و با درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	محمد علی ایرانمنش	
استاد/ استادان مشاور:	بیژن دواز	بیژن دواز
متخصص وصاحبنظرداخلی:	محمدرضا هوشمند اصل	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	سید علیرضا اشرفی	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: محمدکاظم ترشیزی

امضاء:

فهرست مندرجات

چکیده

تجزیه همگن $(M, G, \Gamma, \mathcal{P})$ عبارت است از افراز $\mathcal{P}$ از مجموعه کمان‌های یک گراف جهت‌دار مانند Γ به طوری که گروه‌های رأس- انتقالی M و G وجود دارند که $M < G \leqslant Aut(\Gamma)$ و M هر قسمت $\mathcal{P}$ را مجموعه‌وار ثابت نگه می‌دارد، در حالی که G به طور انتقالی روی $\mathcal{P}$ عمل می‌کند.

تجزیه‌های همگن گراف‌های کامل قبلاً توسط لی و پرگر مطالعه شده است که تعمیمی از تجزیه‌های همگن گراف‌های جهت‌دار خودمکمل، رأس- انتقالی هستند. دراین تحقیق تجزیه همگن گراف‌ها و گراف‌های جهت‌دار دلخواه را بررسی می‌کنیم. یک روش ساختاری مبتنی بر نظریه گروه ارائه کرده و نشان می‌دهیم که همه تجزیه‌های همگن می‌توانند به این روش ساخته شوند، همچنین خواهیم دید که مهمترین تجزیه‌های همگن، تجزیه‌هایی هستند که G به طور انتقالی روی مجموعه کمان‌های Γ عمل می‌کند، M یک زیرگروه نرمال از G است و $\frac{G}{M}$ یک گروه دوری از مرتبه یک عدد اول است.

مقدمه

این پایان‌نامه مشتمل بر پنج فصل است که فصل اول آن مربوط به تعاریف و مفاهیم مقدماتی مربوط به نظریه گراف و نظریه گروه است. در فصل دوم محدودیت‌های روی اجزاء یک تجزیه همگن یعنی M، G، Γ و $\mathcal{P}$ را که مورد نیاز برای وجود یک تجزیه همگن هستند، بررسی می‌کنیم و با توجه به این محدودیت‌ها گراف‌های جهت‌داری را که دارای تجزیه همگن هستند، مشخص می‌کنیم. در فصل سوم ابتدا بر اساس عمل یک گروه روی یک مجموعه، یک تجزیه همگن می‌سازیم و سپس این تجزیه همگن را بر اساس عمل موضعی گروه، یعنی عمل پایدارساز به دست می‌آوریم. در فصل چهارم ابتدا یک تجزیه همگن از یک زیرگراف جهت‌دار از گراف Γ می‌سازیم و در ادامه یک تجزیه همگن از گراف خارج قسمتی به دست می‌آوریم. در پایان با داشتن یک تجزیه همگن، یک تجزیه همگن دوری به دست می‌آوریم. در فصل پنجم روشهای ایجاد یک تجزیه همگن دوری کمان— انتقالی با اندیس عدد اول بررسی می‌شود.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بیان بعضی از تعاریف و قضایای مقدماتی نظریه گروه‌ها و نظریه گراف و تجزیه همگن گراف می‌پردازیم.

۲.۱ گروه‌ها

تعریف ۱.۲.۱.

مجموعه ناتهی G همراه با عمل دوتائی $*$ یک گروه نامیده می شود، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

۱) خاصیت شرکت پذیری، یعنی به ازای هر $a, b, c \in G$ داشته باشیم $a*(b*c) = (a*b)*c$.

۲) وجود عضو خنثی، یعنی عضوی مانند $e \in G$ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر $a \in G$ داشته باشیم $a * e = e * a = a$.

۳) وجود عضو وارون، یعنی به ازای هر $a \in G$ عضوی مانند $b \in G$ وجود داشته باشد به

طوری که $a * b = b * a = e$.

تعریف ۲.۲.۱.

تعداد اعضای گروه G را مرتبه G نامیده و با نماد $|G|$ نشان می‌دهیم.

در مورد سایر ساختارهای جبری و نیز مجموعه‌ها از نماد $|X|$ برای نشان دادن مرتبه یا تعداد عضوهای X استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۱.

فرض کنید a عضوی از گروه G است. در این صورت کوچکترین عدد صحیح و مثبت m را که $a^m = e$ باشد، مرتبه a نامیده و با نماد $o(a)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱.

گروه G را ساده می‌نامیم هرگاه هیچ زیرگروه نرمال غیر بدیهی نداشته باشد.

تعریف ۵.۲.۱.

مجموعه ناتهی F به همراه دو عمل جمع و ضرب را یک میدان می‌نامیم هرگاه

۱) $(F, +)$ یک گروه آبلی باشد،

۲) $F \backslash \{0\}$ همراه با عمل ضرب یک گروه آبلی باشد که 0 عضو خنثی عمل $+$ است،

۳) به ازای هر $a, b, c \in F$ داشته باشیم، $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

۴) به ازای هر $a, b, c \in F$ داشته باشیم، $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

تعریف ۶.۲.۱.

فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن است. مجموعه $\{g \in G | gh = hg, \forall h \in H\}$ را مرکزساز H در G نامیده و با نماد $C_G(H)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۲.۱.

فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن است. مجموعه $\{g \in G \mid gH = Hg\}$ را نرمال‌ساز H در G نامیده و با نماد $N_G(H)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۲.۱.

فرض کنید H زیرگروهی از G است. مجموعه $\{aH \mid a \in G\}$ را مجموعه هم‌رده‌های چپ H در G می‌نامیم. به همین صورت مجموعه $\{Ha \mid a \in G\}$ را مجموعه هم‌رده‌های راست H در G می‌نامیم. تعداد هم‌رده‌های راست H در G را با نماد $[G:H]$ نشان داده و به آن شاخص H در G می‌گوییم.

تعریف ۹.۲.۱.

فرض کنید H زیرگروه نرمال G است. مجموعه تمام هم‌رده‌های چپ $\{aH \mid a \in G\}$ را با نماد G/H نشان داده، عمل $*$ را روی G/H به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall aH, bH \in G/H \cdot \quad (aH) * (bH) = abH.$$

تعریف ۱۰.۲.۱.

فرض کنید p عددی اول است. گروه G را یک p- گروه نامند هرگاه مرتبه هر عضو G توانی از p باشد. زیرگروه H از گروه G را یک p- زیرگروه نامند هرگاه H یک p- گروه باشد. گروه E را یک p- گروه آبلی مقدماتی نامیم هرگاه E گروهی آبلی و مرتبه هر عضو آن p باشد.

مثال ۱۱.۲.۱.

گروه $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یک ۲- گروه است.

تعریف ۱۲.۲.۱.

فرض کنید G گروهی متناهی و p عددی اول است. زیرگروه P از G را یک p- زیرگروه سیلوی G نامند، هرگاه P یک p- زیرگروه بوده و به طور سره مشمول در p- زیرگروه دیگری از G نباشد. به عبارت دیگر P یک p- زیرگروه ماکسیمال باشد.

قضیه ۱۳.۲.۱. (قضیه اول سیلو)

فرض کنید G گروهی متناهی از مرتبه $p^r m$ است که در آن p عددی اول، m و r، اعداد

صحیح مثبت و p و m نسبت به هم اول هستند. در این صورت به ازای هر k که $0 \leq k \leq r$، G دارای زیرگروهی از مرتبه p^k است.

اثبات. به [۲، قضیه ۱.۵] مراجعه شود. □

تعریف ۱۴.۲.۱.

یک عمل از یک گروه G روی یک مجموعه‌ی Ω، نگاشتی است چون $*$ از $\Omega \times G$ به Ω به طوری که

الف) برای هر $\alpha \in \Omega$، $(\alpha, 1_G)* = \alpha$،

ب) برای هر $\alpha \in \Omega$ و هر $g, h \in G$، $((\alpha, g)*, h)* = (\alpha, gh)*$.

به جای نماد $(\alpha, g)*$ از نماد α^g استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱۵.۲.۱.

فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل کند. اگر برای $\alpha \in \Omega$ و $g \in G$ داشته باشیم $\alpha^g = \alpha$، گوییم g، α را ثابت نگه می‌دارد. مجموعه‌ی عضوهایی از G که هر $\alpha \in \Omega$ را ثابت نگه می‌دارد هسته عمل نامیده می‌شود.

مثال ۱۶.۲.۱.

فرض کنید G یک گروه و N زیرگروه نرمال آن است. در این‌صورت G به روش زیر روی N عمل می‌کند:

$$\forall n \in N,\ g \in G \quad n^g = g^{-1}ng$$

زیرا:

$$\forall n \in N \quad n^1 = 1n1 = n,$$

$$\forall n \in N, \forall g, h \in G \quad (n^g)^h = (g^{-1}ng)^h = h^{-1}g^{-1}ngh = (gh)^{-1}ngh = n^{gh}.$$

در این حالت می‌گوییم G روی N به صورت تزویج عمل می‌کند.

تعریف ۱۷.۲.۱.

فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل کند. به‌ازای هر $\omega \in \Omega$ پایدارساز ω در G را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_\omega := \{g \in G \mid \omega^g = \omega\}$$

قضیه ۱۸.۲.۱.

فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل کند. در این صورت $G_\omega \leq G$.

اثبات. چون برای $\omega \in \Omega$ داریم $\omega = \omega^{1}$، پس $1 \in G_\omega$، و در نتیجه $G_\omega \neq \emptyset$ (نماد $\emptyset$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی تهی است). حال برای $g, h \in G_\omega$ داریم $\omega^g = \omega$ و $\omega^h = \omega$. بنابراین $\omega^{g^{-1}} = \omega$ و در نتیجه $\omega^{g^{-1}h} = (\omega^{g^{-1}})^h = \omega^h = \omega$ بنابراین $g^{-1}h \in G_\omega$، بنابراین G_ω زیرگروهی از G است. $\square$

تعریف ۱۹.۲.۱.

فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل کند و $X \subseteq \Omega$. دراین‌صورت دو نوع پایدارساز X روی G تعریف می‌شود:

۱) پایدارساز نقطه‌به‌نقطه X که به‌صورت زیر است:

$$G_{[X]} := \{g \in G \mid \forall x \in X \quad x^g = x\}$$

۲) پایدارساز مجموعه‌ای X که به‌صورت زیر است:

$$G_{(X)} := \{g \in G \mid \forall x \in X \quad x^g \in X\}$$

قابل ذکر است که پایدارسازهای نقطه‌به‌نقطه و مجموعه‌ای X زیرگروه‌هایی از G هستند.

هرگاه $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ آنگاه می‌نویسیم:

$$G_{[X]} = G_{[a_1,a_2,\cdots,a_n]}, G_{(X)} = G_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)}.$$

مثال ۱.۲.۲۰.

گروه $S_۴$ را در نظر می‌گیریم، این گروه روی مجموعه‌ی $\Omega = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به روش زیر عمل می‌کند:

$$\forall \omega \in \Omega,\ \forall g \in S_۴\ \omega^g := g(\omega).$$

حال زیرمجموعه‌ی $X = \{۱, ۲\}$ از Ω را در نظر می‌گیریم. به سادگی دیده می‌شود که:

$$S_{۴[۱,۲]} = \{i, (۳۴)\},\ S_{۴(۱,۲)} = \{i, (۱\ ۲), (۳\ ۴), (۱\ ۲)(۳\ ۴)\}.$$

تعریف ۱.۲.۲۱.

فرض کنید گروه G روی مجموعه Ω عمل کند. برای هر $\omega \in \Omega$ مدار ω به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta(\omega) = \{\omega^g \mid g \in G\}$$

به ازای مجموعه Ω و گروه جایگشتی X، مجموعه مدارهای X روی Ω را با $orb(X, \Omega)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲۲.

فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل کند. در این صورت عمل G روی Ω انتقالی نامیده می‌شود، هرگاه G تنها دارای یک مدار باشد، یعنی

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega\ \ \exists g \in G : \alpha^g = \beta.$$

قضیه ۱.۲.۲۳.

فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل کند. آن‌گاه G روی هر یک از مدارهای خود به طور انتقالی عمل می کند.

اثبات. به [۱۲، قضیه ۱.۸] مراجعه شود. □

قضیه ۲۴.۲.۱.

فرض کنید گروه متناهی G روی مجموعه‌ی Ω به طور انتقالی عمل کند. آن‌گاه

$$|G| = |G_\omega| \times |\Omega| \quad \forall \omega \in \Omega.$$

اثبات. به [۱۲، قضیه ۳.۸] مراجعه شود. □

نتیجه ۲۵.۲.۱. فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل کند و $\Delta \subseteq \Omega$ مداری از این عمل است. آن‌گاه

$$|G| = |G_\omega| \times |\Delta| \quad \forall \omega \in \Omega.$$

هم‌چنین به ازای تمام $\omega,\ \omega' \in \Delta$، گروه‌های G_ω و $G_{\omega'}$ مزدوجند.

اثبات. به [۱۲، نتیجه ۲.۸] مراجعه شود. □

نتیجه ۲۶.۲.۱.

فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی Ω به طور انتقالی عمل کند و H زیرگروهی از G است. برای هر $\alpha \in \Omega$، عمل H روی Ω انتقالی است اگر و تنها اگر $G = HG_\alpha = G_\alpha H$.

اثبات. ابتدا فرض کنید $G = HG_\alpha = G_\alpha H$، نشان می‌دهیم به ازای هر $\alpha, \beta \in \Omega$، $h_\circ \in H$ وجود دارد به طوری که $\alpha^{h_\circ} = \beta$. چون G روی Ω انتقالی است، $g_\circ \in G$ وجود دارد به طوری که $\alpha^{g_\circ} = \beta$. چون $G = G_\alpha H$ و $g_\circ \in G$، بنابراین $g_1 \in G_\alpha$ و $h_1 \in H$ وجود دارد به طوری که $g_\circ = g_1 h_1$. داریم $\beta = \alpha^{g_\circ} = \alpha^{g_1 h_1} = \alpha^{h_1}$، در این صورت $h_\circ = h_1$ و در نتیجه H روی Ω انتقالی است.

برعکس، فرض کنید H روی Ω انتقالی است. اگر $\alpha \in \Omega$ و $g \in G$ دلخواه باشد به طوری که $\alpha^g = \gamma$. چون H روی Ω انتقالی است، $h_\circ \in H$ وجود دارد به طوری که $\alpha^{h_\circ} = \gamma$، بنابراین $\alpha^{h_\circ} = \alpha^g$ و در نتیجه $\alpha^{h_\circ^{-1} g} = \alpha$، پس $h_\circ^{-1} g \in G_\alpha$ در نتیجه

$g' \in G_\alpha$ وجود دارد به طوری که $h_\circ^{-1} g = g'$ بنابراین $g = h_\circ g' \in HG_\alpha$ پس $G \leqslant HG_\alpha$،
از طرفی $HG_\alpha \leqslant G$ و در نتیجه $G = HG_\alpha$. □

تعریف ۲۷.۲.۱.

گروه G روی مجموعه‌ی Ω به طور k- انتقالی عمل می‌کند هرگاه $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ و $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ دو k–تایی دلخواه باشند که $\alpha_i, \beta_i \in \Omega$، $\alpha_i \neq \alpha_j$ و $\beta_i \neq \beta_j$، آنگاه $g \in G$ موجود باشد به طوری که $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)^g = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$.

تعریف ۲۸.۲.۱.

گروه جایگشتی انتقالی G، شبه‌اولیه نامیده می‌شود، اگر هر زیرگروه نرمال آن انتقالی باشد. هم چنین G دوشبه‌اولیه نامیده می‌شود، اگر هر زیرگروه نرمال غیربدیهی آن دارای حداکثر دو مدار و حداقل دارای یک زیرگروه نرمال غیرانتقالی و غیربدیهی باشد.

تعریف ۲۹.۲.۱.

فرض کنید G یک گروه و N زیرگروه نرمال G است. در این صورت H را زیرگروه نرمال مینیمال G گوییم هرگاه اگر $N \trianglelefteq G$ و $1 \leq N \leq H$ آنگاه $N = 1$ یا $N = H$.

تعریف ۳۰.۲.۱.

فرض کنید G یک گروه است. زیرگروه M از G، یک زیرگروه ماکسیمال G نامیده می‌شود هرگاه $M \neq G$ و اگر $M \subseteq N \subseteq G$ آن‌گاه $N = M$ یا $N = G$.

تعریف ۳۱.۲.۱.

فرض کنید H زیرگروهی از گروه G و $a \in G$. در این صورت $a^{-1}Ha$ زیرگروهی از G است، که مزدوج H نامیده می‌شود.

تعریف ۳۲.۲.۱.

فرض کنید H و K دو گروه و $\phi : K \to Aut(H)$ یک همریختی است. هم‌چنین فرض

کنید $H \rtimes K$ مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب $(h,k) \in H \times K$ است که در آن قانون ترکیب زیر تعریف شده است:

$$(h_1,k_1)(h_2,k_2) = (h_1\phi_{k_1}(h_2), k_1k_2), \ \ \forall h_1,\ h_2 \in H,\ \forall k_1,\ k_2 \in K.$$

در این صورت $H \rtimes K$ با قانون ترکیب فوق دارای ساختار یک گروه است که به آن ضرب نیم مستقیم H توسط K با عمل ϕ گفته می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳۳.

گروه $G = H \rtimes K$ دارای زیرگروه‌های $H^* \cong H$ و $K^* \cong K$ است به طوری که $H^* \lhd G$ و $H^* \cap K^* = \{e\}$ و $G = H^*K^*$. پس G حاصل ضرب نیم مستقیم H^* توسط K^* است.

اثبات. به [۱۲، قضیه ۵.۱۰] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۳۴.

فرض کنید G روی Ω به طور انتقالی عمل کند. در این صورت برای هر عدد صحیح و مثبت k، G روی حاصل‌ضرب $\Omega^k = \Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega$ عملی القا می‌کند که به صورت $\alpha^g := (\alpha_1^g, \alpha_2^g, \ldots, \alpha_k^g)$ برای هر $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \Omega^k$ و هر $g \in G$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۲.۳۵.

یک رابطه‌ی k- آرایه‌ای ρ روی Ω یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از Ω^k است. یک رابطه‌ی k- آرایه‌ای ρ روی Ω، G- ناوردا یا حفظ شده به وسیله‌ی G نامیده می‌شود هرگاه برای هر $g \in G$ داشته باشیم $\rho^g = \rho$. (یک رابطه‌ی ۲- آرایه‌ای، رابطه‌ی دوتایی نیز نامیده می‌شود.)

ما حالت $k = ۲$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که رابطه‌های می‌نیمال (می‌نیمال نسبت به شمول) که G- ناوردا هستند همان G- مدارها در Ω^2 هستند. این G- مدارها در