بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

زیر مدول های اول L- فازی

از

کیانوش ابراهیمی لختکی

استاد راهنما

پرفسور شهاب الدین ابراهیمی آتانی

تیر ۸۸

تقدیم به

مادر مهربان و پدر دلسوزم

به پاس تمام فداکاری ها

و برادرزاده عزیزم

کیانا

تشکر وقدردانی

حمد وسپاس بی پایان خداوند متعال که توفیق اتجام این پژوهش را به من ارزانی داشت. برخود لازم می دانم از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای پرفسور شهاب الدین ابراهیمی که انجام این تحقیق بدون راهنمایی های علمی و مساعدت همه جانبه ایشان امکان پذیر نبود، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر حبیب الله انصاری و جناب آقای دکتر فرهاد درستکار که به عنوان داور، زحمت بازخوانی پایان نامه را به عهده داشته و نظرات ارزنده ای در هر چه بهتر شدن آن ارایه نموده اند سپاسگزارم.

وهمچنین از زحمات مدیر محترم گروه ریاضی جناب آقای دکتر عباسی کمال تشکر را دارم.

در پایان ازکلیه عزیزانی که به هرنحوی در جهت پیشبرداین پژوهش گام برداشته اند به ویژه دوست عزیزم شهریارسلمانی پور کمال تشکر و قدردانی را داشته و موفقیت روز افزون این عزیزان را از خداوند منان خواستارم.

فهرست مطالب

چکیده

زیر مدول های L- فازی اول

کیانوش ابراهیمی لختکی

فرض کنید R یک حلقه جابجایی با همانی و L یک شبکه کامل باشد. ما مفهوم زیر مدول L- فازی اول از R- مـدول M را مورد مطالعه قرار می دهیم و تعریفی از آن ارائه می دهیم. وهمچنین رفتار زیر مدول های L- فازی اول را تحت بروریختی مدولی مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

کلید واژه: زیر مدول های L- فازی، زیر مدول های L- فازی اول، R- مدول L- فازی.

Abstract

On L-fuzzy prime submodules
Kianoush Ebrahimi Lakhtaki

Let R be a commutative ring with identity and L be a complete lattice. we study about the concept of L-fuzzy prime submodule of R-module M and give its definition.
And the behaviour of L-fuzzy prime submodules under R-module epimorphisms will be considered.

Key word: L-fuzzy submodule, L-fuzzy prime submodule, R-module L-fuzzy.

مقدمه

تئوری فازی اولین بار در سال ۱۹٦۵ توسط Lotfi Zadeh در مقاله ای تحت عنوان "مجموعه های فازی" معرفی گردید. مقاله اصلی او در آن سال، بینشی جدید و کاربرد های فراوانی را در حوزه وسیعی از زمینه های علمی باز کرد.

Lotfi Zadeh نظریه زیر مجموعه فازی μ از یک مجموعه غیر تهی X را به عنوان یک تابع از X به توی $[0,1]$ معرفی کرد. J.A.Goguen در سال۱۹٦۷ مفهوم زیر مجموعه فازی از X را به زیر مجموعه L- فازی از X تعمیم داد که در آن L یک شبکه کامل می باشد. سپس در سال ۱۹۷۱ ، Azriel Rosenfeld با استفاده از نظریه زیر مجموعه های فازی مقاله های بنیادی زیادی را در زمینه های مختلف ریاضیات از جمله روی ساختارهای جبری ارائه کرد ، در واقع Rosenfeld را پدر جبر فازی می نامند.

W.J.Liu در ۱۹۸۳ مفهوم یک ایده ال فازی از یک حلقه را معرفی و بررسی کرد. بعد از آن چندین نویسنده نتایج جالبی روی ایده ال های L- فازی از حلقه R و مدول های L- فازی بدست آوردند که از جمله آن V.Murali و B.B.Makamba بودند که در سال ۲۰۰۰ مفهومی از زیر مدول های فازی اول از R- مدول M را روی بازه $[0,1]$ ارائه کردند. در این پایان نامه مفهوم زیر مدول L- فازی اول از R-مدول M و قضایای اساسی در این زمینه بیان می شود، همچنین یک تعریف از زیر مدول L- فازی اول نشان داده می شود ودر ادامه رفتار آن تحت یک بروریختی مدولی بررسی خواهد شد.

این پایان نامه بر مبنای مرجع [1] می باشد و شامل چهار فصل است که در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز فصلهای بعدی را بیان می کنیم.در فصل دوم مفهوم زیر مجموعه های L- فازی و خواص آن را بیان کرده و رفتار آن را تحت همریختی مجموعه ها نشان می دهیم، در ادامه فصل زیر گروههای L-فازی و زیر گروههای L- فازی نرمال و رابطه آنها را با همریختی گروهها بررسی می کنیم.

در فصل سوم با تعریف ایده ال L- فازی و R- مدول L- فازی آشنا می شویم و خاصیت اساسی بین آنها را وقتی که L یک شبکه کامل باشد که در قانون پخشی نامتناهی صدق می کند، بیان می شود. همچنین رابطه بین R-مدول L- فازی از M و زیر مدول های M که در آن M یک R- مدول است ، نشان داده می شود.

در فصل آخر مفهوم زیر مدول L- فازی اول و رابطه آن با ایده ال L- فازی اول وقتی که R یک مدول روی خودش باشد را بیان می کنیم. همچنین رابطه بین زیر مدول L- فازی اول از M و زیر مدول های اول M نشان داده می شود، در پایان رفتار زیر مدول های L- فازی اول از M تحت همریختی های مدولی مورد مطالعه قرار می گیرد.

فصل اول

مقدمات و مطالب پیشنیاز

مقدمات و مطالب پیشنیاز

تعریف ۱-۱: فرض کنیم A مجموعه ای ناتهی باشد. رابطه $\leq$ را یک ترتیب جزئی روی A می نامیم اگر در سه شرط زیر صدق کند:

الف) بازتابی باشد؛ به ازای هر $a \in A$ در اینصورت $a \leq a$.

ب) پاد متقارن باشد؛ به ازای هر $a, b \in A$ ، اگر $b \leq a, a \leq b$ آنگاه $a = b$.

ج) متعدی باشد؛ به ازای هر $a, b, c \in A$ اگر $b \leq c, a \leq b$ آنگاه $a \leq c$.

اگر $\leq$ یک ترتیب جزئی روی A باشد گوئیم که $(A, \leq)$ یک مجموعه جزأ مرتب است.[٤]

تذکر ۱-۲: فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه جزأ مرتب باشد. در اینصورت هر زیر مجموعه ناتهی B از A خود با رابطه $\leq$ یک مجموعه جزأ مرتب است. .[٤]

تعریف ۱-۳: فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه جزا مرتب باشد. عنصرهای $a,b \in A$ را مقایسه پذیر گویند هرگاه $a \leq b$ یا $b \leq a$. دو عنصر یک مجموعه جزأ مرتب لزوماً مقایسه پذیر نیستند.

تعریف ۱-٤: اگر هر دو عنصر مجموعه جزأ مرتب $(A, \leq)$ مقایسه پذیر باشند آنگاه آن یک مجموعه مرتب کلی نامیده می شود.

تعریف ۱-۵: فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه جزأ مرتب باشد و $\phi \neq B \subseteq A$ آنگاه

۱) عنصر $a \in B$ را عنصر ماکسیمم B گویند هرگاه به ازای هر $x \in B$ ، $x \leq a$ و آنرا با نماد max نمایش می دهیم.

۲) عنصر $b \in B$ را عنصر مینیمم B گویند هرگاه به ازای هر $x \in B$ ، $b \leq x$ و آنرا با نماد min نمایش می دهیم.

۳) عنصر $c \in B$ را عنصر ماکسیمال B گویند هرگاه بعد از c عنصری نیاید یعنی اگر $c \leq a$ آنگاه $c = a$.

٤) عنصر $d \in B$ را عنصر مینیمال B گویند هرگاه قبل از d عنصری نیاید یعنی اگر $e \leq d$ آنگاه $e = d$.

۵) عنصر $e \in A$ را یک کران بالای B گویند هرگاه به ازای هر $x \in B$، $x \leq e$ بعلاوه کوچکترین کران بالای B را سوپریمم B گویند و با نماد sup نشان می دهیم. یعنی e سوپریمم B می باشد اگر z یک کران بالایی دلخواه برای B باشد آنگاه $e \leq z$.

۶) عنصر $h \in A$ را یک کران پائینی B گویند هرگاه به ازای هر $x \in B$ ، $h \le x$ بعلاوه بزرگترین کران پـائینی B را اینفیموم B گویند و با نماد inf نشان می دهیم. یعنی h اینفیموم B می باشد اگر L یـک کـران پـائینی دلخـواه بـرای B باشد آنگاه $L \le h$.

۷) هر زیر مجموعه غیر خالی A که عناصرش مقایسه پذیر باشند را یک زنجیر A گویند.

تعریف ۱-۶: مجموعه جزا مرتـب $(A,\le)$ را یـک شـبکه گوینـد هـر گـاه بـه ازای هـر $a,b \in A$ ، مجموعـه $\{a,b\}$ بزرگترین کران پائین یا inf و کوچکترین کران بالا یا sup داشته باشد.[۱و۷]

تعریف ۱-۷: شبکه $(A,\le)$ را کامل گویند اگر هر زیر مجموعه ناتهی A ، inf و sup داشته باشد.

مثال ۱-۸: بازه بسته $[\circ,۱]$ با اعمال min ، max، $\le$ به شکل یک شبکه کامل می باشد.

تذکر: ۱-۹: در ادامه ما از نماد $\wedge$ برای نمایش اینفیموم یا inf و از نماد $\vee$ برای نمایش سوپریمم یا sup استفاده می کنیم و به این صورت نشان می دهیم.

$$Sup\{x,y\}=x\vee y$$
$$\inf\{x,y\}=x\wedge y$$

تعریف ۱-۱۰: فرض کنید $(L,\le)$ یک شبکه کامل باشد. در این صورت سوپریمم و اینفیموم L را به ترتیب بـا نمـاد ۱ و ∘ نشان می دهیم.

مثال ۱-۱۱: فرض کنید A یک مجموعه باشد و $p(A)$ مجموعه توان آن باشد.رابطه $\le$ را در $p(A)$ چنین تعریف می کنیم:

$$C\le D \Leftrightarrow C\subseteq D$$

بسادگی دیده می شود که $(p(A),\le)$ یک مجموعه جزا مرتب است.

بعلاوه به ازای هر دو عنصر C,D از $p(A)$،

$$C\vee D=Sup\{C,D\}=C\bigcup D \quad , \quad C\wedge D=\inf\{C,D\}=C\bigcap D$$

بعلاوه

$$\inf p(A)=\bigcap_{C\subseteq A} C=\phi=\circ \quad , \quad Sup\ p(A)=\bigcup_{C\subseteq A} C=A=۱$$

مثلاً در $([\circ,۱],\le)$ ، عنصر صفر اینفیموم و عنصر ۱ سوپریمم می باشد.

تعریف ۱-۱۲: فرض می کنیم G یک مجموعه غیر تهی باشد آنگاه G همراه با عمل دو تایی * یک گروه است هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) تحت عمل * بسته باشد. به ازای هر $a,b \in G$، $a*b \in G$.

ب) شرکت پذیر باشد. به ازای هر $a,b,c \in G$، $a*(b*c)=(a*b)*c$.

ج) عنصر همانی داشته باشد که ان را با نماد e نمایش می دهیم. به ازای هر $a \in G$ ، $a*e=e*a=a$.

د) عنصر معکوس داشته باشد که آن را با نماد a^{-1} نمایش می دهیم. به ازای هر $a \in G$، عضوی مانند a^{-1} وجود داشته باشد به طوری که $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

در اینصورت $(G,*)$ را یک گروه می نامیم.

$(G,*)$ یک گروه آبلی می باشد هر گاه به ازای هر $a,b \in G$ ، $a*b=b*a$.[٤]

تعریف ۱-۱۳: اگر G یک گروه و H یک زیر مجموعه غیر تهی از G باشد آنگاه H زیر گروهی از G می باشد اگر و فقط اگر به ازای هر $a,b \in H$ ، $ab^{-1} \in H$.

تعریف ۱-۱٤: فرض می کنیم R یک مجموعه غیر تهی باشد. R به همراه دو عمل دوتایی + و · یک حلقه نامیده می شود هرگاه $(R,+)$ تشکیل یک گروه آبلی را بدهد و $(R,\cdot)$ بسته و شرکت پذیر باشد و عمل ضرب نسبت به عمل جمع از چپ به راست خاصیت پخشی داشته باشد یعنی در شرایط زیر صدق کند:

(1) نسبت به جمع بسته باشد. به ازای هر $x,y \in R$ ، $x+y \in R$.

(2) عنصر همانی جمعی داشته باشد که با نماد $\circ_R$ نمایش می دهیم.

(3) عنصر وارون جمعی داشته باشد. به ازای هر $x \in R$ عنصری مانند $-x$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$x+(-x)=\circ_R$$

(4) شرکت پذیر هم باشد. به ازای هر $x,y,z \in R$، $(x+y)+z=x+(y+z)$.

(5) به ازای هر $x,y \in R$ ، $x+y=y+x$

(6) نسبت به ضرب بسته باشد. به ازای هر $x,y \in R$، $x.y \in R$.

(7) نسبت به ضرب شرکت پذیر نیز باشد. به ازای هر $x,y,z \in R$، $x.(y.z)=(x.y).z$

(8) عمل ضرب نسبت به عمل جمع از چپ به راست خاصیت پخشی داشته باشد. به ازای هر $x, y, z \in R$،

$$x.(y+z)=x.y+x.z \qquad (y+z)x=yx+zx$$

در اینصورت $(R,+,\cdot)$ را یک حلقه می نامیم. [٤].

تذکر ١–١٥: حلقه $(R,+,\cdot)$را یکدار می نامیم هرگاه $(R,\cdot)$ دارای عنصر همانی باشد.

تعریف ١–١٦: فرض R یک حلقه و I یک زیر مجموعه ناتهی از R باشد.در این صورت I را یک ایده آل چپ R می نامیم هر گاه به ازای هر $x, y \in I$ و هر $r \in R$،داشته باشیم: $x-I\in y$ و $rx \in I$.

و آن را ایده آل راست می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in I$ و هر $r \in R$،داشته باشیم: $x-I\in y$ و $xr \in I$.

I را یک ایده ال می نامیم هرگاه هم ایده ال راست و هم ایده ال چپ R باشد.

تعریف ١–١٧: فرض کنید R یک حلقه یکدار و M یک گروه جمعی باشد. M را یک R- مدول چپ گویند هرگاه تابعی چون $R\times M \to M$ با قانون $(r,m)\to r.m$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $r,r'\in R$ وهر $m,m'\in M$ داشته باشیم:

١) $r(m+m')=rm+rm'$

٢) $(r+r')m=rm+r'm$

٣) $(rr')m=r(r'm)$

٤) $1_R m=m$

تعریف ١–١٨: فرض کنید N یک زیر مجموعه غیر تهی از R- مدول M باشد. N را یک زیر مدول M گویند هرگاه N خود با اعمال M تشکیل مدول دهد.

تعریف ١–١٩: فرض کنید L یک شبکه کامل باشد. عنصر $\alpha \neq 1$ متعلق به L را یک عنصر اول در L می نامیم اگر به ازای تمام $a,b\in L$، $a\wedge b\le\alpha$ آنگاه نتیجه شود یا $a\le\alpha$ یا $b\le\alpha$.[١و٧]

تعریف ١–٢٠: فرض کنید I یک ایده ال سره R باشد. I را یک ایده ال اول R می نامیم اگر به ازای هر $a,b\in R$، $ab\in I$ آنگاه نتیجه شود یا $a\in I$ یا $b\in I$.[٤]

تعریف ۱-۲۱: فرض کنید N یک زیر مدول سره M باشد. N را یک زیر مدول اول M می‌نامیم اگر به ازای هـر $r \in R$، $m \in M$ ، $rm \in N$ آنگاه نتیجه شود یا $m \in N$ یا $rM \subseteq N$.

تعریف ۱-۲۲: فرض کنید M یک مدول و $N \neq M$ زیر مدولی از آن باشد.مدول خارج قسمتی $\frac{M}{N}$ را به صورت زیـر تعریف می کنیم:

$$\frac{M}{N} = \{x + N \mid x \in M\}$$

تعریف ۱-۲۳: فرض کنید M و N دو R-مدول و f یک همریختی از M به توی N باشد.در اینصورت هسته f را با نماد $kerf$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$kerf = \{x \in M \mid f(x) = e_N\}$$

فصل دوم

زیر مجموعه ها و زیر گروههای L- فازی

زیر مجموعه ها و زیر گروههای L- فازی

۲-۱ مقدمه

در این فصل با مفهوم زیر مجموعه های L- فازی و برخی از خواص آن آشنا می شویم و رفتار آن را تحت همریختی مجموعه ها نشان می دهیم. در ادامه زیر گروههای L- فازی و زیر گروههای L- فازی توأم را از گروه ضربی G بیان کرده و سپس بعد از تعریف زیر گروه L- فازی نرمال ، رفتار آنها را روی بروریختی گروهها بررسی می کنیم .

۲-۲ زیر مجموعه های L- فازی

تعریف ۲-۲-۱: فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی و L یک شبکه کامل باشند. تابع μ از X به L را یک زیر مجموعه L- فازی گویند.

مجموعه تمام زیر مجموعه های L- فازی از X را با $F(X)$ نمایش می دهیم و آن را مجموعه توانی L- فازی از X می نامیم. وقتی L بازه بسته $[0,1]$ باشد ان را زیر مجموعه های فازی می نامیم. و آن رابا نماد $F\left([0,1]\right)$ نشان می دهیم.[۷و۹]

تعریف ۲-۲-۲: فرض کنید $\mu \in F\left(X\right)$،

۱)مجموعه $\left\{\mu\left(x\right) | x \in X\right\}$ $\operatorname{Im}\mu =$ را تصویر X تحت μ می نامیم.

۲)مجموعه $\left\{x \mid x \in X,\ \ \mu\left(x\right) > 0\right\}$ را تکیه گاه μ می نامیم و با نماد μ^* نمایش می دهیم.

۳) μ را یک زیر مجموعه L- فازی متناهی گویند هرگاه μ^* یک مجموعه متناهی باشد در غیر این صورت آن را نامتناهی می نامیم.

تعریف ۲-۲-۳: فرض کنید $\mu,\nu \in F\left(X\right)$. گوئیم μ در ν مشمول است و آن را با نماد $\mu \subseteq \nu$ نمایش می دهیم اگر به ازای هر $x \in X$ آنگاه $\mu\left(x\right) \le \nu\left(x\right)$. بعلاوه اگر $\mu \subseteq \nu$ ولی $\mu \neq \nu$ آنگاه μ در ν مشمول محض می‌باشد و آن را با نماد $\mu \subset \nu$ نشان می دهیم.

تعریف ۲-۲-٤: فرض کنید $\mu,\nu \in F\left(X\right)$،

۱) اجتماع μ و ν را با نماد $\mu \cup \nu$ نمایش می‌دهیم و. به صورت زیر تعریف می شود:

به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم : $\left(\mu \cup \nu\right)\left(x\right) = \mu\left(x\right) \vee \nu\left(x\right)$

۲) اشتراک μ و ν را با نماد $\mu \cap \nu$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود:

به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم: $(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$

تذکر ۲-۲-۵: فرض کنید I یک مجموعه اندیسگذار غیر خالی و $\{\mu_i \mid i \in I\}$ یک خانواده از زیر مجموعه های L-فازی از X باشد، در این صورت به ازای هر $x \in X$،

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i\right)(x) = \bigvee_{i \in I} \mu_i(x)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x)$$

بخصوص اگر $I = \{1, 2, \dots, n\}$ آنگاه داریم:

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i\right)(x) = \left(\bigcup_{i \in I}^{n} \mu_i\right)(x) = \mu_1(x) \vee \dots \vee \mu_n(x)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)(x) = \left(\bigcap_{i \in I}^{n} \mu_i\right)(x) = \mu_1(x) \wedge \dots \wedge \mu_n(x)$$

تعریف ۲-۲-۶: فرض کنید $\mu \in F(X)$ و $a \in L$. برش a تحت μ را که با نماد μ_a نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mu_a = \{x \in X \mid \mu(x) \geq a\}$$

۲-۳ خواص زیر مجموعه های L- فازی

قضیه ۲-۳-۱: فرض کنید $\mu, \nu \in F(X)$ و $a, b \in L$ داریم:

الف) اگر $\mu \subseteq \nu$ انگاه $\mu_a \subseteq \nu_a$ می باشد.

ب) اگر $a \leq b$ آنگاه $\mu_b \subseteq \mu_a$ می باشد.

پ) $\mu = \nu$ اگر و فقط اگر به ازای هر $a \in L$، $\mu_a = \nu_a$.

برهان الف) فرض کنید $x \in \mu_a$. در اینصورت $\mu(x) \geq a$ وازآنجائیکه $\mu \subseteq \nu$، بنابرین $\nu(x) \geq a$.

در نتیجه $x \in \nu_a$. پس $\mu_a \subseteq \nu_a$.

برهان ب) فرض کنید $x \in \mu_b$. دراین صورت $\mu(x) \geq b$. در نتیجه $\mu(x) \geq a$ و $x \in \mu_a$. پس $\mu_b \subseteq \mu_a$.

برهان پ) فرض کنید $\mu=\nu$. در این صورت بنا به (الف) همین قضیه بـه ازای هـر $a\in L$، $\mu_a \subseteq \nu_a$ و $\nu_a \subseteq \mu_a$. در نتیجه به ازای هر $a\in L$، $\mu_a=\nu_a$.

برعکس: فرض کنید به ازای هر $a\in L$، $\mu_a=\nu_a$.

فرض کنید $t\in X$ دلخواه باشد و $\mu(t)=a_1$ در این صورت

$$t\in \mu_{a_1}=\{x\in X \mid \mu(x)\geq a_1\}$$

حال چون $\mu_{a_1}=\nu_{a_1}$ پس $t\in \nu_{a_1}$. از این رو

$$t\in \nu_{a_1}=\{x\in X \mid \nu(x)\geq a_1\}$$

بنابراین $\nu(t)\geq a_1=\mu(t)$. در نتیجه $\nu(t)\geq \mu(t)$.

مشابهاً اگر $\nu(t)=a_2$. در این صورت

$$t\in \nu_{a_2}=\{x\in X \mid \nu(x)\geq a_2\}$$

حال چون $\mu_{a_2}=\nu_{a_2}$. پس $t\in \mu_{a_2}$. از این رو

$$t\in \mu_{a_2}=\{x\in X \mid \mu(x)\geq a_2\}$$

بنابراین $\mu(t)\geq a_2=\nu(t)$. در نتیجه $\mu(t)\geq \nu(t)$.

پس داریم $\mu(t)=\nu(t)$. وازآنجائیکه t دلخواه بود بنابراین $\mu=\nu$.

قضیه ۲-۳-۲: فرض کنید $\{\mu_i \mid i\in I\}\subseteq F(X)$ خانواده‌ای از زیـر مجموعـه هـای $L-$فـازی از X باشـند. در ایـن صورت به ازای هر $a\in L$ داریم:

الف) $\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq \left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)_a$؛

ب) $\bigcap_{i\in I}(\mu_i)_a = \left(\bigcap_{i\in I}\mu_i\right)_a$.

برهان الف) فرض کنید $x\in \bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a$ در این صورت $i\in I$ هست به قسمی که $x\in(\mu_i)_a$، بنابراین $\mu_i(x)\geq a$.

حال می توان نتیجه گرفت که $\bigcup_{i\in I}\mu_i(x)\geq a$ پس $x\in\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)_a$ در نتیجه داریم:

$$\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq \left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)_a.$$

برهان ب) فرض کنید $x \in \bigcap_{i \in I} (\mu_i)_a$. در این صورت به ازای هر $i \in I$، $x \in (\mu_i)_a$ بنابراین $\mu_i(x) \geq a$. حال می توان نتیجه گرفت که $\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)(x) \geq a$ پس $x \in \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)_a$ در نتیجه داریم:

$$\bigcap_{i \in I} (\mu_i)_a \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)_a.$$

برعکس: فرض کنید $x \in \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)_a$. بنابراین $\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)(x) \geq a$. در نتیجه به ازای هر $i \in I$، $\mu_i(x) \geq a$ همچنین به ازای هر $i \in I$، $x \in (\mu_i)_a$. در این صورت $x \in \bigcap_{i \in I} (\mu_i)_a$ و در نتیجه داریم:

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)_a \subseteq \bigcap_{i \in I} (\mu_i)_a،$$

بنابراین حکم برقرار است یعنی $\bigcap_{i \in I} (\mu_i)_a = \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)_a$.

تذکر ۲-۳-۳: وقتی L یک زنجیر متناهی باشد تساوی در الف برقرار است.

برهان: فرض کنید $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.بنا به فرض می توان a_iها را به صورت $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ در نظر گرفت. فرض کنید $x \in \left(\bigcup_{i \in I} \mu_i\right)_{a_j}$ به قسمی که $1 \leq j \leq n$. بنابراین به ازای هر $1 \leq j \leq n$، $\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i\right)(x) \geq a_j$. در اینصورت $i \in I$ هست به قسمی که به ازای هر $1 \leq j \leq n$، $\mu_i(x) \geq a_j$. در نتیجه برای هر $j = 1, \dots, n$ داریم: $x \in (\mu_i)_{a_j}$ که به روشنی می توان نتیجه گرفت که برای هر $j = 1, \dots, n$، $x \in \bigcup (\mu_i)_{a_j}$. بنابراین به ازای هر $1 \leq j \leq n$،

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i\right)_{a_j} \subseteq \bigcup_{i \in I} (\mu_i)_{a_j}$$

قضیه ۲-۳-٤: فرض کنید μ یک زیر مجموعه L- فازی از X و $\{a_i \mid i \in I\}$ یک زیر مجموعه غیر تهی از L باشد.

قرار می دهیم $b = \wedge_{i \in I} a_i$, $c = \vee_{i \in I} a_i$. در اینصورت:

الف) $\bigcup_{i \in I} \mu_{a_i} \subseteq \mu_b$؛

ب) $\bigcap_{i \in I} \mu_{a_i} = \mu_c$.