بسم الله الرحمن الرحيم

بررسی روش تکراری فوق تخفیف تسریع یافته

و

همگرایی و تعمیم آن برای دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b$$

توسط : سیروس قبادی

ارائه برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضیات کاربردی

دانشکدهٔ علوم

دانشگاه فردوسی مشهد

زیر نظر: خانم دکتر فائزه توتونیان

آذرماه ۱۳۷۳

شماره ....
تاریخ ....
پیوست ....

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکدهٔ علوم

بسمه تعالی

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای سیروس قبادی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی در ساعتِ ۸ صبح روزِ ۷۳/۹/۱۹ دراتاقِ شمارهٔ ۲۶ ساختمانِ خوارزمی دانشکدهٔ علوم ۲ باحضور امضاءکنندگان ذیل تشکیل‌گردید. پس‌از بررسی و نظر هیأت داوران، پایان‌نامه نامبرده بانمرهٔ ۱۹/۲۵ موردتأیید قرارگرفت.ت
(نوزده وبیست وپنج صدم)

عنوان رساله : " بررسی روش فوق تخفیف تسریع یافته وهمگرایی وتعمیم آن "

تعداد واحد : ۶ واحد

داور رساله : آقای دکتر محسنی
دانشیار گروه ریاضی ـ دانشگاه شهید باهنر کرمان

داور رساله : آقای دکتر اصغر کرایه چیان
استادیار گروه ریاضی ـ دانشگاه فردوسی مشهد

استاد راهنما : خانم دکتر فائزه توتونیان
دانشیار گروه ریاضی ـ دانشگاه فردوسی مشهد

مدیرگروه ریاضی : آقای دکتر اسداله نیکنام
دانشیار گروه ریاضی ـ دانشگاه فردوسی مشهد

تقدیم به:

همسر عزیزم، که از هیچ کوششی در راه رسیدن به اهدافم دریغ نکـــرد،

و

پدر و مادر مهربانم، که مشوقی دلسوز در تمام دوران تحصیلی‌ام بوده‌اند.

قدردانی و تشکر

اینک که به یاری خداوند متعال توفیق به پایان رساندن این رساله فراهم گشته است، وظیفهٔ خود می‌دانم که از راهنمائیهای پرارزش و بی‌شائبه خانم دکتر فائزه توتونیان که عهده‌دار هدایت این رساله بوده و در بثمر رساندن آن زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، صمیمانه قدردانی نمایم.

همچنین از آقایان دکتر کرایه‌چیان و دکتر محسنی که قبول زحمت فرموده و به عنوان داور در جلسه دفاعیه شرکت کرده‌اند کمال تشکر را دارم.

توفیقات روزافزون ایشان را از ایزد منان خواهانم.

سیروس قبادی

فهرست مطالب

فصل ۴: روش GAOR و MAOR

چکیده

روشهای تکراری در کنار روشهای مستقیم بوجود آمده‌اند و در مقایسه با آنها برای حل بسیاری از مسائل ریاضیات کاربردی و مسائل مشابه کاربرد وسیع‌تر و کاراتری دارند. از روشهای تکراری معروف می‌توان به روشهای ژاکوبی، گوس - سایدل و SOR اشاره کرد که کاربردهای فراوانی در علوم و مهندسی دارند.

روش ارائه شده در این پایان‌نامه یک تعمیم دوپارامتری از روش SOR، موسوم به AOR می‌باشد و در عمل نشان داده که از دیگر روشهای تکراری مشابه بهتر عمل میکند.

در این پایان‌نامه ابتدا چگونگی بدست آوردن این روش توضیح داده شده است سپس همگرایی آن در حالتی که ماتریس ضرایب دلخواه باشد بررسی شده و در حالت خاص یک کران خطا ارائه شده است. در ادامه، روش فوق را روی ماتریسهای بطور سازگار مرتب شده ، تحویل ناپذیر با تسلط قطری ضعیف، $L-$ماتریس و $M-$ماتریس، ماتریسهای با تسلط قطری اکید، ماتریسهای معین مثبت و متقارن و همچنین ماتریسهای هرمیتی و معین مثبت هرمیتی پیاده کرده و بازه‌های همگرایی را برای هر یک از این روشها بدست آوردیم.

در پایان، به بررسی اجمالی روش AOR برای تعدادی از ماتریسهای گفته شده بالا از دیدگاه برونیابی پرداختیم و روشهای GAOR و MAOR که تعمیم روش AOR هستند را معرفی کردیم.

۰-۱-مقدمه

در رشته‌های مختلف علوم و مهندسی اغلب به مسائلی برخورد می‌کنیم که حل آنها منجر به حل یک دستگاه معادلات خطی می‌شود که ماتریس ضرایب آن دارای ابعاد بسیار بزرگ بوده و تعداد صفرهای آن نیز بسیار زیاد است. برای نمونه به مساله زیر توجه کنید:

$$-\Delta^2 u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad , \qquad (x , y) \in \Omega$$

$$u(x , y) = g(x , y) \qquad , \qquad (x , y) \in \partial \Omega$$

که در آن g تابعی معلوم است و

$$\Omega \cup \partial\Omega = \{(x , y) : 0 \le x \le 1 \qquad , \qquad 0 \le y \le 1\}$$

اگر مساله فوق را از تفاضلات متناهی حل کنیم با توجه به نقاط شبکه در نظر گرفته شده، به دستگاههای خطی می‌رسیم که بعد ماتریس ضرایب آن بسته به نقاط شبکه می‌تواند خیلی بزرگ باشد حل اینگونه دستگاهها اغلب از روشهای مستقیم غیر ممکن است لذا میتوان از و روشهای تکراری مثل ژاکوبی، گوس - سایدل ، SOR روشهای وابسته استفاده کرد. در سال ۱۹۷۸ هاجیدیموس[۱] یونانی روش AOR که تعمیم دوپارامتری روش SOR است را برای حل دستگاههای خطی ارائه داد که روشهای تکراری قبلی حالت خاص آن می‌باشند. روش فوق بسیار انعطاف‌پذیر بوده و برای انواع ماتریسها قابل انجام است و در عمل نشان داده که از دیگر روشهای مشابه نتایج بهتر و دقیقتری در زمان کوتاهتر بدست می‌دهد.

۰-۲ *مروری بر رساله حاضر*

برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ ، در بخش ۱-۲ روش تکراری را پیشنهاد کردیم که در آن ماتریس تکرار، تابعی خطی از مولفه‌های A بوده و ضریب تکرار جدید یک ماتریس پائین مثلثی می‌باشد [3]. این روش که تعمیم دوپارامتری روش SOR می‌باشد، روش

1– Hadjidimos

AOR نامیده میشود. در بخش ۱-۳ با این فرض که روش AOR برای مقادیری از پارامترها همگرا است سعی می‌کنیم بازه‌های همگرایی را بیابیم ([11] , [12]) و در بخش ۱-۴ روش AOR از دیدگاه برونیابی معرفی، و نشان داده میشود که روش AOR برونیابی روش SOR با پارامتر برونیابی $\frac{\omega}{r}, r \neq 0$ است [6]. در پایان این فصل یک کران خطا برای روش AOR، در حالتی که ماتریس ضرایب معین مثبت و بطور سازگار مرتب شده باشد می‌یابیم و مثالی ارائه میدهیم [23].

در فصل ۲، ابتدا فرض میکنیم که A بصورت $A = D - A_L - A_u$ تجزیه شود که در آن D ماتریس قطری A و A_L و A_u بترتیب ماتریسهای پائین مثلثی اکید وبالامثلثی اکید A می‌باشند. در بخش ۲-۲ با ارائه سه لم و سپس سه قضیه، شرایط لازم و کافی را برای همگرایی روش AOR در حالتی که ماتریس ضرایب بطور سازگار مرتب شده (C.O) می‌باشد بیان می‌کنیم و یک مثال که روشهای AOR و SOR را برای اینگونه ماتریسها از لحاظ نرخ همگرایی و زمان انجام مقایسه می‌کند ارائه میدهیم [3]. در بخشهای ۲-۳ و ۲-۴ و ۲-۵ و ۲-۶ و ۲-۷ بترتیب به بررسی همگرایی روش AOR و یافتن پارامترهای بهینه برای ماتریسهای تحویل‌ناپذیر با تسلط قطری ضعیف [3]، L−ماتریس و M−ماتریس ([3] , [1])، ماتریسهای با تسلط قطری اکید [13]، ماتریسهای معین مثبت [1] و ماتریسهای متقارن [4] می‌پردازیم. همچنین در زیربخشهای ۲-۳-۱ و ۲-۴-۱ و ۲-۵-۳ و و ۲-۶-۱ به بررسی همگرایی روش AOR از دیدگاه برونیابی بترتیب برای ماتریسهای تحویل‌ناپذیر با تسلط قطری ضعیف [6] ,L−ماتریس و M−ماتریس ([1] , [6])، ماتریسهای با تسلط قطری اکید [13] و ماتریسهای معین مثبت [1] می‌پردازیم. در پایان این فصل برای هر یک از روشهای گفته شده در بخشهای ۲-۳ تا ۲-۷ برنامه کامپیوتری ارائه شده است که به مقایسه نرخ همگرایی روش SOR و AOR می‌پردازد. این برنامه‌ها و نتایج آنها را می‌توان در ضمیمه B یافت.

در فصل ۳ ابتدا فرض می‌کنیم که A بصورت $A = D - E - E^H$ تجزیه شود که در آن لزومی ندارد D (که معین مثبت فرض میشود) ماتریس قطری A باشد و E و E^H ماتریسهای بالا مثلثی و یا پائین مثلثی اکید باشند.

در بخش ۳-۲ به بررسی همگرایی روش AOR برای ماتریسهای هرمیتی [5] و در بخش ۳-۳ با فرض $E = (\frac{1}{2})(D - A + S)$ (که در آن $S^H = -S$) به بررسی همگرایی روش AOR برای ماتریسهای معین مثبت هرمیتی پرداخته و سعی می‌کنیم کرانهای بالایی برای شعاع طیفی در این حالت بیابیم . در پایان این فصل مثالی ارائه شده که کرانهای بالای شعاع طیفی را برای دو روش AOR و SOR با یکدیگر مقایسه میکند. ([2] و [5]).

در فصل ۴ و در بخش ۴-۲ ، روش GAOR را که روش AOR حالت خاصی از آن است، معرفی می‌کنیم و در بخش ۴-۳ همگرایی آنرا مورد بررسی قرار خواهیم داد ([7] , [8]) . در این بخش مثالی نیز آورده میشود که به مقایسه چند روش تکراری مهم برای یک ماتریس معین مثبت و متقارن می‌پردازد و طی این مثال نشان داده می‌شود در حالتی که ماتریس ضرایب هر بعدی داشته باشد روشهای AOR و GAOR نتایج بهتری بدست می‌دهند [۲۸] . در پایان این فصل روش MAOR معرفی و همگرایی آن در حالت خاص $p = 2$ و $q = 1$ برای $CO(q , r)$−ماتریس و $GCO(q , r)$−ماتریس بررسی می‌شود [9] .

فصل اول
روش فوق تخفیف تسریع یافته

۱-۱ مقدمه

برای حل عددی دستگاههای خطی روشهای مستقیم و غیرمستقیم زیادی وجود دارد که از میان آنها روش تکراری SOR [۱] و روشهای وابسته به آن از همه مشهورترند. روشهای فوق در منابع [18] و [25] و [26] بطور مشروح توضیح داده شده‌اند. هدف این فصل ارائه یک تعمیم دو پارامتری از روش SOR است که منجر به روش AOR [۲] می‌شود. بعداً خواهیم دید که روشهای گوس - سایدل و ژاکوبی و SOR حالتهای خاصی از روش AOR هستند. همچنین در این فصل به تحلیل همگرایی روش AOR، در حالتی که ماتریس ضرایب دلخواه می‌باشد پرداخته و روش AOR و همگرایی آنرا بطور اجمالی از دیدگاه برونیابی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در پایان یک کران خطا برای روش AOR بدست می‌آوریم.

۱-۲- بدست آوردن روش AOR

دستگاه n معادله و n مجهول

$$Ax = b \qquad (1-1)$$

که در آن ماتریس A دارای عناصر قطری مخالف صفر می‌باشد را در نظر می‌گیریم. ماتریس A

1- Successive overrelaxation

2- Accelerated overrelaxation

را بصورت

$$A = D - A_L - A_u \qquad (۲-۱)$$

تجزیه می‌کنیم که در آن، D ماتریس قطری و نامنفرد، و A_L- و A_u- بترتیب ماتریسهای پائین مثلثی اکید و بالا مثلثی اکید هستند. در حالت کلی برای حل عددی دستگاه معادله خطی (۱-۱) روشی تکراری را پیشنهاد می‌کنیم که در آن ماتریس ضرایب توابعی خطی از مؤلفه‌های A هستند و ضرایب تکرار جدید یک ماتریس پائین مثلثی است. این روش را بصورت

$$(\alpha_1 D + \alpha_2 A_L)\, x^{(m+1)} = (\alpha_3 D + \alpha_4 A_L + \alpha_5 A_u)\, x^{(m)} + \alpha_6 b \quad ,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

تعریف می‌کنیم که در آن α_i ، $i = 1(1)6$ ثابتهایی هستند که باید تعیین شوند و $\alpha_1 \neq 0$ و $x^{(0)}$ تقریب اولیه دلخواه برای جواب x دستگاه (۱-۱) است. از تقسیم طرفین رابطه بالا بر α_1 بدست می‌آوریم:

$$(D + \alpha'_2 A_L)\, x^{(m+1)} = (\alpha'_3 D + \alpha'_4 A_L + \alpha'_5 A_u)\, x^{(m)} + \alpha'_6 b \ , \qquad (۳-۱)$$
$$m = 0,1,2,\ldots$$

که در آن:

$$\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \quad , \qquad i = 2(1)6$$

فرض کنید x جواب معادله (۱-۳) باشد. در اینصورت خواهیم داشت:

$$(D + \alpha'_2 A_L)\, x = (\alpha'_3 D + \alpha'_4 A_L + \alpha'_5 A_u)\, x + \alpha'_6 b$$

یا

$$((1 - \alpha'_3) D + (\alpha'_2 - \alpha'_4) A_L - \alpha'_5 A_u)\, x = \alpha'_6 b$$

با توجه به رابطه اخیر شرط لازم برای سازگاری [۱] روابط (۱-۳) و (۱-۱) عبارت است از:

۱- برای اطلاع بیشتر به بخش A-۴-۱ مراجعه کنید.

$$(1-\alpha'_3)D + (\alpha'_2 - \alpha'_4)A_L - \alpha'_5 A_u = \alpha'_6 A \quad , \quad \alpha'_6 \neq 0 \qquad (۱-۴)$$

از مقایسه (۱-۴) و (۱-۲) بدست می‌آوریم:

$$\frac{1-\alpha'_3}{\alpha'_6} = 1 \quad , \quad \frac{\alpha'_2 - \alpha'_4}{\alpha'_6} = -1 \quad , \quad \frac{-\alpha'_5}{\alpha'_6} = 1$$

یا

$$1 - \alpha'_3 = \alpha'_6 \quad , \quad \alpha'_2 - \alpha'_4 = -\alpha'_6 \quad , \quad \alpha'_5 = \alpha'_6$$

جواب دستگاه فوق با فرض $\omega = \alpha'_6$ و $\alpha'_2 = -r$ بصورت

$$\alpha'_2 = -r \;,\quad \alpha'_3 = 1-\omega \;,\; \alpha'_4 = \omega - r \;,\; \alpha'_5 = \omega \;,\; \alpha'_6 = \omega$$

است که در آن r و ω پارامترهای ثابت و مخالف صفر هستند. با توجه به مقادیر بدست آمده برای α'_i ، $i = 2(1)6$ معادله (۱-۳) بصورت

$$(I - rL)\,x^{(m+1)} = [(1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U]\,x^{(m)} + \omega c \quad , \qquad (۱-۵)$$

$$m = 0,1,2,\dots$$

نوشته می‌شود که در آن I ماتریس واحد از مرتبه n است و

$$L = D^{-1}A_L \quad , \quad U = D^{-1}A_u \quad , \quad c = D^{-1}b \qquad (۱-۶)$$

روش تکراری (۱-۵)، روش فوق تخفیف تسریع یافته نامیده می‌شود و r و ω نیز بترتیب پارامترهای تسریع و فوق تخفیف نامیده می‌شوند. ماتریس تکرار روش (۱-۵) که به $L_{r,\omega}$ نشان داده می‌شود بصورت زیر می‌باشد:

$$L_{r,\omega} = (I - rL)^{-1}\,[(1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U] \qquad (۱-۷)$$

لم ۱-۱: اگر $r \neq 0$، آنگاه ماتریس تکرار روش AOR برابر است با

$$L_{r,\omega} = \frac{\omega}{r} L_{r,r} + \left(1 - \frac{\omega}{r}\right) I$$

اثبات: در (۱-۷) با اضافه و کم کردن $\frac{\omega}{r} I$ بدست می‌آوریم: