بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی محض، گرایش جبر جامع

عنوان:

بررسی تکواره‌هایی که همه عمل‌های روی آنها که در شرط (P) صدق می‌کنند یکدست قوی هستند

استاد راهنما:
خانم دکتر لیلا شهباز

استاد مشاور:
خانم دکتر مژگان محمودی

پژوهشگر:
زهرا دینی‌قبادی

شهریور ۹۱

دانشگاه مراغه
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی تکواره‌هایی که همه عمل‌های روی آنها که درشرط (P) صدق می‌کنند، یکدست قوی هستند

نگارش: زهرا دینی‌قبادی

استاد راهنما: خانم دکتر لیلا شهباز — امضاء:

استاد مشاور: خانم دکتر مژگان محمودی — امضاء:

استاد ممتحن خارجی: آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی — امضاء:

تقدیم به

پدر فهیمم و مادر مهربانم

که همواره و مشفقانه، مشوقم در گذر از ظلمت جهل به روشنایی دانایی اند

همسر عزیزم «مهدی»

برادر خوب و خواهران دلسوزم

و

ابوالفضل نازنینم با دستان کوچک و قلب مهربانش

بنام خداوند بخشنده مهربان

حمد وسپاس مخصوص خداوندی است که پروردگار جهانیان است، بخشنده و مهربان است، مالک روز جزاست. پروردگارا تنها تو را می‌پرستیم و تنها از تو یاری می‌جوییم. ما را به راه راست هدایت کن، راه کسانی که به آنها نعمت دادی، نه کسانی که مورد غضب واقع شده‌اند و نه گمراهان.

بار الها من به یاری تو کتاب را گشوده‌ام. خداوندا نگاهم در این کتاب را عبادت و قرائتم را وسیله تفکر و تفکرم را مایه عبرت بگردان و مرا از کسانی قرار ده که از نافرمانیت دوری می‌جویند. خداوندا در هنگام قرائت گوش دلم را ناشنوا مگردان و بردیدگانم پرده غفلت میفکن و قرائتم را قرائتی بی‌تفکر و بیهوده قرار مده که تویی آن پر مهر مهربان... .

سپاس گزاری...

بعد از حمد و ثنای الهی و شکرگزاری به درگاه او که بی‌تردید تنها و تنها به خواست او و یاری دستان پرتوان اوست که توانستم به این مرحله از تحصیل علم وارد و با موفقیت از آن خارج گردم، دستان یاریگر و مهربان استاد عالیقدر خود سرکار خانم دکتر لیلا شهباز را بوسیده و قدردان زحمات ایشان در مشاوره و مطالعه این پایان نامه هستم و در ستایش از ایشان همواره آویزه گوش میدارم « من علمنی حرفا فقد یصرنی عبدا»

و به خود می‌بالم که در کنار استاد محترم خود خانم دکتر لیلا شهباز، استاد عالیقدر ایشان خانم دکتر مژگان محمودی نیز بر من منت نهاده و زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و صمیمانه از ایشان تشکر و قدردانی می‌نمایم. در ادامه از استاد محترم جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی که زحمت قضاوت و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند کمال تشکر را دارم.

در خاتمه بار دیگر از پدر و مادر عزیز و همسر فداکارم که مسلما بدون یاری، حمایت، صبوری و تشویق‌های بی‌شائبه‌شان سختی‌های این راه خطیر برمن آسان نمی‌شد و خانواده عزیزم خصوصا خواهر مهربانم مریم و فرزند دلبندش ابوالفضل و تمامی کسانی که همواره خواستار موفقیتم از خداوند متعال هستند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

زهرا دینی‌قبادی

شهریور ۱۳۹۱

چکیده:

در سال ۱۹۹۲ بولمن-فلمینگ در [۲] تکوارههایی مانند S که در آن دو خاصیت یکدستی متمایز S-عملها با هم یکی میشوند را مورد مطالعه قرار داد و همچنین ثابت کرد که هر S-عمل راست دوری که در شرط (P) صدق میکند، یکدست قوی است اگر و فقط اگر S غیر دورهای باشد. در همان مقاله بولمن-فلمینگ یک مسئله باز مطرح کرد:

چگونه تکوارههایی را که همه عملهای روی آنها که در شرط (P) صدق میکنند، یکدست قوی هستند، دسته بندی کنیم؟ و نیز در آن مقاله بولمن-فلمینگ ثابت کرد که اگر S یک تکواره خودتوان یا نیمگروه صفر (پوچ) با الحاق ۱ باشد آنگاه همه عملهای روی آنها که در شرط (P) صدق میکنند، یکدست قوی هستند. کیائو در سال ۲۰۰۲ [1]، [۷]، و لی [2] و کیائو در سال ۲۰۰۴، [۸]، نتایج قبلی را تعمیم دادند و دستههای جدیدی از تکوارهها را به دست آوردند که در آنها هر S-عمل راستی که در شرط (P) صدق میکند یکدست قوی است. در این پایاننامه، دستههای جدید دیگری از تکوارههایی که در این شرایط صدق میکنند (توسط کیائو و لی در سال ۲۰۰۹، [۹]) مطرح خواهند شد و به دسته بندی تکوارههایی که عملهای روی آنها که در شرط (P) صدق میکنند، یکدست قوی هستند پرداخته میشود و تعدادی از مقالات مطرح شده توسط بولمن-فلمینگ و کیائو و لی در این زمینه و همه نتایج قبلی مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

کلید واژه ها: شرط (P)، یکدست قوی

[1] Qiao
[2] Li

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنیم S یک تکواره و A یک S-عمل راست باشد. مفاهیم گوناگونی از S-عمل‌ها از جمله یکدستی، یکدستی قوی و یکدستی ضعیف وجود دارند. استنسترم [۱] در سال ۱۹۷۱، [۱۰]، S-عمل‌های راستی مانند A را که حد مستقیم S-عمل‌های آزاد متناهی مولد هستند، مطالعه کرد و یا به طور معادل S-عمل‌هایی که دارای ویژگی زیر هستند: تابعگون $A \otimes -$ (از رسته S-عمل‌های چپ به رسته مجموعه‌ها) عقب‌برها و برابرسازها را حفظ می‌کند. S-عمل‌هایی که دارای ویژگی بالا هستند یکدست قوی نامیده می‌شوند. (برای مثال، نرمک [۲] [۶] و منابعی که در آن آورده شده‌اند را مشاهده کنید). استنسترم در [۱۰] شرایطی برای یکدست قوی بودن ارائه می‌کند که با شرایط (P) و (E) در نرمک [۶] نشان داده شده‌اند:

گزاره I: S-عمل راست A یکدست قوی است اگر و فقط اگر در شرط‌های (P) و (E) صدق کند.

واضح است که اگر ما بخواهیم ثابت کنیم که یک S-عمل که در شرط (P) صدق می‌کند یکدست قوی است فقط نیازمند آن هستیم، ثابت کنیم S-عمل مذکور در شرط (E) نیز صدق می‌کند (کیلپ [۳] [۴]).

در سال ۱۹۹۲ بولمن-فلمینگ در [۲] تکواره‌هایی مانند S که در آن دو خاصیت یکدستی متمایز S-عمل‌ها با هم یکی می‌شوند را مورد مطالعه قرار داد و بیشتر، خاصیت‌های یکدستی که بین یکدست قوی و یکدست قرار می‌گیرند را مطالعه کرد و نتایجی درباره یکدستی S-عمل‌های دوری و تکواره های غیر دوره‌ای به دست آورد که تحت آنها S-عمل راست A که در شرط (P) صدق می‌کند، یکدست قوی است. در آن مقاله همچنین ثابت شد که هر S-عمل راست دوری که در شرط (P) صدق می‌کند، یکدست قوی است اگر و فقط اگر S غیر دوره‌ای باشد. در همان مقاله بولمن-فلمینگ ثابت کرد که اگر S یک تکواره خودتوان یا نیم‌گروه صفر (پوچ) با الحاق

[۱] Stenstrom
[۲] Normak
[۳] Kilp

۱ باشد آنگاه همه عمل‌های روی آنها که در شرط (P) صدق می‌کنند، یکدست قوی هستند. همچنین در مقاله مذکور بولمن-فلمینگ یک مسئله باز مطرح کرد:

چگونه تکواره‌هایی را که همه عمل‌های روی آنها که در شرط (P) صدق می‌کنند، یکدست قوی هستند، دسته بندی کنیم؟

بولمن-فلمینگ در سال ۱۹۹۸، [۳]، بیان کرد که این مسئله باز یکی از مهمترین شش مسئله باز حل نشده است. کیائو در سال ۲۰۰۲ [۱]، [۷]، و لی [۲] و کیائو در سال ۲۰۰۴، [۸]، نتایج قبلی را تعمیم دادند و دسته‌های جدیدی از تکواره‌ها را به دست آوردند که در آنها هر S-عمل راستی که در شرط (P) صدق می‌کند یکدست قوی است. در این پایان‌نامه، ضمن بیان نتایج قبلی، درجهت یافتن دسته‌های جدید دیگری از تکواره‌هایی که در این شرایط صدق می‌کنند به بررسی نتایج به‌دست آمده توسط کیائو و لی در سال ۲۰۰۹، [۹]، پرداخته و به دسته بندی تکواره‌هایی که عمل‌های روی آنها که در شرط (P) صدق می‌کنند، یکدست قوی هستند پرداخته می‌شود.

[۱] Qiao
[۲] Li

فصل ۱
تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل ابتدا برخی از مفاهیم نیم‌گروه‌ها را بیان کرده، سپس به طور خلاصه به تعریف رسته S- $\mathbf{Act}$ از رسته S-عمل‌های راست پرداخته و برخی از مفاهیم رسته‌ای و جبری S-عمل‌ها را بیان می‌کنیم. همچنین تعدادی از گزاره‌هایی را که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، مطرح می‌کنیم.

۱.۱ نظریه نیم‌گروه‌ها

در این بخش به معرفی برخی از انواع نیم‌گروه‌ها که در این پایان‌نامه موردنیازند می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. یک مجموعه ناتهی مانند A به همراه یک عمل دوتایی گروهواره نامیده می‌شود.

گروهواره‌ای که عمل دوتایی آن شرکت‌پذیر است نیم‌گروه نامیده می‌شود.

یک نیم‌گروه به همراه عضو همانی، تکواره[۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. عضو $z \in S$ یک صفر راست گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $sz = z$. همچنین عضو $z \in S$ یک صفر چپ گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $zs = z$. یک عضو صفر Sعضوی مانند 0 از S است که هم صفر راست و هم صفر چپ باشد.

تعریف ۳.۱.۱. نیم‌گروه S که هر عضو آن یک صفر چپ باشد را نیم‌گروه صفر چپ می‌گوییم. نیم‌گروه صفر راست نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

S نیم‌گروه صفر[۲] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $s, t \in S$ داشته باشیم $st = ۰$.

تعریف ۴.۱.۱. زیر مجموعه T از نیم‌گروه S را زیرنیم‌گروه S می‌نامند اگر $T^۲ \subset T$. اگر S یک تکواره با عضو همانی ۱ باشد در این صورت زیرنیم‌گروه T زیرتکواره نامیده می‌شود هرگاه $۱ \in T$.

[۱] Monoid
[۲] Null semigroup

برای هر زیر مجموعه غیرتهی A از S

$$\langle A\rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$$

کوچکترین زیرنیم‌گروه S شامل A است و زیرنیم‌گروه S تولید شده توسط A نامیده می‌شود.

اگر $S = \langle A\rangle$ آنگاه A مجموعه عضوهای مولد [1] S نامیده می‌شود. نیم‌گروه S متناهی مولد[2] گفته می‌شود هرگاه زیر مجموعه متناهی A از نیم‌گروه S وجود داشته باشد به طوری که $S = \langle A\rangle$. اگر $A = \{a\}$ و $S = \langle a\rangle = \langle A\rangle$، S را نیم‌گروه دوری[3] گویند و a مولد S نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. زیرمجموعه K از S،

- ایده‌آل چپ نامیده می‌شود هر گاه $SK \subseteq K$؛
- ایده‌آل راست نامیده می‌شود هرگاه $KS \subseteq K$؛
- ایده‌آل یا ایده‌آل دو طرفه نامیده می‌شود هرگاه $SK \subseteq K$ و $KS \subseteq K$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم S یک تکواره باشد عضو $s \in S$ معکوس‌پذیر چپ (راست) نامیده می‌شود اگر $t \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $ts = 1$ ($st = 1$)، در این حالت t یک معکوس چپ (راست) برای s نامیده می‌شود. اگر $t \in S$ وجود داشته باشد که $ts = st = 1$ در این صورت s معکوس‌پذیر و t معکوس s نامیده می‌شود که منحصر به فرد بوده و با s^{-1} نمایش داده می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد. عضو $e \in S$ خودتوان[4] نامیده می‌شود هرگاه $e^2 = e$. مجموعه

[1] Set of generating elements
[2] Finitely generated
[3] Cyclic
[4] Idempotent

تمام عضوهای خودتوان S با $E(S)$ نمایش داده می‌شود. اگر $E(S) = S$ آنگاه S یک نیم‌گروه خودتوان یا یک باند[۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم A و B دو مجموعه ناتهی باشند و داشته باشیم $S = A \times B$. به نیم‌گروه S به همراه ضربی که به صورت $(a,b)\,(c,d) = (a,d)$، برای $a, c \in A$ و $b, d \in B$ تعریف می‌شود باند مستطیلی [۲] می‌گویند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد. عضو $s \in S$ منظم نامیده می‌شود هرگاه عضو $x \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $sxs = s$.

S یک نیم‌گروه منظم نامیده می‌شود هرگاه تمامی اعضای آن منظم باشند.

تعریف ۱۰.۱.۱. تکواره S غیردوره‌ای[۳] نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in S$، $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که

$x^{n+1} = x^n$.

تعریف ۱۱.۱.۱. نیم‌گروه T، T-پوچ توان چپ (راست) [۴] نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله نامتناهی $(t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots)$ با شرط $t_i \in T$، $i = 1, 2, \ldots$، $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $t_n t_{n-1} \ldots t_1$ یک صفر چپ (راست) از T باشد.

نیم‌گروه T، T-پوچ توان نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله نامتناهی $(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_i, \ldots)$ با شرط $t_i \in T$، $i = 1, 2, \ldots$، $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $t_n t_{n-1} \ldots t_1 = 0$.

تعریف ۱۲.۱.۱. (۱) عضو x از نیم‌گروه T، پوچ‌توان (پوچ‌توان چپ، پوچ‌توان راست) نامیده می‌شود هرگاه

[۱] Band
[۲] Rectangular band
[۳] Aperiodic
[۴] Left (Right) T- nilpotent

عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $x^n = 0$ (x^n عضو صفر چپ (راست) از نیم‌گروه T است). در این صورت کوچکترین $n \in \mathbb{N}$ اندیس پوچ‌توانی [۱] (اندیس پوچ‌توانی راست، اندیس پوچ‌توانی چپ) نامیده می‌شود.

(۲) نیم‌گروه T، پوچ‌توان چپ (راست) نامیده می‌شود هرگاه عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر دنباله $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n \in T$ ، $t_1 t_2 \ldots t_n$ یک عضو صفر چپ (راست) از T باشد.

(۳) نیم‌گروه T، پوچ‌توان [۲] نامیده می‌شود هرگاه عدد صحیح $n > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر دنباله $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ داشته باشیم $t_1 t_2 \ldots t_n = 0$.

تعریف ۱.۱.۱۳. یک رابطه هم ارزی روی X یک رابطه تقارنی، [۳] انعکاسی [۴] و متعدی [۵] است.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنیم $\rho \subseteq S \times S$. ρ همنهشتی راست (چپ) نامیده می‌شود اگر به ازای هر $s, t, u \in S$، $s\rho t$ نتیجه دهد $su\rho tu$ $(us\rho ut)$.

تعریف ۱.۱.۱۵. رابطه هم ارزی ρ روی S همنهشتی [۶] نامیده می‌شود اگر $s\rho t$ آنگاه به ازای هر $s, t, u \in S$، $us\rho ut$ و $su\rho tu$.

۱.۲ نظریه رسته‌ها

در این بخش با معرفی رسته، به بررسی بعضی از مفاهیم رسته‌ای S-عمل‌ها می‌پردازیم.

[۱] Nilpotency index
[۲] Nilpotent
[۳] Symmetric
[۴] Reflexive
[۵] Transitive
[۶] Congruence

تعریف ۱.۲.۱. رسته‌ای [1] مانند $\mathcal{C}$ خانواده‌ای متشکل از شیءهایی است که معمولا آنها را با A، B، C، D و $\cdots$ نمایش می‌دهیم با این ویژگی که:

۱. به ازای هر دو شیء مثل A و B، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ نشان داده می‌شود و دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شیء مثل A، B، C و D اگر $(A,B) \neq (C,D)$ آنگاه

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset$$

۲. به ازای هر سه شیء مثل A، B و C تابع

$$\begin{aligned} . : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) &\to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (g,f) &\mapsto gf \end{aligned}$$

موجود است که:

(آ) به ازای هر چهار شیء مثل A، B، C و D اگر $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ و $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D)$ آنگاه $h(gf) = (hg)f$.

(ب) به ازای هر شیء مثل A عضوی از $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ مثل 1_A موجود است که به ازای هر عضو از $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ مثل f و هر عضو از $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,A)$ مثل g، $f1_A = f$ و $1_A g = g$.

تذکر ۲.۲.۱. *در رسته‌ای مثل $\mathcal{C}$ به ازای هر دو شیء مثل A و B، هر عضو از $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ را یک ریختار [2] از A به B می‌نامند. نماد $f : A \to B$ یعنی این که f ریختاری از A به B است.*

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند و $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ تابعی است که به هر شیء مانند $A \in \mathcal{C}$ شیء

[1] Category
[2] Morphism

منحصر به فرد $f(A) \in \mathcal{D}$ و به هر ریختار $f : A \to A'$ در $\mathcal{C}$ ریختار منحصر به فرد $F(f)$ در $\mathcal{D}$ را اختصاص می‌دهد به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

۱. برای هر $A \in \mathcal{C}$، $F(id_A) = id_{F(A)}$. (F همانی را حفظ می‌کند.)

۲. برای هر $f_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)$ و $f_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_3)$ که $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{C}$ داریم:

$$F(f_2 f_1) = F(f_2) F(f_1).$$

۳. برای هر $f_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)$ و $f_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, A_3)$ که $A_1, A_2, A_3 \in C$ داریم:

$$F(f_2 f_1) = F(f_1) F(f_2).$$

اگر F دارای شرایط ۱ و ۲ باشد آنگاه F تابعگون همورد[۱] نامیده می‌شود و در این مورد:

$$F(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A_1), F(A_2)).$$

اگر F دارای شرایط ۱ و ۳ باشد آنگاه F تابعگون پادورد[۲] نامیده می‌شود و در این مورد:

$$F(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A_2), F(A_1)).$$

تعریف ۴.۲.۱. ریختار $f : A \to B$ در رسته $\mathcal{C}$ را تکریختی می‌نامیم در صورتی که به ازای هر دو ریختار $h, k : C \to A$ اگر $f \circ h = f \circ k$ آنگاه $h = k$. یعنی f با عمل ترکیب، از چپ حذف‌پذیر است.

[۱] Covariant functor
[۲] Contravariant functor

تعریف ۵.۲.۱. موقعیت[1] عقب‌بری[2]

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

را در نظر می‌گیریم.

جفت $(P,(p_1,p_2))$ با $p_i : P \to X_i$، $i = 1,2$، عقب‌بر جفت (f_1,f_2) در رسته $\mathcal{C}$ نامیده می‌شود هرگاه:

۱. $f_1p_1 = f_2p_2$،

۲. خاصیت جهانی[3] زیر در $\mathcal{C}$ برقرار باشد:

برای هر جفت $(P',(p'_1,p'_2))$ با $p'_i : P' \to X_i$، $i = 1,2$، و $f_1p'_1 = f_2p'_2$ دقیقا یک ریختار $p : P' \to P$ وجود داشته باشد به طوری که برای $i = 1,2$، $p_ip = p'_i$.

یعنی نمودار زیر جابجایی شود.

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "p"] \arrow[drr, bend left, "p'_1"] \arrow[ddr, bend right, "p'_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ & X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

p را القایی عقب‌بری شده توسط (p'_1,p'_2) می‌نامیم.

---
[1] Situation
[2] Pullback
[3] Universal property