دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش آنالیز

عنوان:

مجموعه نقاط ثابت مشترک نیم گروه های تک پارامتری از نگاشت های غیر انبساطی در فضاهای باناخ با خاصیت اوپیال

استاد راهنما:

دکتر عزیزالله عزیزی

استاد مشاور:

دکترعبدالرحمن رازانی

توسط:

فیض الله ربیعی آسیابر

چکیده

در این پایان نامه در مورد شرایط لازم و کافی برای وجود نقاط ثابت مشترک نیم گروه های غیر انبساطی تک پارامتری در فضای باناخ با خاصیت اوپیال بحث می کنیم.سپس به اثبات قضیه ی همگرایی در یک نقطه ی ثابت مشترک می پردازیم.در پایان در مورد وجود درون بری غیر انبساطی به روی نقاط ثابت مشترک نیم گروه غیر انبساطی تک پارامتری بحث می کنیم.

کلمات کلیدی:نقطه ی ثابت مشترک،نیم گروه غیر انبساطی،درون بری غیر انبساطی،قضیه ی همگرایی،خاصیت اوپیال

منبع اصلی این پایان نامه مقاله ی زیر می باشد:

T.Suzuki,some remarks on the set of common fixed points of one-parameter semigroups of nonexpansive mappings in banach spaces with the opial property(۲۰۰۳)

فهرست مطالب

پیشگفتار

نقطه ی ثابت مشترک از جمله مفاهیم پر کاربرد در شاخه های مختلف ریاضیات است.بحث اصلی این پایان نامه به وجود نقطه ی ثابت مشترک نیم گروه های غیر انبساطی تک پارامتری روی یک فضای باناخ با خاصیت اوپیال اختصاص دارد.تاکاهاشی[۱] و سوزوکی[۲] از جمله افرادی هستند که در این مورد تلاش نموده اند.تاکاهاشی وجود نقطه ی ثابت مشترک برای یک نیم گروه غیر انبساطی تک پارامتری، روی یک زیر مجموعه ی محدب و فشرده ی C از یک فضای باناخ E را به اثبات می رساند؛ و سوزوکی این مسئله را در حالتی که C محدب و فشرده ی ضعیف، و فضای باناخ E دارای خاصیت اوپیال باشد بیان می کند.

در فصل های اول و دوم این پایان نامه که در واقع مقدمه ی ورود به فصل های سوم وچهارم اند در مورد نقطه ثابت یک نگاشت غیر انبساطی و نقطه ی ثابت مشترک نگاشت های غیر انبساطی مباحثی را بیان می کنیم .

همچنین قضیه ی نقطه ثابت برودر[۳] که در رابطه با وجود نقطه ی ثابت در یک زیر مجموعه ی محدب،بسته وکران دار از فضای باناخ بطور یکنواخت محدب بیان شده است. کرک[۴] این قضیه را برای زیر مجموعه ی فشرده ی ضعیف که ساختار نرمال دارد تعمیم داد.

دمار[۵] نشان داد که نقطه ی ثابت مشرک خانواده ای جا بجایی از نگاشت های غیر انبساطی روی یک زیر مجموعه ی فشرده و محدب از فضا ی باناخ ناتهی است.

در فصل دوم قضیه ی بروک[۶] و همچنین قضیه ی ادلستین و اوبراین[۷] بیان شده است که نقشی کلیدی را در فصل های بعد به عهده خواهند داشت.

---

[۱] Takahashi
[۲] Suzuki
[۳] Browder
[۴] Kirk
[۵] Demarr
[۶] Bruck
[۷] Edelstein And O'Brien

در فصل ۳ به معرفی نیم گروه های غیر انبساطی تک پارامتری می پردازیم و در مورد نقطه ی ثابت مشترک این نیم گروه ها روی زیر مجموعه ی فشرده و محدب از یک فضای باناخ بحث خواهیم نمود.

سپس در ادامه ی این فصل قضیه ا ی در رابطه با همگرایی یک دنباله ی بازگشتی به نقطه ی ثابت مشترک نیم گروه های غیر انبساطی تک پارامتری را اثبات خواهیم کرد.

در فصل ۴ در مورد شرایط لازم وکافی برای وجود نقطه ی نقاط ثابت مشترک نیم گروه های غیر انبساطی تک پارامتری روی یک زیر مجموعه ی محدب و فشرده ی ضعیف از یک فضای باناخ با خاصیت اوپیال بحث میکنیم و در ادامه قضایایی را در مورد وجود درون بری های غیر انبساطی به روی نقطه ی ثابت مشترک نیم گروه غیر انبساطی تک پارامتری بیان خواهیم نمود.

در پایان این فصل به بیان و اثبات یک مثال نقض در رابط با قضیه های ۱.۱.۳ و ۱.۱.۴ می پردازیم و نشان می دهیم که این دو قضیه در حالت کلی تر برقرار نخواهند بود. در مثال نقض دوم نشان خواهیم داد که نگاشت U تعریف شده در بخش ۲.۴ ،در حالت کلی یک درون بری به روی نقاط ثابت مشترک یک نیم گروه غیر انبساطی نمی باشد.

در این پایان نامه همه ی فضاهای باناخ را حقیقی در نظر می گیریم.

فضای دوگان مجموعه ی E را با E^* نمایش می دهیم.

فصل ۱

پیش نیاز

۱.۱.تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ یک فضای برداری روی میدان K عبارت است از یک مجموعه ی E همراه با یک عمل دوتایی "+" به نام عمل جمعی و یک ضرب اسکالر که (α, x) در $K\times E$ را به αx در E می نگارد وبرای هر $x, y, z \in E$ و هر $\alpha, \beta \in K$ در شرایط زیر صدق می کند:

۱) $x+y=y+x$؛

۲) $(x+y)+z=x+(y+z)$؛

۳) عنصر $\circ\in E$ به نام بردار صفر وجود دارد به طوری که برای هر $x\in E$ ، $x+\circ=x$؛

۴) برای هر $x\in E$ ،عنصر $-x\in E$ به نام معکوس جمعی وجود دارد به طوری که $x+(-x)=\circ$؛

۵) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$؛

۶) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$؛

۷) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$؛

۸) $1\cdot x=x$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید E یک فضای برداری روی میدان K و $\|.\|: E \to R^{+}$ یک تابع باشد؛گوییم $\|.\|$ یک نرم است هرگاه

۱) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

۲)برای هر $x \in E$ و هر $\lambda \in K$ $\qquad \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$؛

۳)برای هر $x, y \in E$ $\qquad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

زوج $(E, \|.\|)$ را یک فضای برداری نرم دار می گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ فضای برداری نرم دار کامل را فضای باناخ گوییم.

تعریف ٤.۱.۱ فضای باناخ E را اکیداً محدب[1] نامیم هرگاه برای هر $x, y \in E$ که $x \neq y$ و $\|x\| = \|y\| = 1$ داشته باشیم :

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| < 1 \qquad \forall \lambda \in (0,1)$$

اگر E یک فضای اکیداً محدب باشد و برای هر $x, y \in E$ و $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| = \|y\| = \|x\| = 1$$

آنگاه $x = y$.

تعریف ۵.۱.۱ فضای باناخ E را به طور یکنواخت محدب[2] گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ که $0 < \varepsilon \le 2$، $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in E$ که $\|x\| \le 1$ و $\|y\| \le 1$ و $\|x - y\| \ge \varepsilon$ داشته باشیم:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1 - \delta$$

قضیه ۱.۱.۱ هر فضای باناخ به طور یکنواخت محدب اکیداً محدب است.

اثبات: فرض کنیم E فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد.هم چنین $x, y \in E$ و $\|x\| = \|y\| = 1$ و

[1] Strictly convex
[2] Uniformly convex

$\varepsilon \geq \|x-y\|$ که $0<\varepsilon\leq 2$.نشان می دهیم برای هر $\lambda\in(0,1)$، $\|\lambda x+(1-\lambda)y\|<1$.

قرار می دهیم $\delta > \frac{|2\lambda-1|}{2}\|x-y\|$.با استفاده از محدب یکنواخت بودن E داریم

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| = \left\|\lambda x+(1-\lambda)y-\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}\right\|$$

$$\leq \left\|\lambda x+(1-\lambda)y-\frac{x+y}{2}\right\| + \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$$

$$\leq \left\|\lambda x+(1-\lambda)y-\frac{x+y}{2}\right\| + 1-\delta$$

$$\leq \frac{1}{2}\|(2\lambda-1)x-(2\lambda-1)y\|+1-\delta$$

$$\leq \frac{|2\lambda-1|}{2}\|x-y\|+1-\delta$$

$$< \frac{|2\lambda-1|}{2}\|x-y\|+1-\frac{|2\lambda-1|}{2}\|x-y\| = 1$$

□

قضیه ۲.۱.۱ هر فضای باناخ به طور یکنواخت محدب انعکاسی[1] است.

اثبات:فرض کنیم X فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد.قرار می دهیم

$$S_{X^*}=\{j\in X^*:\|j\|=1\} \text{ و } S_X=\{x\in X:\|x\|=1\}$$

فرض کنیم $f\in S_{X^*}$ و $\{x_n\}$ دنباله ای در S_X باشد به طوری که $f(x_n)\to 1$.نشان می دهیم $\{x_n\}$ کشی است.به برهان خلف فرض کنیم $\varepsilon>0$ و زیر دنباله های $\{x_{n_i}\}$و $\{x_{n_j}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارند به طوری که $\|x_{n_i}-x_{n_j}\|\geq\varepsilon$.با استفاده از محدب یکنواخت بودن X، $\delta(\varepsilon)>0$ وجود دارد به طوری که $\left\|\frac{x_{n_i}+x_{n_j}}{2}\right\|<1-\delta$.هم چنین

$$\left|f\left(\frac{x_{n_i}+x_{n_j}}{2}\right)\right| \leq \|f\|.\left\|\frac{x_{n_i}+x_{n_j}}{2}\right\| < \|f\|.(1-\delta)=1-\delta$$

---

[1] Reflexive

و این با فرض $f(x_n) \to ۱$ در تناقض است.پس $\{x_n\}$ کشی است و با توجه به باناخ بودن X ،نقطه ی x در X وجود دارد که $x_n \to x$.$x \in S_X$،زیرا

$$\|x\| = \|\lim_{n\to\infty} x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = ۱$$

حال با استفاده از قضیه ی جیمز[1](که بیان می کند یک فضای باناخ انعکاسی است اگر و تنها اگر برای هر $f \in S_{X^*}$، $x \in S_X$ موجود باشد به طوری که $f(x) = ۱$)نتیجه می شود X انعکاسی است. □

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید E یک فضای برداری نرم دار باشد و $\{x_n\}$ دنباله ای در آن؛گوییم $\{x_n\}$ به طور ضعیف به $x \in E$ همگراست هرگاه برای هر $f \in E^*$

$$f(x_n) \to f(x)$$

وقتی $n \to \infty$.

همگرایی ضعیف $\{x_n\}$ به x را با $x = weak-\lim_n x_n$ یا $x_n \xrightarrow{w} x$ نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید E یک فضای باناخ باشد؛گوییم E خاصیت اوپیال[2] دارد هرگاه برای هر دنباله ی همگرای ضعیف $\{x_n\}$ در E با حد ضعیف $z_\circ$ داشته باشیم

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n - z_\circ\| < \liminf_{n\to\infty}\|x_n - y\|$$

برای هر $y \in E$ و $y \neq z_\circ$.

تعریف ۸.۱.۱ زیر مجموعه ی محدب H از فضای باناخ E ساختار نرمال دارد هرگاه برای هر زیر مجموعه ی محدب و کراندار L از H که بیش از یک نقطه دارد، $x \in L$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\sup\{\|x-y\| : y \in L\} < \sup\{\|u-v\| : u, v \in L\} = diam(L).$$

در رابطه ی قبل $diam\,(L)$ قطر مجموعه ی L می باشد.

[1] James theorem
[2] Opial

قضیه ۳.۱.۱ هر زیر مجموعه ی محدب و فشرده ی C از فضای باناخ E ساختار نرمال دارد.

اثبات:فرض کنیم C ساختار نرمال ندارد و به تناقض می رسیم.زیر مجموعه ی محدب D از C را که دست کم دو نقطه دارد در نظر می گیریم.از این که C ساختار نرمال ندارد نتیجه می شود همه ی نقاط D قطری اند.دنباله ی $\{x_i\}$ در D را به گونه ای می سازیم که برای هر $i \neq j$

$$\|x_i - x_j\| = diam(D)$$

برای این منظور $x_1 \in D$ را دلخواه اختیار می کنیم. چون تمام نقاط D قطری اند، $x_2 \in D$ وجود دارد به طوری که

$$diam(D) = \|x_1 - x_2\|$$

با توجه به محدب بودن D، $\frac{x_1 + x_2}{2} \in D$. حال $x_3 \in D$ را طوری اختیار می کنیم که

$$diam(D) = \left\|x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right\|$$

با ادامه ی این روند دنباله ی $\{x_n\}$ در D به دست می آید که

$$diam(D) = \left\|x_{n+1} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\|, n \geq 2$$

از

$$\begin{aligned} diam(D) &= \left\|x_{n+1} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\| \\ &= \left\|\frac{(x_{n+1} - x_1) + (x_{n+1} - x_2) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)}{n}\right\| \\ &\leq \frac{1}{n}(\|x_{n+1} - x_1\| + \|x_{n+1} - x_2\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\|) \\ &\leq diam(D) \end{aligned}$$

نتیجه می شود که برای $1 \leq i \leq n$،

$$diam(D) = \|x_{n+1} - x_i\|$$

یعنی $\{x_n\}$ زیر دنباله ی همگرا ندارد و این با فشردگی C در تناقض است.پس C ساختار نرمال دارد. □

قضیه ٤.١.١ فرض کنید E یک فضای باناخ با خاصیت اوپیال باشد،در این صورت هر زیر مجموعه ی محدب وفشرده ی ضعیف از E ساختار نرمال دارد.

اثبات:به مرجع [۱۵] رجوع کنید.

قضیه ٥.١.١ فرض کنید E یک فضای باناخ باشد، E انعکاسی است اگر و تنها اگر هر دنباله ی نزولی از زیر مجموعه های محدب،بسته و ناتهی از E اشتراک ناتهی داشته باشد.

اثبات:به مرجع [۳۸] رجوع کنید.

قضیه ٦.١.١ فضای باناخ E انعکاسی است اگر و تنها اگر گوی واحد بسته ی E به طور ضعیف فشرده باشد.

اثبات:به مرجع [۳۹] رجوع کنید.

قضیه ۷.۱.۱ (ابرلین-شمولیان[1]) اگر E یک فضای باناخ و $A \subseteq E$،گزاره های زیر معادلند:

۱)هر دنباله از عناصر A زیر دنباله ای به طور ضعیف همگرا دارد.

۲)هر دنباله از عناصر A یک نقطه ی حدی ضعیف دارد.

۳) A به طور ضعیف فشرده است.

نتیجه ۱.۱.۱ فضای باناخ E انعکاسی است اگر و تنها اگر هر دنباله ی کراندار در E ،زیر دنباله ای به طور ضعیف همگرا داشته باشد.

این مطلب با توجه به قضیه ی ۶.۱.۱ و این که در قضیه ی ابرلین-شمولیان برای زیر مجموعه ی A از E فشردگی ضعیف و فشردگی دنباله ای ضعیف معادلند به دست می آید.

[1] Eberlein-Smulian

قضیه ۸.۱.۱ هر زیر مجموعه ی محدب و بسته از یک مجموعه ی فشرده ی ضعیف،فشرده ی ضعیف است.

اثبات:به مرجع [۳۷] رجوع کنید.

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنید C یک زیر مجموعه از یک فضای باناخ انعکاسی باشد ؛ C فشرده ی ضعیف است اگر و تنها اگر کراندار باشد.

اثبات:به مرجع [۳۷] رجوع کنید.

قضیه ۱۰.۱.۱ (هان-باناخ[۱]) فرض کنید E یک فضای برداری نرم دار و C یک زیر فضای آن باشد. $g \in C^*$ را دلخواه در نظر می گیریم؛در این صورت $f \in E^*$ وجود دارد به طوری که

$$\|f\| = \|g\| \quad , \quad f|_C = g$$

نتیجه ۲.۱.۱ فرض کنید E یک فضای برداری نرم دار باشد و $x \in E$ ؛در این صورت $f \in E^*$ وجود دارد به طوری که

$$f(x) = \|x\| \quad , \quad \|f\| = ۱$$

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای در فضای باناخ X باشد.اگر $x_n \xrightarrow{w} x$ آنگاه $\{x_n\}$ کراندار است و $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

اثبات: به مرجع [۳۷] رجوع کنید.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ی ناتهی و $d : X \times X \to R^+$ یک تابع باشد. d را یک متر روی X گوییم هرگاه

۱) برای هر $x, y \in X$ ، $d(x,y) = ۰$ اگر $x = y$؛

۲) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$ ؛

۳) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

زوج (X,d) را یک فضای متریک گوییم.

[۱] Hahn-Banach

تعریف ۱۰.۱.۱ نگاشت $f: M \to M$ از یک فضای متریک (M,d) به خودش را در $x \in M$ به طور مجانبی منظم گوییم هرگاه

$$d(f^{n+1}(x), f^{n}(x)) \to 0$$

وقتی $n \to \infty$.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید D یک مجموعه ی ناتهی و $\leq$ یک رابطه روی D باشد .این رابطه را مستقیم برای D گوییم هرگاه

۱)برای هر $\alpha \in D$ ، $\alpha \leq \alpha$؛

۲) برای هر $\alpha, \beta, \lambda \in D$ ، اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ آنگاه $\alpha \leq \gamma$؛

۳)برای هر $\alpha, \beta \in D$ ، عنصر $\gamma \in D$ وجود دارد به طوری که $\alpha \leq \gamma$و $\beta \leq \gamma$.

زوج $(D, \leq)$ را یک مجموعه ی جهت دار می گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه ی ناتهی و τ گردایه ای از زیر مجموعه های X باشد. τرا یک توپولوژی روی X نامیم هرگاه

۱) $\phi, X \in \tau$؛

۲) τ تحت اجتماع های دلخواه بسته باشد؛

۳) τ تحت اشتراک های متناهی بسته باشد.

زوج (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می گوییم.

تعریف ۱۳.۱.۱ شبکه[۱] یا دنباله ی تعمیم یافته در مجموعه ی X یک نگاشت S از یک مجموعه ی جهت دار D به توی X می باشد.

شبکه را با نماد $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ یا $\{x_\alpha\}$ نیز نمایش می دهیم که در آن $S(\alpha) = x_\alpha$.

تعریف ۱۴.۱.۱ شبکه ی $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ در یک فضای توپولوژیک X را همگرا به $x \in X$ گوییم اگر برای هر همسایگی U از x، $\alpha_0 \in D$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\alpha \geq \alpha_0$ ، $x_\alpha \in U$.

---
[۱] Net

تعریف ۱۵.۱.۱ شبکه ی $S:D\to X$ در یک زیر مجموعه ی C از X پایانی نامیده می شود هرگاه $\alpha_\circ\in D$ موجود باشد به طوری که برای هر $\alpha\geq\alpha_\circ$ ، $x_\alpha\in C$.

تعریف ۱۶.۱.۱ شبکه ی $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ در مجموعه ی X عام[۱] نامیده می شود هرگاه برای هر زیر مجموعه ی C از X ، $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ پایانی در C یا در $X-C$ باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ یک شبکه در مجموعه ی X باشد و E یک مجموعه ی جهت دار باشد.شبکه ی $\{x_{\alpha_\beta}:\beta\in E\}$ در X را یک زیر شبکه از $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ گوییم هرگاه

۱) $\{x_{\alpha_\beta}:\beta\in E\}\subseteq\{x_\alpha:\alpha\in D\}$؛

۲)برای هر $\alpha_\circ\in D$ ، $\beta_\circ\in E$ وجود دارد به طوری که $\alpha_\circ\leq\alpha_\beta$ ایجاب می کند $\beta_\circ\leq\beta$.

قضیه ۱۲.۱.۱ :فرض کنید $\{x_\alpha\}$ یک شبکه در فضای توپولوژیک X باشد.در این صورت

i) $\{x_\alpha\}$ زیر شبکه ی عام دارد.

ii) اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت پیوسته باشد و $\{x_\alpha\}$ یک شبکه ی عام در X باشد آنگاه $\{f(x_\alpha)\}$ یک شبکه ی عام در Y می باشد.

iii) X فشرده است اگر و تنها اگر هر شبکه ی عام در آن همگرا باشد.

اثبات:به مرجع [۳۷] رجوع کنید.

تعریف ۱۸.۱.۱ پوسته ی محدب[۲] X در فضای برداری V اشتراک تمام زیر مجموعه های محدب V که شامل X هستند میباشد.

پوسته ی محدب X را با $co(X)$ نمایش می دهیم.

به طور مشابه پوسته ی محدب و بسته ی X در فضای برداری V اشتراک تمام زیر مجموعه های محدب و بسته از V که شامل X هستند میباشد و با $clco(X)$ نشان داده می شود.

---

۱ Universal
۲ Convex hull

تعریف ۱.۱.۱۹فرض کنید S یک زیر مجموعه از فضای برداری V باشد،پیمای خطی[۱] S عبارت است از اشتراک همه ی زیر فضاهای V شامل S.

تعریف ۱.۱.۲۰ فرض کنید C یک مجموعه و T نگاشتی از C به C باشد؛ T را غیر انبساطی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم

$$\|T(x)-T(y)\| \leq \|x-y\|$$

مجموعه نقاط ثابت T را با $F(T)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱.۲۱ دو نگاشت T, F روی C را جابجایی گوییم هرگاه برای هر $x \in C$

$$TF(x) = FT(x)$$

تعریف ۱.۱.۲۲ گوییم مجموعه ی C خاصیت نقطه ی ثابت برای نگاشت های غیر انبساطی دارد اگر هر نگاشت غیر انبساطی $T : C \to C$ یک نقطه ی ثابت در C داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۲۳ گوییم C خاصیت نقطه ی ثابت شرطی برای نگاشت های غیر انبساطی دارد هرگاه برای هر نگاشت غیر انبساطی $T : C \to C$ ، T نقطه ی ثابتی در C نداشته باشد یا T یک نقطه ی ثابت در هر زیر مجموعه ی محدب،بسته،کراندار،ناتهی و تحت T پایا از C داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۲۴ مجموعه ی ناتهی C را فشرده ی ضعیف موضعی گوییم هرگاه هر زیر مجموعه ی محدب،بسته و کراندار C فشرده ی ضعیف باشد.

قضیه ۱.۱.۱۳ فرض کنید C یک زیر مجموعه ی محدب از فضای برداری نرم دار X باشد. C بسته است اگر و تنها اگر به طور ضعیف بسته باشد.

اثبات:به مرجع [۳۷] رجوع کنید.

قضیه ۱.۱.۱٤ هر زیر مجموعه ی فشرده ی ضعیف از فضای باناخ X ،کراندار است.

اثبات:به مرجع [۳۷] رجوع کنید.

---

[۱] Linear span

۲.۱ وجود نقطه ی ثابت برای نگاشت های غیر انبساطی

قضیه ۱.۲.۱ :فرض کنید E یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب و T یک نگاشت غیر انبساطی از زیر مجموعه ی محدب،بسته و کراندار C از E به توی C باشد؛در این صورت T یک نقطه ی ثابت دارد.

اثبات:فرض کنیم Φ خانواده ی زیر مجموعه های محدب،بسته و ناتهی از C باشد که تحت T پایا هستند؛ یعنی برای $C_\alpha \in \Phi$ ، $T(C_\alpha) \subseteq C_\alpha$.

چون C عضو Φ است پس Φ ناتهی است. Φ را با رابطه ی شمول مرتب می کنیم که در این حالت مجموعه ای جزئاً مرتب می شود.از آنجا که اشتراک عناصر C_α از یک خانواده ی مرتب خطی از Φ خود زیر مجموعه ای محدب وبسته از C است که تحت T پایا و ناتهی است(زیرا همه ی C_α ها زیر مجموعه های فشرده ی ضعیف از فضای انعکاسی E می باشند)پس Φ یک عنصر مینیمال مانند $C_\circ$ دارد.

کافی است نشان دهیم $C_\circ$ دقیقاً یک عنصر دارد.چون $C_\circ$ ناتهی است پس کافی است نشان دهیم که $C_\circ$ دو نقطه ی مجزا ندارد.فرض کنیم که اینگونه باشد. $d_\circ$ را قطر $C_\circ$ در نظر می گیریم.نقاط $x_۱, x_۲$ از $C_\circ$ را طوری اختیار می کنیم که

$$\|x_۱ - x_۲\| \geq d\circ/۲$$

x را وسط خط واصل از $x_۱$ به $x_۲$ می گیریم.چون $C_\circ$ محدب است پس $x \in C_\circ$.حال برای هر $y \in C_\circ$ ، $x-y$ نقطه ی وسط خط واصل از $x_۱ - y$ به $x_۲ - y$ می باشد.همچنین

$$\|x_۱ - y\| \leq d_\circ \text{ و } \|x_۲ - y\| \leq d\circ$$

چون E به طور یکنواخت محدب است عدد $q > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$\|x-y\| \leq (۱-q)d\circ < d\circ$$

(زیرا $\|x_۱ - y - (x_۲ - y)\| = \|x_۱ - x_۲\| \geq d\circ/۲$).

قرار می دهیم $d_۱ = (۱-q)d_\circ$ و $C_۲ = \bigcap_{y \in C\circ} \{u | u \in C_\circ, \|u-y\| \leq d_۱\}$

C_2 زیر مجموعه ی محدب و بسته ی C_0 است،زیرا اشتراک مجموعه های محدب وبسته می باشد و چون x در C_2 قرار دارد بنابراین C_2 ناتهی نیز می باشد.از طرفی C_2 زیر مجموعه ی محض C_0 است،زیرا $d_1 < d_0$.

نشان می دهیم که C_2 تحت T پایاست؛فرض کنیم $u \in C_2$ و $y \in C_0$. برای هر $\varepsilon > 0$ ترکیب خطی محدب از $T(z_j), z_j \in C_0$ وجود دارد به طوری که

$$\left\| y - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(z_j) \right\| < \varepsilon \qquad 0 < \lambda < 1, \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\|Tu - y\| &= \left\| Tu - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(z_j) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(z_j) - y \right\| \\
&\le \left\| Tu - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(z_j) \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(z_j) - y \right\| \\
&\le \varepsilon + \left\| Tu - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j T(z_j) \right\| \\
&\le \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \|Tu - Tz_j\| + \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

از طرفی $\|Tu - Tz_j\| \le \|u - z_j\| \le d_1$،زیرا T غیر انبساطی است و u در C_2 قرار دارد.پس

$$\|Tu - y\| \le \sum_{j=1}^{r} \lambda_j d_1 + \varepsilon$$

چون ε دلخواه بود پس $\|Tu - y\| \le d_1$ ،یعنی Tu در C_2 قرار دارد؛اما C_0 عنصر مینیمال Φ است .بنابراین به تناقض با فرض این که C_0 دست کم دو عضو دارد رسیدیم.

در نتیجه $C_0 = \{x_0\}$ و $Tx_0 = x_0$. □

فرض کنیم C یک زیر مجموعه ی کراندار از یک فضای باناخ X باشد؛قرار می دهیم

$$r_x(C) = \sup\{\|x - y\| : y \in C\}, x \in C$$

$$r(C) = \inf\{r_x(C) : x \in C\}$$

$$Z(C)=\{x\in C: r_x(C)=r(C)\}$$

لم ۱.۲.۱ فرض کنید C یک زیر مجموعه ی محدب و فشرده ی ضعیف از یک فضای باناخ X باشد؛در این صورت $Z(C)$ یک زیر مجموعه ی محدب،بسته و ناتهی از C می باشد.

اثبات:برای $x\in C$ قرار می دهیم:

$$C_n(x)=B_{r(C)+1/n}(x)=\{y\in C:\|x-y\|\le r(C)+1/n\}, n\in N$$

$C_n(x)$ زیر مجموعه ی محدب،بسته و ناتهی از C می باشد و در نتیجه $C_n=\bigcap_{x\in C}C_n(x)$ هم زیر مجموعه ی محدب،بسته و ناتهی از C است و برای هر $n\in N$ ، $C_{n+1}\subset C_n$.

چون C فشرده ی ضعیف است پس $Z(C)=\bigcap_{n\in N}C_n\neq\phi$ □

لم ۲.۲.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و C زیر مجموعه ی محدب و فشرده ی ضعیف از X با $diam(C)>0$ باشد؛اگر C ساختار نرمال داشته باشد در این صورت

$$diam(Z(C))<diam(C)$$

اثبات:چون C ساختار نرمال دارد پس دست کم یک نقطه ی غیر قطری $x_0\in C$ وجود دارد به طوری

که $$r_{x_0}(C)=\sup\{\|x_0-x\|:x\in C\}<diam(C)$$

فرض کنیم u,v دو نقطه از $Z(C)$ باشند،پس $r_u(C)=r_v(C)=r(C)$.

چون $$\|u-v\|\le\sup\{\|u-x\|:x\in Z(C)\}$$

$$\le r(C)\le r_{x_0}(C)<diam(C)$$

پس

$$diam(Z(C))<diam(C)$$ □

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ی محدب،فشرده ی ضعیف، ناتهی و دارای ساختار نرمال از X باشد؛در این صورت هر نگاشت غیر انبساطی $T:C\to C$ یک نقطه ی ثابت دارد.