دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

نظریه‌های کوهمولوژی بر اساس مدول‌های گورنستین انژکتیو

نگارش:

کتایون نوذری

استاد راهنما:

دکتر محمدعلی اسم‌خانی

بهمن ۱۳۸۹

چکیده

در این رساله، کوهمولوژی نسبی و تیت از مدول‌های با بعد گورنستین انژکتیو متناهی مطالعه می‌شوند. با استفاده از این نظریه‌های کوهمولوژی، مدول‌های کوهمولوژی موضعی گروتندیک متفاوتی ارایه می‌کنیم که مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبی و تیت نامیده می‌شوند. با به‌کار بردن دنباله‌ی دقیق آوراموف—مارتسینکوفسکی، نشان می‌دهیم که این کوهمولوژی‌های موضعی یک ارتباط قوی با مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته که به‌وسیله‌ی هرزوگ معرفی شد، دارند. در مورد برخی از ویژگی‌های این مدول‌ها بحث کرده و به نتایجی از صفر شدن و صفر نشدن آن‌ها خواهیم رسید.

واژگان کلیدی: هم‌تحلیل گورنستین انژکتیو، مدول‌های کوهمولوژی موضعی، کوهمولوژی تیت، حلقه‌های گورنستین، بعد گورنستین.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

خداوند بزرگ سپاست می‌گذارم که توفیق تمرین در نوشتن این رساله را به‌من اعطا نمودی، باشد که همواره در راهی که تو رهرو آن هستی قدم بردارم.

از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی‌های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای دکتر محمدعلی اسم‌خانی در راستای انجام این رساله، کمال تشکر و قدردانی را دارم و برای ایشان موفقیت و سربلندی در همه‌ی عرصه‌های زندگی را از درگاه ایزد منان خواستارم.

از پدر و مادر عزیزم و دامون یگانه برادرم که در طول زندگی همواره مشوق و پشتیبان من بوده‌اند، سپاسگزارم.

چکیده

در این رساله، کوهمولوژی نسبی و تیت از مدول‌های با بعد گورنستین انژکتیو متناهی مطالعه می‌شوند. با استفاده از این نظریه‌های کوهمولوژی، مدول‌های کوهمولوژی موضعی گروتندیک متفاوتی ارایه می‌کنیم که مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبی و تیت نامیده می‌شوند. با به‌کار بردن دنباله‌ی دقیق آوراموف—مارتسینکوفسکی، نشان می‌دهیم که این کوهمولوژی‌های موضعی یک ارتباط قوی با مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته که به‌وسیله‌ی هرزوگ معرفی شد، دارند. در مورد برخی از ویژگی‌های این مدول‌ها بحث کرده و به نتایجی از صفر شدن و صفر نشدن آن‌ها خواهیم رسید.

واژگان کلیدی: هم‌تحلیل گورنستین انژکتیو، مدول‌های کوهمولوژی موضعی، کوهمولوژی تیت، حلقه‌های گورنستین، بعد گورنستین.

فهرست مندرجات

فهرست مندرجات

مقدمه

فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری جابه‌جایی باشد. نظریه‌ی G–بعد از یک مدول متناهی مولد روی چنین حلقه‌ای، توسط آوسلندر[1] و بریگر [2] [۱] بیان شد. مدول‌های از G–بعد صفر روی یک حلقه‌ی گورنستین، همان مدول‌های کوهن–مکالی ماکسیمال می‌باشند. آوراموف[3] و مارتسینکوفسکی [4] [۲] نظریه‌های کوهمولوژی نسبی و تیت [5] را در زیررسته‌ی مدول‌های از G–بعد متناهی بررسی کردند و به بیان ارتباطی میان سه نظریه‌ی کوهمولوژی مطلق، نسبی و تیت پرداختند. موضوع کوهمولوژی نسبی توسط مک‌لین [6] [۱۸] مطرح شد و در سال ۱۹۶۵ توسط آیلنبرگ [7] و مور [8] [۹]، مورد بررسی بیشتر قرار گرفت. با استفاده از تحلیل‌های کامل، نظریه‌ی کوهمولوژی دیگر، یعنی کوهمولوژی تیت معرفی شد که بعدها در زمینه‌ی کاری افرادی چون بوخوایز[9] [۵]، کرونیک[10] و کرافولر[11] [۸] قرار گرفت. نتیجه‌ی اصلی کار آوراموف و مارتسینکوفسکی ایجاد یک ارتباط قوی بین این نظریه‌ها است.

ایناکس [12] و همکارانش مدول‌های از G–بعد صفر را گورنستین پروژکتیو نامیدند و نقش این مدول‌ها را در یک نظریه‌ی کوهمولوژی نسبی بیان کردند.[۱۰]. نظریه‌های کوهمولوژی مورد بحث، مفهوم پروژکتیو و انژکتیو معمولی را تعمیم می‌دهند.

در این رساله با دوگان کردن روشی که آنها مدول‌های گورنستین پروژکتیو را تعریف کردند، مدول‌های گورنستین انژکتیو معرفی می‌شوند، سپس یک نظریه‌ی کوهمولوژی نسبی براساس این مدول‌ها به‌دست می‌آید و با استفاده از

[1] M. Auslander
[2] M. Bridger
[3] L. L. Avramov
[4] A. Martsinkovsky
[5] Tate
[6] S. MacLane
[7] S. Eilenberg
[8] J. C. Moore
[9] R. O. Buchweitz
[10] J. Cronick
[11] P. H. Kropholler
[12] E. Enochs

صفر شدن تابعگون‌های وابسته به این نظریه‌ی کوهمولوژی، یک ثابت عددی (بعد گورنستین انژکتیو) ارایه می‌شود. هم‌چنین برای هر مدول از بعد گورنستین انژکتیو متناهی، هم‌تحلیل کاملی ساخته می‌شود که با استفاده از آن، نظریه‌ی کوهمولوژی تیت تعریف می‌شود. به طور کلی ساختار اصلی این رساله به‌صورت زیر است.

بعد از مقدمه و بیان مفاهیم اولیه، فصل ۲ به تعریف مدول‌های گورنستین انژکتیو، بعد گورنستین انژکتیو و مطالب اصلی در مورد این مدول‌ها می‌پردازد. هم‌چنین هم تحلیل‌های $\mathcal{GI}$−سره معرفی می‌شوند.

در فصل ۳، ابتدا با استفاده از هم‌تحلیل‌های $\mathcal{GI}$−سره که در فصل ۲ تعریف شدند، نظریه‌ی کوهمولوژی نسبی بیان می‌شود. سپس ویژگی‌های کوهمولوژیکی تابعگون وابسته به این نظریه مورد بررسی قرار می‌گیرد. پس از تعریف هم‌تحلیل کامل، نشان داده می‌شود که اگر بعد گورنستین انژکتیو مدولی متناهی باشد، آنگاه یک هم‌تحلیل کامل برای مدول وجود دارد. با توجه به این موضوع و با استفاده از مدولی که دارای بعد گورنستین انژکتیو متناهی است، نظریه‌ی کوهمولوژی تیت تعریف می‌شود. در پایان این فصل، مانند کار آوراموف و مارتسینکوفسکی یک ارتباط قوی بین سه نظریه‌ی کوهمولوژی مطلق، نسبی و تیت بر اساس مدول‌های با بعد گورنستین انژکتیو متناهی بیان می‌شود.

فصل ۴، با مساله‌ی تعادل تابعگون دو متغیره‌ی $Hom(-,-)$ سروکار دارد. به این معنی که با استفاده از یک تحلیل (تحلیل کامل) برای متغیر اول، نظریه‌ی کوهمولوژی نسبی (تیت) توسط آوراموف و مارتسینکوفسکی تعریف شد. هم‌چنین در فصل ۳، با استفاده از یک هم‌تحلیل (هم‌تحلیل کامل) برای متغیر دوم، نظریه‌ی کوهمولوژی نسبی (تیت) دیگری معرفی می‌شود. این فصل به بیان ارتباط بین این نظریه‌ها از متغیر اول و متغیر دوم می‌پردازد.

فصل ۵، کاربرد جالبی از نتایج فصول قبل ارایه داده و به تعمیمی از نظریه‌ی کوهمولوژی گروتندیک [۱۳] [۱۴] می‌رسد. نظریه‌ی کوهمولوژی گروتندیک برای تعداد زیادی از ریاضیدانانی که در زمینه‌ی نظریه‌های حلقه‌های نوتری جابه‌جایی کار می‌کنند، ضروری و اجتناب‌ناپذیر است. با استفاده از هم‌تحلیل‌های $\mathcal{GI}$−سره، نظریه‌ی کوهمولوژی موضعی گورنستین تعریف شده و با کمک هم‌تحلیل‌های کامل، نظریه‌ی کوهمولوژی موضعی تیت بیان می‌شود. هم‌چنین این فصل به ارتباط بین این دو نظریه‌ی کوهمولوژی موضعی جدید و کوهمولوژی موضعی تعمیم

[۱۳] A. Grothendieck

یافته‌ی معرفی شده توسط هرزوگ [14][۱۵] می‌پردازد.

فصل ٦، نتایجی در مورد صفر شدن یا نشدن مدول‌های کوهمولوژی موضعی، روی حلقه‌های گورنستین ارایه می‌دهد.

[14] J. Herzog

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ همبافت‌ها

تعریف ۱.۱.۱ *i*) یک همبافت $\mathbf{X}$، یک دنباله از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها به‌صورت $\mathbf{X}: \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$ است که برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ یا به‌طور معادل $Im\ \partial_{n+1} \subseteq Ker\ \partial_n$.

ii) فرض کنید $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ دو همبافت باشند. یک نگاشت زنجیری، یک دنباله از همریختی‌ها مانند $f_n : X_n \longrightarrow Y_n$ است به‌طوری‌که نمودار

$$\begin{array}{l} \mathbf{X}: \cdots \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ \qquad\qquad \downarrow f_{n+1} \quad\ \downarrow f_n \quad\ \downarrow f_{n-1} \\ \mathbf{Y}: \cdots \longrightarrow Y_{n+1} \longrightarrow Y_n \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ جابه‌جایی باشد.

iii) اگر $(\mathbf{X},\partial)$ یک همبافت باشد، $n-$امین مدول هومولوژی به‌صورت

$$H_n(X)=\frac{Ker\ \partial_n}{Im\ \partial_{n+1}}$$

تعریف می‌شود.

(iii) فرض کنید $f:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ یک نگاشت زنجیری باشد. در این‌صورت f هموتوپ [1] صفر نامیده می‌شود، هرگاه هم‌ریختی‌های $s_n:X_n\longrightarrow Y_{n+1}$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر n، داشته باشیم $f_n=\partial^Y_{n+1}s_n+s_{n-1}\partial^X_n$.

اگر f و g دو نگاشت زنجیری از $\mathbf{X}$ به $\mathbf{Y}$ باشند، آنگاه $f-g$ هموتوپ صفر است و می‌نویسیم $f\sim g$ هرگاه $f-g$ هموتوپ صفر باشد.

تعریف ۲.۱.۱ i) در یک همبافت به صورت $\mathbf{X}: \cdots\longrightarrow X_n\xrightarrow{\partial_n}X_{n-1}\longrightarrow\cdots$، $i-$ امین مدول سی‌زی‌جی از $\mathbf{X}$ عبارت است از $\Omega^i\mathbf{C}= Coker\ \partial^{\mathbf{X}}_{i+1}$.

ii) $\Sigma^i\mathbf{X}$، $i-$ امین انتقال از $\mathbf{X}$ است به طوری که مولفه‌ی n ام آن مساوی با $\mathbf{X}_{n-i}$ است و $\partial^{\Sigma^i\mathbf{X}}_n=(-1)^i\partial^{\mathbf{X}}_{n-i}$.

iii) $\mathbf{X}_{<i}$ یا $\mathbf{X}_{\leq i-1}$ برای $n<i$ مساوی $\mathbf{X}_n$ و برای $n\geq i$ مساوی صفر است.

iv) اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ دو همبافت باشند، همریختی $\beta:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ از درجه‌ی i که $i\in\mathbb{Z}$، یک دنباله از نگاشت های $\beta_n:X_n\longrightarrow Y_{n+i}$ برای هر $n\in\mathbb{Z}$ است.

v) یک شبه‌یکریختی، یک ریختار $\beta:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ با $H_n(\beta):H_n(\mathbf{X})\longrightarrow H_n(\mathbf{Y})$ است که برای هر n، H_n دوسویی باشد.

vi) یک هم‌تحلیل (از طول کوچکتر یا مساوی l) از یک مدول M، یک شبه‌یکریختی $\gamma:M\longrightarrow\mathbf{E}$ با $E_n=0$ برای هر $n>0$ (و $E_n=0$ برای هر $n<-l$) است به‌طوری‌که دنباله‌ی دقیق

$$E^+:0\longrightarrow E_0\longrightarrow E_{-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow E_{-n}\longrightarrow E_{-n-1}\longrightarrow\cdots$$

حاصل شود. اگر از قرارداد $E_{-i}=E^i$ استفاده کنیم، هم‌تحلیل را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$E^+:0\longrightarrow E^0\longrightarrow E^1\longrightarrow\cdots\longrightarrow E^n\longrightarrow E^{n+1}\longrightarrow\cdots.$$

[1] Homotop

(vii) برای هر $R-$مدول چپ یا راست M، دوگان M را با M^* نشان داده و به‌صورت $M^* = Hom_R(M,R)$ تعریف می‌کنیم. دوگان همبافتی مثل $\mathbf{E}: \cdots \longrightarrow E_n \xrightarrow{\partial_n} E_{n-1} \longrightarrow \cdots$ به‌صورت

$$\mathbf{E}^* : \cdots \longrightarrow (E_{-n-1})^* \xrightarrow{(\partial_{-n})^*} (E_{-n})^* \longrightarrow \cdots$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱ [۱۲صفحه‌ی۷۶] برای هر همبافت $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ ، همبافت $Hom_R(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ از $\mathbb{Z}-$ مدول‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$Hom_R(\mathbf{X},\mathbf{Y})_n = \prod_{i\in\mathbb{Z}} Hom_R(X_i, Y_{i+n}) \ .$$

$\partial_n^{Hom_R(X,Y)} : Hom_R(\mathbf{X},\mathbf{Y})_n \longrightarrow Hom_R(\mathbf{X},\mathbf{Y})_{n-1}$ با $\partial_n^{Hom_R(X,Y)}(f) = (\partial_{i+n}^Y f_i - (-1)^n f_{i-1}\partial_i^X)_{i\in\mathbb{Z}}$ برای $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Hom_R(\mathbf{X},\mathbf{Y})_n$ در نظر گرفته می‌شود.

بنابراین هر $f \in Hom_R(\mathbf{X},\mathbf{Y})_n$ به‌صورت یک خانواده‌ی $(f_i : X_i \longrightarrow Y_{i+n})_{i\in\mathbb{Z}}$ از $R-$همریختی‌هاست.

لم ۱.۱.۱ برای هر $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Hom_R(\mathbf{X},\mathbf{Y})_n$ ، داریم

(i) [۱۲صفحه‌ی۷۶] $f \in Ker\ \partial_0^{Hom_R(X,Y)}$ اگر و تنها اگر f یک نگاشت زنجیری از $\mathbf{X}$ به $\mathbf{Y}$ باشد،

(ii) [۱۲صفحه‌ی۷۶] $f \sim 0$ اگر وتنها اگر $f \in Im\ \partial_1^{Hom_R(X,Y)}$ (منظور از ۰، ریختار صفر $0 : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ است).

برهان . (i) فرض کنید $f \in Ker\ \partial_0^{Hom_R(X,Y)}$ ، پس $\partial_0^{Hom_R(X,Y)}(f) = (\partial_i^Y f_i - f_{i-1}\partial_i^X)_{i\in\mathbb{Z}} = 0$. بنابراین $\partial_i^Y f_i = f_{i-1}\partial_l^X$ برای هر $i \in \mathbb{Z}$. درنتیجه با توجه به تعریف ۲.۱.۱، $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ یک نگاشت زنجیری از $\mathbf{X}$ به $\mathbf{Y}$ است. حال فرض کنید f یک نگاشت زنجیری از $\mathbf{X}$ به $\mathbf{Y}$ باشد، بنابراین $\partial_i^Y f_i = f_{i-1}\partial_i^X$ برای هر $i \in \mathbb{Z}$. پس $\partial_0^{Hom_R(X,Y)}(f) = 0$. یعنی $f \in Ker\ \partial_0^{Hom_R(X,Y)}$.

(۲) فرض کنید $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Im\ \partial_1^{Hom_R(X,Y)}$. پس $g = (g_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Hom_R(X,Y)_1$ موجود است که

$\partial_1^{Hom_R(X,Y)}(g) = f$. یعنی $(\partial_{i+1}^Y g_i + g_{i-1}\partial_i^X)_{i\in\mathbb{Z}} = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ برای هر $i \in \mathbb{Z}$. کافی است قرار دهیم $(s_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. بنابراین $f \sim 0$.

حال فرض کنید $f \sim 0$. پس هم‌ریختی‌های $s_i : X_i \longrightarrow Y_{i+1}$ موجودند که $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (\partial_{i+1}^Y s_i + s_{i-1}\partial_i^X)_{i\in\mathbb{Z}}$ برای هر i. بنابراین $(f_i) = \partial_1^{Hom_R(X,Y)}(s)$ به‌طوری‌که $s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Hom(\mathbf{X},\mathbf{Y})_1$. درنتیجه $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Im\ \partial_1^{Hom_R(X,Y)}$.

□

لم ۲.۱.۱ [۲] فرض کنید $\beta : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ یک ریختار از همبافت‌ها باشد.

(۱) $\mathbf{P}$ را همبافتی درنظر بگیرید که $Hom_R(\mathbf{P},\beta) : Hom_R(\mathbf{P},\mathbf{B}) \longrightarrow Hom_R(\mathbf{P},\mathbf{C})$ شبه‌یکریختی باشد. برای هر $\gamma : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{C}$ یک $\alpha : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$ موجود است که $\gamma \sim \beta\ \alpha$ (حتی $\gamma = \beta\ \alpha$ هرگاه $Hom_R(\mathbf{P},\beta)$ پوشا باشد). اگر $\gamma' : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{C}$ و $\alpha' : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$ در شرایط $\gamma' \sim \gamma$ و $\gamma' \sim \beta\ \alpha'$ صدق کنند، آنگاه $\alpha' \sim \alpha$.

(۲) $\mathbf{I}$ را همبافتی درنظر بگیرید که $Hom_R(\beta,\mathbf{I})$: $Hom_R(\mathbf{C},\mathbf{I}) \longrightarrow Hom_R(\mathbf{B},\mathbf{I})$ شبه‌یکریختی باشد. برای هر $\alpha : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{I}$ یک $\gamma : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{I}$ موجود است که $\alpha \sim \gamma\ \beta$ (حتی $\gamma\ \beta = \alpha$ هرگاه $Hom_R(\beta,\mathbf{I})$ پوشا باشد). اگر $\alpha' : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{I}$ و $\gamma' : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{I}$ در شرایط $\alpha' \sim \alpha'$ و $\gamma\ \beta \sim \alpha'$ صدق کنند، آنگاه $\gamma' \sim \gamma$.

برهان . (۱) فرض کنید $\beta : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ نگاشت زنجیری و $\mathbf{P}$ یک همبافت باشد. نمودار زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{array}{l}
Hom_R(\mathbf{P},\mathbf{B}) : \cdots \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i,B_{i+1}) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i,B_i) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i,B_{i-1}) \longrightarrow \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \lambda_1 \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \lambda_0 \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \lambda_{-1} \\
Hom_R(\mathbf{P},\mathbf{C}) : \cdots \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i,C_{i+1}) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i,C_i) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i,C_{i-1}) \longrightarrow \cdots .
\end{array}$$

$\lambda_n : \sqcap_i Hom_R(P_i,B_{i+n}) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i,C_{i+n})$ را به‌صورت $\lambda_n((f_i)) = (\beta_{i+n} f_i)$ و $\partial_n^{Hom_R(P,B)} : \sqcap_i Hom_R(P_i,B_{i+n}) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i,B_{i+n-1})$ را با $\partial_n((f_i)) = (\partial_{i+n}^B f_i - (-1)^n f_{i-1}\partial_i^P)$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم مربع

$$\sqcap_i Hom_R(P_i, B_{i+n}) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i, B_{i+n-1})$$

$$\downarrow \lambda_n \qquad\qquad\qquad \downarrow \lambda_{n-1}$$

$$\sqcap_i Hom_R(P_i, C_{i+n}) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(P_i, C_{i+n-1})$$

جابه‌جایی است. فرض کنید $(f_i) \in \sqcap_i Hom_R(P_i, B_{i+n})$.

$$\lambda_{n-1}\ \partial_n^{Hom_R(P,B)}((f_i)) = \lambda_{n-1}((\partial_{i+n}^B f_i - (-1)^n f_{i-1}\partial_i^P)) = (\beta_{i+n-1}\partial_{i+n}^B f_i - (-1)^n \beta_{i+n-1} f_{i-1}\partial_i^P)$$

$$\partial_n^{Hom_R(P,C)}\ \lambda_n((f_i)) = \partial_n^{Hom_R(P,C)}((\beta_{i+n} f_i)) = (\partial_{i+n}^C \beta_{i+n} f_i - (-1)^n \beta_{i+n-1} f_{i-1}\partial_i^P)$$

بنابراین $\lambda_{n-1}\ \partial_n^{Hom_R(P,B)} = \partial_n^{Hom_R(P,C)}\lambda_n$. نمودار

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{P} \\ & & \downarrow \gamma \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{C} \end{array}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید (λ_i)، شبه‌یکریختی باشد. در این‌صورت نگاشت یکریختی

$$\bar{\lambda}_\circ : H_\circ Hom_R(\mathbf{P},\mathbf{B}) = \frac{Ker\ \partial_\circ^{Hom_R(P,B)}}{Im\ \partial_1^{Hom_R(P,B)}} \longrightarrow H_\circ Hom_R(\mathbf{P},\mathbf{C}) = \frac{Ker\ \partial_\circ^{Hom_R(P,C)}}{Im\ \partial_1^{Hom_R(P,C)}}$$

حاصل می‌شود. بنابراین برای هر $\gamma \in Ker\partial_\circ^{Hom_R(P,C)}$ ، $\alpha \in Ker\ \partial_\circ^{Hom_R(P,B)}$ موجود است که $\beta\alpha - \gamma \in Im\ \partial_1^{Hom_R(P,C)}$. در واقع α یک نگاشت زنجیری از $\mathbf{P}$ به $\mathbf{B}$ است. لذا $\beta\alpha - \gamma$ هموتوپ صفر است. پس $\beta\alpha \sim \gamma$.

فرض کنید $\gamma' : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{C}$ و $\alpha' : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{B}$ در شرایط $\gamma \sim \gamma'$ و $\beta\alpha' \sim \gamma'$ صدق کند. درنتیجه $\beta\alpha' \sim \gamma$ ولذا $\beta\alpha' \sim \beta\alpha$. یعنی $\beta(\alpha' - \alpha) \sim \circ$. پس $(\alpha' - \alpha) + Im\ \partial_1^{Hom_R(P,B)} \in Ker\ \bar{\lambda}_\circ$. درنتیجه $\alpha' - \alpha \in Im\ \partial_1^{Hom_R(P,B)}$. پس $\alpha' - \alpha \sim \circ$. بنابراین $\alpha' \sim \alpha$.

حال فرض کنید $Hom_R(\mathbf{P},\beta)$ پوشا باشد.

چون $\beta\alpha - \gamma \in Im\ \partial_1^{Hom_R(P,C)}$، پس $\delta_i : P_i \longrightarrow C_{i+1}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\beta_i\alpha_i - \gamma_i = \partial_{i+1}^C\delta_i + \delta_{i-1}\partial_i^P$.

بنابراین $(\delta_i) \in \sqcap_i Hom_R(P_i, C_{i+1})$. چون $Hom_R(\mathbf{P},\beta)$ پوشاست، $(\eta_i) \in \sqcap_i Hom_R(P_i, B_{i+1})$ موجود است که به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، $\delta_i = \beta_{i+1}\eta_i$. بنابراین

$$\beta_i\alpha_i - \gamma_i = \partial^C_{i+1}\beta_{i+1}\eta_i + \beta_i\eta_{i-1}\partial^P_i = \beta_i\partial^B_{i+1}\eta_i + \beta_i\eta_{i-1}\partial^P_i \ .$$

پس به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، داریم $\beta_i\alpha_i - \beta_i\partial^B_{i+1}\eta_i - \beta_i\eta_{i-1}\partial^P_i = \gamma_i$. بنابراین $\beta_i(\alpha_i - \partial^B_{i+1}\eta_i - \eta_{i-1}\partial^P_i) = \gamma_i$. قرار می‌دهیم $\theta_i = \alpha_i - \partial^B_{i+1}\eta_i - \eta_{i-1}\partial^P_i$. پس نمودار

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P} & \\ \theta \swarrow & & \downarrow \gamma \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{C} \end{array}$$

حاصل می‌شود. کافی است نشان دهیم مربع

$$\begin{array}{ccc} P_{i+1} & \longrightarrow & P_i \\ \theta_{i+1} \downarrow & & \downarrow \theta_i \\ B_{i+1} & \longrightarrow & B_i \end{array}$$

جابه‌جایی است.

$$\theta_i\partial^P_{i+1} = \alpha_i\partial^P_{i+1} - \partial^B_{i+1}\eta_i\partial^P_{i+1} - \eta_{i-1}\partial^P_i\partial^P_{i+1} = \alpha_i\partial^P_{i+1} - \partial^B_{i+1}\eta_i\partial^P_{i+1}$$

$$\partial^B_{i+1}\theta_{i+1} = \partial^B_{i+1}\alpha_{i+1} - \partial^B_{i+1}\partial^B_{i+2}\eta_{i+1} - \partial^B_{i+1}\eta_i\partial^P_{i+1} = \partial^B_{i+1}\alpha_{i+1} - \partial^B_{i+1}\eta_i\partial^P_{i+1} = \alpha_i\partial^P_{i+1} - \partial^B_{i+1}\eta_i\partial^P_{i+1} \ .$$

بنابراین مربع فوق جابه‌جایی است و حکم ثابت می‌شود.

(۲) حال فرض کنید $\beta : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ یک نگاشت زنجیری و $\mathbf{I}$ یک همبافت باشد. نمودار

$$\begin{array}{llllllll} Hom_R(\mathbf{C},\mathbf{I}): \cdots \longrightarrow & \sqcap_i Hom_R(C_i, I_{i+1}) & \longrightarrow & \sqcap_i Hom_R(C_i, I_i) & \longrightarrow & \sqcap_i Hom_R(C_i, I_{i-1}) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \lambda_0 & & \downarrow \lambda_{-1} & \\ Hom_R(\mathbf{B},\mathbf{I}): \cdots \longrightarrow & \sqcap_i Hom_R(B_i, I_{i+1}) & \longrightarrow & \sqcap_i Hom_R(B_i, I_i) & \longrightarrow & \sqcap_i Hom_R(B_i, I_{i-1}) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

القا می‌شود. $\lambda_n : \sqcap_i Hom_R(C_i, I_{i+n}) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(B_i, I_{i+n})$ را به‌صورت $\lambda_n((f_i)) = (f_i\beta_i)$ و

$\partial_n^{Hom_R(C,I)} : \sqcap_i Hom_R(C_i, I_{i+n}) \longrightarrow \sqcap_i Hom_R(C_i, I_{i+n-1})$ را با $\partial_n((f_i)) : (\partial^I_{i+n} f_i - (-1)^n f_{i-1}\partial^C_i)$

تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم مربع

$$\begin{array}{ccc} \sqcap_i Hom_R(C_i, I_{i+n}) & \longrightarrow & \sqcap_i Hom_R(C_i, I_{i+n-1}) \\ \downarrow \lambda_n & & \downarrow \lambda_{n-1} \\ \sqcap_i Hom_R(B_i, I_{i+n}) & \longrightarrow & \sqcap_i Hom_R(B_i, I_{i+n-1}) \end{array}$$

جابه‌جایی است. فرض کنید $(f_i) \in \sqcap_i Hom_R(C_i, I_{i+n})$.

$$\lambda_{n-1}\ \partial_n^{Hom_R(C,I)}((f_i)) = \lambda_{n-1}((\partial^I_{i+n} f_i - (-1)^n f_{i-1}\partial^C_i)) = (\partial^I_{i+n} f_i\beta_i - (-1)^n f_{i-1}\partial^C_i\beta_i)$$

$$\partial_n^{Hom_R(B,I)}\ \lambda_n((f_i)) = \partial_n^{Hom_R(B,I)}((f_i\beta_i)) = (\partial^I_{i+n} f_i\beta_i - (-1)^n f_{i-1}\beta_{i-1}\partial^B_i)$$

نمودار

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{C} \\ \downarrow \alpha & & \\ \mathbf{I} & & \end{array}$$

را درنظر بگیرید. فرض کنید (λ_i)، شبه‌یکریختی باشد. بنابراین نگاشت یکریختی

$$\bar{\lambda}_0 : H_0 Hom_R(\mathbf{C}, \mathbf{I}) = \frac{Ker\ \partial_0^{Hom_R(C,I)}}{Im\ \partial_1^{Hom_R(C,I)}} \longrightarrow H_0 Hom_R(\mathbf{B}, \mathbf{I}) = \frac{Ker\ \partial_0^{Hom_R(B,I)}}{Im\ \partial_1^{Hom_R(B,I)}}$$

حاصل می‌شود. پس برای هر $\alpha \in Ker\partial_0^{Hom_R(B,I)}$ ، $\gamma \in Ker\partial_0^{Hom_R(C,I)}$ موجود است که $\gamma\beta - \alpha \in Im\partial_1^{Hom_R(B,I)}$. درواقع γ یک نگاشت زنجیری از $\mathbf{C}$ به $\mathbf{I}$ است. لذا $\gamma\beta - \alpha$ هموتوپ صفر است و درنتیجه $\gamma\beta \sim \alpha$.

حال فرض کنید $\alpha' : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{I}$ و $\gamma' : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{I}$ در شرایط $\alpha \sim \alpha'$ و $\gamma'\beta \sim \alpha'$ صدق کند. درنتیجه $\gamma'\beta \sim \gamma\beta$ ، یعنی $(\gamma' - \gamma)\beta \sim 0$. پس $\gamma' - \gamma \in Ker\ \bar{\lambda}_0$. بنابراین $\gamma' - \gamma \in Im\ \partial_1^{Hom_R(C,I)}$ ولذا $\gamma' - \gamma \sim 0$. پس $\gamma \sim \gamma'$.

فرض کنید $Hom_R(\beta,\mathbf{I})$ پوشا باشد.

چون $\gamma\beta-\alpha \in Im\partial_1^{Hom_R(B,I)}$، پس $\delta_i : B_i \longrightarrow I_{i+1}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\gamma_i\beta_i-\alpha_i=\partial^I_{i+1}\delta_i+\delta_{i-1}\partial^B_i$.

بنابراین $(\delta_i)\in \sqcap_i Hom_R(B_i,I_{i+1})$. چون $Hom_R(\beta,\mathbf{I})$ پوشاست، $(\eta_i)\in\sqcap_i Hom_R(C_i,I_{i+1})$ موجود است که به ازای هر $i\in\mathbb{Z}$، $\delta_i=\eta_i\beta_i$. پس

$$\gamma_i\beta_i-\alpha_i=\partial^I_{i+1}\eta_i\beta_i+\eta_{i-1}\beta_{i-1}\partial^B_i=\partial^I_{i+1}\eta_i\beta_i+\eta_{i-1}\partial^C_i\beta_i\ .$$

پس به ازای هر $i\in\mathbb{Z}$ داریم $\gamma_i\beta_i-\partial^I_{i+1}\eta_i\beta_i-\eta_{i-1}\partial^C_i\beta_i=\alpha_i$. بنابراین $(\gamma_i-\partial^I_{i+1}\eta_i-\eta_{i-1}\partial^C_i)\beta_i=\alpha_i$.

قرار می‌دهیم $\theta_i=\gamma_i-\partial^I_{i+1}\eta_i-\eta_{i-1}\partial^C_i$. یعنی نمودار

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbf{C} \arrow[dl, "\theta"] \\
\mathbf{I} &
\end{tikzcd}$$

حاصل می‌شود. کافی است جابه‌جایی بودن مربع

$$\begin{tikzcd}
C_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{i+1}"'] & C_i \arrow[d, "\theta_i"] \\
I_{i+1} \arrow[r] & I_i
\end{tikzcd}$$

را بررسی کنیم.

$$\partial^I_{i+1}\theta_{i+1}=\partial^I_{i+1}\gamma_{i+1}-\partial^I_{i+1}\partial^I_{i+2}\eta_{i+1}-\partial^I_{i+1}\eta_i\partial^C_{i+1}=\gamma_i\partial^C_{i+1}-\partial^I_{i+1}\eta_i\partial^C_{i+1}$$

$$\theta_i-\partial^C_{i+1}=\gamma_i\partial^C_{i+1}-\partial^I_{i+1}\eta_i\partial^C_{i+1}-\eta_{i-1}\partial^C_i\partial^C_{i+1}=\gamma_i\partial^C_{i+1}-\partial^I_{i+1}\eta_i\partial^C_{i+1}$$

بنابراین مربع فوق جابه‌جایی است و حکم ثابت می‌شود.

$\square$

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید $\alpha:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ یک ریختار از همبافت‌ها باشد. نگاشت مخروطی $\mathbf{C}(\alpha)$ یک همبافت به‌صورت $C(\alpha)_n=Y_n\oplus X_{n-1}$ است که

$$\partial^{\mathbf{C}}_n(y_n,x_{n-1})=(\partial^{\mathbf{Y}}_n(y_n)+\alpha_{n-1}(x_{n-1}),-\partial^{\mathbf{X}}_{n-1}(x_{n-1}))\ .$$

نکته ۳.۱.۱ دنباله‌ی دقیق $0 \longrightarrow \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{C}(\alpha) \longrightarrow \sum^{1}\mathbf{X} \longrightarrow 0$ از همبافت‌ها حاصل می‌شود. درنتیجه دنباله‌ی دقیق بلند

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{X}) \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{Y}) \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{C}) \longrightarrow H_n(\mathbf{X}) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(\mathbf{Y}) \longrightarrow H_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \cdots$$

القا می‌شود.

لم ۴.۱.۱ [۱۲صفحه‌ی۷۷] α یک شبه‌یکریختی است اگر و تنها اگر $\mathbf{C}(\alpha)$ دقیق باشد.

برهان . فرض کنید $\alpha : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ شبه‌یکریختی باشد. بنابراین $H_n(\alpha) : H_n(\mathbf{X}) \longrightarrow H_n(\mathbf{Y})$ برای هر $n \in \mathbb{Z}$ یکریختی است. حال با توجه به دنباله‌ی دقیق القا شده از کوهمولوژی‌ها، $H_n(\mathbf{C}) = 0$ برای هر $n \in \mathbb{Z}$. پس $\mathbf{C}(\alpha)$ دقیق است.

حال فرض کنید $\mathbf{C}(\alpha)$ دقیق باشد. یعنی برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $H_n(\mathbf{C}) = 0$. با توجه به دنباله‌ی دقیق القا شده ازکوهمولوژی‌ها، $H_n(\alpha) : H_n(\mathbf{X}) \longrightarrow H_n(\mathbf{Y})$ برای هر $n \in \mathbb{Z}$ یکریختی است. بنابراین α شبه‌یکریختی است.

$\square$

تعریف ۵.۱.۱ [۲] همبافت $\mathbf{A}$ از پایین کراندار (بالا کراندار) نامیده می‌شود اگر $A_i = 0$ برای هر $i \ll 0$ ($i \gg 0$).

لم ۵.۱.۱ [۱۲صفحه‌ی۷۸] فرض کنید $\beta : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ یک شبه‌یکریختی از همبافت‌ها باشد. در این‌صورت

(۱) اگر $\mathbf{P}$ یک همبافت از پایین کراندار از $R-$مدول‌های پروژکتیو باشد، آنگاه $Hom_R(\mathbf{P}, \beta)$ شبه‌یکریختی است و اگر β پوشا باشد، شبه‌یکریختی پوشا می‌شود.

(۲) اگر $\mathbf{I}$ یک همبافت از بالا کراندار از $R-$مدول‌های انژکتیو باشد، آنگاه $Hom_R(\beta, \mathbf{I})$ شبه‌یکریختی است و اگر β یک‌به‌یک باشد، شبه‌یکریختی پوشا می‌شود.

برهان . (۱) $\beta : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ یک شبه‌یکریختی است. پس $\mathbf{C}(\beta)$ دقیق است. بنابراین $Hom_R(\mathbf{P}, \mathbf{C}(\beta))$ دقیق می‌شود. از طرفی با توجه به $\mathbf{C}(Hom_R(\mathbf{P}, \beta)) = Hom_R(\mathbf{P}, \mathbf{C}(\beta))$ ، دقیق بودن $\mathbf{C}(Hom_R(\mathbf{P}, \beta))$ نتیجه می‌شود. بنابراین $Hom_R(\mathbf{P}, \beta)$ دقیق خواهد بود.

(۲) $\beta : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ یک شبه‌یکریختی است. پس $\mathbf{C}(\beta)$ دقیق است. بنابراین $Hom_R(C(\beta, \mathbf{I}))$ دقیق می‌شود. از طرفی با توجه به $\mathbf{C}(Hom_R(\beta, \mathbf{I})) \simeq \sum^{1} Hom_R(C(\beta), \mathbf{I})$ ، دقیق بودن $\mathbf{C}(Hom_R(\beta, \mathbf{I}))$ نتیجه می‌شود. بنابراین $Hom_R(\beta, \mathbf{I})$ دقیق خواهد بود.

$\square$

تعریف ۶.۱.۱ [۲] فرض کنید $\gamma : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ و $\beta : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ ریختارهایی باشند که $\beta\ \gamma \sim id_{\mathbf{C}}$. آنگاه γ یک وارون هموتوپی راست از β است و β یک وارون هموتوپی چپ از γ است. یک هم‌ارزی هموتوپی، یک ریختار γ است که یک وارون هموتوپی چپ β دارد که خودش (β) یک وارون هموتوپی چپ چون γ' دارد. در این حالت $\gamma\ \beta = id_{\mathbf{B}}\gamma\ \beta \sim \gamma'\ \beta\ \gamma\ \beta \sim \gamma' id_{\mathbf{C}}\beta = \gamma'\ \beta \sim id_{\mathbf{B}}$. بنابراین γ و β وارون هموتوپی هستند. همین نتیجه برای وقتی‌که γ یک وارون هموتوپی راست چون β' دارد که خودش (β') یک وارون هموتوپی راست مانند γ'' دارد.

تعریف ۷.۱.۱ یک همبافت $\mathbf{A}$ انقباض‌پذیر نامیده می‌شود، اگر $id_{\mathbf{A}} \sim \circ_{\mathbf{A}}$. یک همبافت خارج‌قسمتی $\mathbf{B}$ از $\mathbf{A}$ را نامربوط می‌نامند، اگر $\mathbf{B}$ انقباض‌پذیر و A_n جمعوند مستقیمی از B_n به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ باشد.

لم ۶.۱.۱ فرض کنید $\mathbf{B}$ یک همبافت خارج‌قسمتی نامربوط از $\mathbf{A}$ باشد. دنباله‌ی دقیق $\circ \longrightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \longrightarrow \circ$ را درنظر بگیرید، آنگاه φ هم‌ارز هموتوپ است.

برهان . از دنباله‌ی دقیق کوتاه فوق دنباله‌های دقیق زیر القا می‌شوند.

$$\circ \longrightarrow Hom_R(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \longrightarrow Hom_R(\mathbf{A}, \mathbf{A}) \longrightarrow Hom_R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \longrightarrow \circ$$

$$\circ \longrightarrow Hom_R(\mathbf{B}, \mathbf{C}) \longrightarrow Hom_R(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \longrightarrow Hom_R(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \longrightarrow \circ$$