دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

نظریه مجموعه های ابر متناهی

توسط

احمد فرمانی بقا

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقری

اردیبهشت ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به :

مادرم،

که خالصانه ترین و بی ریا ترین عشق

را نشانم داد ؛

و « هانی» ،

که لحظات تلخ زندگی ام را شیرین کرد.

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم که از جناب آقای دکتر سعید صالحی پورمهر استاد گرانقدرم که برای اولین بار مقاله «The theory of hyperfinite sets» را در اختیارم قرار دادند تشکر کنم،چرا که مطالعه آن مقاله شروعی بود برای تجربه‌ای ارزشمند و مملو از لحظات سختی که برای درک آن صرف کردم و لحظات لذت بخشی که از احساس آموختن پیدا نمودم و نیز از آقای دکتر سید محمد باقری که بسیار بیشتر از آنچه یک استاد راهنما لزوماً باید انجام دهند در حق بنده لطف نمودند و با کمکها و راهنمایی‌های خود موجب شدند این پایان نامه به مرجعی قابل اتکا برای تمامی علاقمندانی که مایل باشند اندکی با نظریه‌های غیر کلاسیک مجموعه‌ها آشنا شوند تبدیل شود خالصانه تشکر می‌کنم. از خانواده‌ام و دوستانی که از لحاظ روحی حامی من بودند و نیز سرکار خانم عبدالله‌پور و همکارانشان در چاپ تایماز که زحمت تایپ این پایان نامه به فارسی تک را متحمل شدند صمیمانه ممنونم.

چکیده

آنالیز غیر استاندارد ریاضی که توسط ابراهام رابینسون معرفی شده است ابزاری جدید برای مطالعه و بسط ریاضیات فراهم می‌کند، ضمن ذکر مختصری از سیر ایجاد آنالیز غیر استاندارد و فواید و مفاهیم پایه در آن، نظریه کلاسیک مجموعه‌ها (ZFC) و تعدادی از نظریه‌های غیر کلاسیک مجموعه‌ها نظیر BST و NCT را در فصل اول معرفی می‌کنیم تا پیش نیازهای نظریه مجموعه‌های ابر متنهای THS که موضوع اصلی این پایان نامه می‌باشد را فراهم کرده باشیم. THS نظریه مجموعه‌های اصل بندی شده‌ای که بر پایه ایده وجود زیر کلاس‌های سره از مجموعه‌های متناهی بزرگ بنا شده است، می‌باشد. یکی از انگیزه‌های معرفی نه تنها این نظریه بلکه سایر نظریه‌های غیر استاندارد مجموعه‌ها، الحاق مفاهیم آنالیز غیر استاندارد نظیر درونی و بیرونی‌ها، بی‌نهایت کوچک و بزرگ‌ها و مفاهیم مشابه، به نظریه مجموعه‌هاست. در نظریه THS اشیاء اولیه کلاس‌ها می‌باشند و مجموعه‌ها اعضای کلاس‌ها تعریف شده‌اند. اصول و تعاریف اولیه را ذکر کرده قضایا و نتایج متناظر را بیان می‌کنیم، چگونگی انتقال قضایای ریاضیات کلاسیک به THS اثبات سازگاری THS و همسازگار بودن THS با ZFC، BST و NCT را در پایان توضیح خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی:

آنالیز غیر استاندارد، مجموعه استاندارد، مجموعه ابر متناهی، مجموعه کوچک، نیم مجموعه، کلاس لاغر

فهرست مندرجات

مقدمه

در میانه قرن هفدهم میلادی که حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط «اسحاق نیوتن» و «لایبنیتز» بطور مستقل و جداگانه معرفی شد، «لایبنیتز» علامت «dx» را بعنوان تفاضل متوالی مقادیر x در نظر گرفت با این فرض که این تفاضل بی‌نهایت کوچک است یا به عبارتی از هر کمیت قابل اندازه گیری کمتر می‌باشد. نقطه قابل ذکر این است که ایده بی‌نهایت کوچک‌ها در آن دوران اگر چه ابزار شهودی مناسبی برای یافتن نتایج جدید در آنالیز بود اما هنوز دقیقاً توسط ریاضیدانان مورد قبول واقع نشده بود، حدود یک قرن بعد «اویلر» که او را می‌توان یکی از پرکارترین ریاصیدانان همه زمانها دانست در سال «۱۷۴۰» میلادی و در کتاب «مقدمه‌ای بر آنالیز متناهی‌ها» براحتی فرض را بر وجود بی نهایت کوچک‌ها گذاشت و رفتار آنها را همانند اعداد متناهی در نظر گرفت.

در نهایت در قرن بیستم میلادی بی نهایت کوچک‌ها توسط «آبراهام رابینسون» دوباره احیاء شدند، او در سال «۱۹٦۹» در کتاب «آنالیز غیر استاندارد» چنین نوشت: «در پائیز «۱۹٦۰» دریافتم که مفاهیم و روشهای منطق ریاضی معاصر قادر به ارائه قالبی مناسب برای گسترش حساب دیفرانسیل و انتگرال بوسیله اعداد بی نهایت کوچک و بزرگ است».

از جمله مفاهیم و روش‌های منطقی معاصر که «رابینسون» به آن اشاره کرده بود قضیه

فشردگی می‌باشد که بنابر آن اگر هر زیر مجموعه متناهی $\sum$ از گزاره‌ها، دارای مدل باشد در آن صورت $\sum$ مدل دارد. آنچه «رابینسون» انجام داد چنین بود که با فرض مجموعه $\sum_{\mathbb{R}}$ از گزاره‌های درست و مناسب در مورد $\mathbb{R}$ به همراه گزاره‌های نامتناهی $\varepsilon > 0, \varepsilon < \frac{1}{2}, \ldots, \varepsilon < \frac{1}{n}, \ldots$ و استفاده از قضیه فشردگی مدلی برای $\sum_{\mathbb{R}}$ که با $\mathbb{R}^*$ نمایش می‌دهیم پیدا کرد که یک میدان مرتب است که ε را به عنوان عضو مثبت بی‌نهایت کوچک در بر دارد و بنا به اصل انتقال «هر گزاره بطور مناسب فرمولبندی شده در $\mathbb{R}^*$ درست است اگر و تنها اگر در $\mathbb{R}$ درست باشد». مفروض گرفتن $\mathbb{R}^*$ روشهایی جدید برای آنالیز حقیقی ارائه می‌کند که در آن» وجود بی‌نهایت کوچک و بزرگها موجب یافتن برهانهای ساده‌تر و شهودی تر برای آندسته از قضایای $\mathbb{R}^*$ که قابل انتقال به $\mathbb{R}$ هستند، می‌شود. البته نباید فراموش کرد که آنچه از آن بعنوان «بطور مناسب فرمولبندی شده» در صورت اصل انتقال اشاره شده است محدودیتهایی ایجاد می‌کند بطور مثال این قضیه که «هر مجموعه ناتهی از بالا کراندار، کوچکترین کران بالا دارد» در $\mathbb{R}^*$ برقرار نیست. بررسی این مسئله که چه موضوعاتی در انتقال صادق هستند نیاز به مفاهیم و ابزارهایی در منطق مدرن ریاضی دارد که برای «رابینسون» مهیا بود ولی برای «لایبنیتز» و کسانی که در دوره‌های قبلی سعی در استفاده از بی‌نهایت کوچک‌ها و یا ساختن توسیعی غیر ارشمیدسی از سیستم اعداد حقیقی داشتند، در دسترس نبود.

پیروزی بزرگ «رابینسون» تبدیل «اصل انتقال» به ابزاری برای استفاده در برهانهای ریاضی بوده است که در دهه‌های اخیر به بسیاری از زمینه‌های ریاضیات از جمله: آنالیز، توپولوژی، جبر، نظریه اعداد، فیزیک ریاضی، احتمال و .... نیز وارد شده است. اهمیت آنالیز غیر استاندارد، لزوم بررسی و مطالعه قالبهای آن را که نظریه‌های غیر کلاسیک مجموعه‌ها می‌باشند را روشنتر می‌کند که نظریه مجموعه‌های ابر متناهی یکی از همین قالبهاست.

آنچه آنالیز غیر استاندارد به درک ما از ریاضیات می افزاید را می توان در پنج مورد خلاصه کرد:

۱) تعاریف جدید از مفاهیم آشنا که معمولاً ساده‌تر و شهودی تر هستند. بعنوان مثال می‌توان تعریف همگرایی، کراندار بودن، فشردگی و .... را نام برد.
۲) برهانهایی جدید و روشن (و معمولاً ساده‌تر) از قضایای آشنا، علاوه بر قضایای زیادی در آنالیز پایه در باره حدود و همگرایی، برهانهای غیر استانداردی برای قضیه رمزی، توسیع هاینه — باناخ روی توابع خطی و .... را نیز داریم.
۳) ساختارهای جدید از اشیاء آشنا. بطور مثال بدست آوردن انتگرال‌هابعنوان جمع‌های ابر متناهی، خود $\mathbb{R}^*$ بعنوان مجموعه خارج قسمتی از $\mathbb{Q}^*$ (مجموعه ابر گویا) و ....
۴) معرفی اشیاء جدید و جالب ریاضیاتی مثلاً انواع جدیدی از اعداد از قبیل محدودها و نامحدودها، بی نهایت کوچک‌ها و مجموعه‌ها و توابع درونی، بیرونی و ابر متناهی و نیز اندازه‌های Loeb.
۵) اصول و خواص قدرتمند جدید برای یافتن برهان، از قبیل انتقال، شکل درونی استقرا، اصل عدد ماکسیمال، کامل بودن «ددکیند»، پراکندگی و تقریبهای ابر متناهی که از آن می‌توان به عنوان یکی از انگیزه‌های ارائه نظریه مجموعه‌های ابر متناهی (THS) در این پایان نامه اشاره کرد.

چرا که بسیاری از کاربردهای آنالیز غیر استاندارد بر پایه‌شبیه سازی ساختارهای نامتناهی با ساختارهای ابر متناهی بنا شده است. هنگام انتقال به زبان ریاضیات استاندارد چنین شبیه سازی به معنای تقریب ساختارهای نامتناهی بوسیله ساختارهای متناهی می‌باشد. بنابراین آنالیز غیر استاندارد زمینه‌ای را برای ما فراهم می‌سازد که نتایج جدیدی در مورد ساختارهای نامتناهی با

استفاده از چنین تقریبها و نتایج متناظر در مورد ساختارهای متناهی فراهم کنیم که بدست آوردن آنها بسیار ساده‌تر است. برای مثال در رساله مشهور [۱۴] برای ساختن نظریه احتمال روی فضاهای احتمال نامتناهی از این روش استفاده شده است و نیز در رساله [۷] نشان داده شده است که چگونه این روش می‌تواند برای ساخت سیستماتیک آنالیز هارمونیک روی گروه‌های آبلی موضوعاً فشرده از آنالیز هارمونیک روی گروه‌های آبلی متناهی مورد استفاده قرار گیرد.

دلیل دیگری که ما را مجاب به بررسی نظریه‌های غیر کلاسیک مجموعه‌ها و قالبهای اصل بندی شده برای آنالیز غیر استاندارد و حتی کل ریاضیات می‌کند پاسخ به این سوال است که چرا باید نگرش و برخورد کلاسیک با ریاضیات را بهترین راه ممکن بدانیم؟

نتایج بدست آمده از این راه به ما این اجازه را می‌دهد که به این مسأله از زاویه دیگری نگاه کنیم که بنا بر آن ریاضیات را می‌توان بر پایه این فرض توسعه داد که تمامی مجموعه‌ها متناهی هستند (چیزی شبیه اتم گرایی یونانیان باستان).

در این پایان نامه تئوری اصل بندی شده‌ای از مجموعه‌های متناهی را بررسی خواهیم کرد که به دلایلی که ذکر شد آن را تئوری مجموعه‌ای ابر متناهی THS می‌نامیم. مشابه نظریه کلی – مورس [1] و یا فن نیومن– برنیز– گودل [2] (NBG)، THS تئوری کلاس‌ها در $\in$– زبان است که در آن مجموعه‌ها، اعضای کلاسها تعریف شده‌اند. جهان همه‌ی مجموعه‌ها که با $\mathbb{H}$ نمایش داده می‌شوند تمام اصول ZF^{fin} – تئوری که از جایگزینی اصل نامتناهی با نقیض آن و شکل مناسبی از اصل انتظام (مثلاً اصلی که بنا بر آن هر مجموعه بستار متعدی دارد)– را ارضا می‌کند.

البته خواص کلاسها در اینجا بطور بنیادین با آنچه در NBG برقرار است متفاوت می‌باشد.

---

[1] Kelly-Morse

[2] van Neumann- Bernayes- Güdel

برای مثال اصل جدا سازی در THS لزوماً برقرار نیست، چرا که مجموعه‌ای وجود دارد که شامل زیر کلاس سره است (زیر کلاسی که زیر مجموعه نیست). دلیل افزودن چنین گزاره‌ای به این تئوری این است که در THS می‌خواهیم خواصی از قبیل «شدنی بودن»[۳] را نیز در نظر بگیریم. در واقع فرض کنید $F(x)$ جمله‌ی «x یک عدد شدنی است» باشد و N یک عدد ناشدنی در اینصورت مجموعه $A=\{x \leq N \ : \ F(x)\}$ شروط ناسازگار زیر را ارضا می‌کند.

$$
\begin{array}{ll}
۱) & ۰ \in A \\
۲) & \forall x \quad x \in A \longrightarrow x+۱ \in A \\
۳) & N \notin A\ !
\end{array}
$$

تنها راه اجتناب از این پارادوکس در صورت حفظ اصل استقرا برای مجموعه‌ها این است که فرض کنیم A مجموعه نیست و بنابراین اصل جدا سازی برای مجموعه متناهی $\{۰,۱,\ldots,N\}$ $(A \subseteq)$ برقرار نمی‌تواند باشد.

پارادوکس اشاره شده در پاراگراف قبل، صورت دیگری از پارادوکس مشهور به تپه شنی منصوب به اوبیلیدیس[۴] در قرن چهارم پیش از میلاد است: از آنجا که یک دانه شن یک تپه شنی نیست، اگر n دانه از شنها تپه‌ای از شن را بوجود نیاورند، در این صورت $n+۱$ دانه نیز تپه‌ای از شن‌ها بوجود نخواهد آورد، پس چگونه می توانیم تپه‌ای شنی داشته باشیم؟!

$\varphi(x)$: x دانه شن تپه‌ای از شن نیست

$$
\begin{array}{ll}
۱) & \varphi(۱) \\
۲) & \forall n \quad \varphi(n) \longrightarrow \varphi(n+۱) \\
۳) & \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n)\ !
\end{array}
$$

[۳] feasibility

[۴] Eubilides

پارادوکسهایی از این دست در قالب نظریه کلاسیک مجموعه‌ها قابل تصور نیست چرا که اشیائی نظیر تپه شنی توصیف بسیار مبهم و غیر روشنی دارند و بنابرانی نمی‌توانند به عنوان اشیائی در ریاضیات کلاسیک — مثلاً بعنوان مجموعه — در نظر گرفته شوند. از سوی دیگر مثال‌های متعددی وجود دارد که چنین مفاهیمی (همانند مفهوم «شدنی‌ها») بطور طبیعی در ریاضیات پدیدار می‌شوند. اولین ریاضیدانی که متوجه اهمیت چنین مفاهیمی شد، «پی. وپنکا»[۵] بود که در مرجع [۱۶] اولین نظریه مجموعه‌های متناهی را بنام نظریه مجموعه‌های جایگزین AST معرفی کرد که در آن مجموعه‌ای متناهی با زیر کلاسهای سره مفروض شده بودند. چنین زیر کلاسهایی از مجموعه‌ها نیم مجموعه[۶] نامیده می‌شوند که در NCT (نظریه کلاس غیر استاندارد) بعنوان کلاسهای بیرونی مطرح شده‌اند. مشکل اصلی نگرش «وپنکا» تقابل نظریه او با ریاضیات کلاسیک می‌باشد.

تئوری معرفی شده در این پایان نامه (THS) نیز بر پایه ایده وجود زیر کلاسهای سره از مجموعه‌های متناهی بزرگ است، مجموعه‌های متناهی که شامل زیر کلاس سره هستند، مجموعه‌های ابر متناهی [۷] نامیده می‌شوند. که این اصطلاح از آنالیز غیر استاندارد گرفته شده است. مدل ابتدایی THS گردایه همه‌ی زیر کلاسهای مجموعه‌های بطور موروثی متناهی V_w در NCT است [۲] (در واقع زیر نیم مجموعه‌های V_w). مفهوم کلیدی کلاسهای لاغر توسط یک فرمول معادل در NCT با تعریف یک کلاس از اندازه استاندارد ارائه شده است: یک کلاس لاغر

[۵] P.Vopenka

[۶] semiset

[۷] hyperfinite

[8] است اگر هیچ زیر مجموعه آن شامل زیر کلاس سره نباشد. مجموعه‌هایی که شامل زیر کلاس سره نباشد کوچک [9] نامیده می شود. کلاس همه اعداد طبیعی کوچک ($\mathbb{SN}$) یک کلاس لاغر است که در ZF با مجموعه ω و در NCT با ω°— کلاس همه اعداد طبیعی استاندارد— منطبق می‌باشد. مختصری از آنالیز غیر استاندارد، نظریه کلاسیک مجموعه‌ها ZFC، و تعدادی از نظریه‌های غیر کلاسیک که به نوعی با THS ارتباط دارند از جمله NBG,NCT و BST را در فصل اول معرفی خواهیم کرد تا امکان مقایسه نظریه‌های مختلف و امکاناتی که THS در مقایسه با سایر قالبهای نظریه مجموعه‌ها در اختیار ما قرار می‌دهند را نیز مرور کرده باشیم در فصول بعد ثابت می‌کنیم همه نتایج ریاضیات کلاسیک که در نظریه مجموعه‌های زرملو قابل فرمولبندی است می‌تواند برای ساختارهای لاغر THS اثبات شود که این تفاوت اساسی میان THS و AST است. همین نکته به ما این امکان را می‌دهد که آن دسته از برهانهای قضایای در مورد مجموعه‌های متناهی که از ریاضیات پیوسته استفاده می‌کند در THS قابل فرمولبندی بوده و بنابراین نیازی به اثبات جدید برای چنین قضایایی وجود ندارد.

---

[8] Thin

[9] small

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ آنالیز غیر استاندارد

«دلایل مناسبی برای این باور وجود دارد که آنالیز غیر استاندارد، در برخی زمینه‌ها، آنالیز مورد استفاده آیندگان باشد» «کورت گودل»

مطالب این بخش از [۱] و [۶] انتخاب شده است.

۱.۱.۱ بی‌نهایت کوچکها و بی‌نهایت بزرگها:

عدد غیر صفر ε، به عنوان بی نهایت کوچک تعریف می‌شود اگر

$$\forall\, n = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad |\varepsilon| < \frac{۱}{n}$$

در این صورت $\omega = \frac{۱}{\varepsilon}$ یک بی نهایت بزرگ یا مختصراً بی‌نهایت گفته می‌شود که

$$\forall\, n = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad |\omega| > n$$

هر چند در سیستم اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ چنین اشیائی به عنوان عدد بی نهایت کوچک یا بزرگ غیر صفر وجود ندارد. هدف ما در اینجا مطالعه سیستم بزرگتری بنام ابر حقیقی هاست که میدان مرتب $^*\mathbb{R}$ را که شامل $\mathbb{R}$ بعنوان زیر میدان است را شکل می‌دهد و شامل بی نهایت کوچکها و بزرگترهای معرفی شده در اینجا می‌باشد. کمیتهای جدید در $^*\mathbb{R}$ و رابطه بین $^*\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$، طرز نگرشی جایگزین و شهودی به آنالیز و توپولوژی و در واقع به بسیاری دیگر از شاخه‌های ریاضیات محض و کاربردی برای ما فراهم می‌کند.

برای ساختن $^*\mathbb{R}$ نیاز به مفهوم فیلتر داریم: فرض کنید I مجموعه‌ای غیر تهی باشد، $\mathcal{F} \subseteq p(I)$ مجموعه‌ای غیر تهی، یک فیلتر روی I خوانده می‌شود هرگاه:

$$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F} \quad (۱)$$
$$A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \Longrightarrow B \in \mathcal{F} \quad (۲)$$
$$\emptyset \notin \mathcal{F} \quad (۳)$$

از (۲) نتیجه می‌شود که $I \in \mathcal{F}$ و از (۳) داریم $\mathcal{F} \subsetneqq p(I)$. برای مثال $F_A = \{B \subseteq I | A \subseteq B\}$ را که $A \subseteq I$ را یک فیلتر اساسی است. فیلتر u را یک اولترا فیلتر نامیم هرگاه ماکزیمال باشد یعنی فیلتری بین آن و $p(I)$ وجود نداشته باشد. از لم زرن (که معادل اصل انتخاب است) هر فیلتری را در یک اولترا فیلتر می‌توان نشاند. از خواص مهم اولترا فیلتر این است که اگر $A \cup B \in u$ آنگاه $A \in u$ یا $B \in u$ و اینکه برای هر زیر مجموعه A از I یا $A \in u$ و یا $A^c \in u$. بعنوان نتیجه دیگری از لم زرن داریم که هر مجموعه ناتهی دارای یک اولترا فیلتر غیر اساسی روی خود است.

اگر $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{N} = \{۱, ۲, \ldots\}$ را مجموعه همه دنباله‌های اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم هر عضو $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ به شکل $r =< r_۱, r_۲, \ldots >$ می‌باشد که بصورت $< r_n : n \in \mathbb{N} >$ و یا حتی $< r_n >$ نمایش داده می‌شوند. اگر F اولترا فیلتر غیر اساسی ثابتی روی $\mathbb{N}$ باشد از F می‌توان برای ساخت یک

حلقه خارج قسمتی روی $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ استفاده کرد. ابتدا رابطه " $\sim$ " را روی $\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم:

$$< r_n > \sim < s_n > \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \ : \ r_n = s_n\} \in F$$

برای راحتی اگر $r =< r_n >$ و $s =< s_n >$ باشد مجموعه $\{n \in \mathbb{N} \ : \ r_n = s_n\}$ را با $[[r_n = s_n]]$ نمایش می‌دهیم در اینصورت:

$$r \sim s \Leftrightarrow [[r = s]] \in F$$

کلاس هم ارزی دنباله $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ تحت رابطه " $\sim$ " را به شکل $[r]$ نمایش می دهیم. در اینصورت:

$$[r] = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : r \sim s\}$$

مجموعه خارج قسمتی $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ تحت " $\sim$ " برابر است با: $\quad {}^*\mathbb{R} = \{[r] : r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$

و داریم:

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ r_n < s_n\} \in F \Leftrightarrow [[r < s]] \in F \Leftrightarrow [r] < [s]$$

$$[r] + [s] = [(r_n + s_n)] \ , \ [r] - [s] = [(r_n - s_n)]$$

در این صورت ساختار $<{}^*\mathbb{R}, +, ., <>$ یک میدان مرتب با صفر $[0]$ و واحد $[1]$ می‌باشد. عدد حقیقی $r \in \mathbb{R}$ را با دنباله ثابت $r =< r, r, \ldots >$ نمایش می‌دهیم پس: ${}^*r = [r] = [< r, r, \ldots >]$ بنابراین ایزومورفیسم میدانی غیر پوشا حافظ ترتیبی از $\mathbb{R}$ به ${}^*\mathbb{R}$ وجود دارد که r را به ${}^*r$ می‌برد.

فرض کنید $\varepsilon =< \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} >$ در این صورت:

$$[[0 < \varepsilon]] = \{n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n}\} = \mathbb{N} \in F$$

بنابراین $[\varepsilon] > [0]$ در ${}^*\mathbb{R}$ از طرفی برای هر عدد حقیقی مثبت:

$$[[\varepsilon < r]] = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < r\}$$

متمم متناهی بوده در نتیجه عضو F است بنابراین در ${}^*\mathbb{R}$ ،r $<^*$ $[\varepsilon]$ $<$ $[۰]$ برای هر ${}^*r \in^* \mathbb{R}$ در نتیجه $[\varepsilon]$ یک بی‌نهایت کوچک است. برای $\omega =<۱,۲,\ldots>$ و هر $r \in \mathbb{R}$ نیز:

$$[[r < \omega]] = \{n \in \mathbb{N} : r < n\} = \{۱,۲,\ldots,n\}^c \in F$$

پس $[\omega]$ یک بی‌نهایت بزرگ در ${}^*\mathbb{R}$ است. خواص $[\varepsilon]$ و $[\omega]$ نشان می دهد که ${}^*\mathbb{R}$ گسترش سره‌ای از $\mathbb{R}$ است.

۲.۱.۱ مجموعه‌های گسترشی

زیر مجموعه A از $\mathbb{R}$ می‌تواند به زیر مجموعه ${}^*A$ از ${}^*\mathbb{R}$ گسترش یابد بطوریکه برای هر $r \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$:

$$[r] \in^* A \Leftrightarrow [[r \in A]] = \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in F$$

واضح است که اگر $r \in A$ در اینصورت $[[r \in A]] = \mathbb{N} \in F$ پس ${}^*r \in^* A$ ،r را با ${}^*r$ نمایش می‌دهیم در نتیجه ${}^*A$ بعنوان ابر مجموعه‌ای از A خواهد بود و اعضای ${}^*A - A$ بعنوان اعضای جدید «غیر استاندارد» یا «ایده‌آل» A در ${}^*\mathbb{R}$ در نظر گرفته می‌شوند. برای مثال اگر $A = \mathbb{N}$ در اینصورت برای $\omega =<۱,۲,\ldots>$ داریم:

$$[[\omega \in \mathbb{N}]] = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \in F$$

در نتیجه $[\omega] \in^* \mathbb{N}$ در واقع $[\omega] \in^* \mathbb{N} - \mathbb{N}$ یعنی $[\omega]$ یک عدد طبیعی غیر استاندارد است.

قضیه ۱.۱.۱ هر زیر مجموعه نامتناهی $\mathbb{R}$، اعضای غیر استاندارد دارد.

تابع $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به ${}^*f :{}^* \mathbb{R} \to^* \mathbb{R}$ گسترش می‌یابد به این صورت که ${}^*f([r]) = [for]$ در واقع:

$$^*f([r]) = [s] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : f(r_n) = s_n\} \in F$$

ساخت $^*\mathbb{R}$ به عنوان حلقه خارج قسمتی $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ بستگی به انتخاب فیلتر غیر اساسی F که رابطه هم ارزی " $\sim$ " را تعیین می‌کند دارد اما با در نظر گرفتن فرضیه پیوستار همه خارج قسمتی های $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ نسبت به یک اولترا فیلتر غیر اساسی روی $\mathbb{N}$ به عنوان میدانهای مرتب ایزومورفند.

اصل انتقال: هر $\mathcal{L}_R$ جمله φ درست است اگر و تنها اگر $^*\varphi$ درست باشد.

تعریف جمله و $\mathcal{L}_R$ همان تعریف مدل تئوریک آن است و برای $* -$ تبدیل کردن یک فرمول بطور خلاصه می‌توان گفت که

۱) هر کران مجموعه p را با $^*p$ در جمله φ عوض می‌کنیم.

۲) روابط موجود در فرمولهای اتمی با توسیعشان عوض می‌شوند.

بعنوان مثالهایی از انتقال قضایا، می توان از قضیه گسستگی $\mathbb{N}$ نام برد:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n \leq x \leq n+۱ \Longrightarrow x = n \text{ یا } x = n+۱)$$

که به صورت زیر انتقال داده می‌شود:

$$\forall n \in\ ^*\mathbb{N}(^*n \leq x \leq^* n+۱ \Longrightarrow x =^* n \text{ یا } x =^* n+۱)$$

بنابراین برای هر $x \in^* \mathbb{N}$ داریم: $۱ \leq x$ و هر عضو $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ بزرگتر از همه اعضای $\mathbb{N}$ یا به‌عبارتی غیر محدود یا بی‌نهایت بزرگ خواهد بود.

و یا قضیه بی‌کرانگی مجموعه‌های حقیقی که بیان می‌کند برای هر عدد حقیقی r داریم:

$\exists n \in \mathbb{N}(r < n)$

که به این شکل انتقال داده می‌شود:

$$\exists n \in^* \mathbb{N}(r < n)$$