فهرست مطالب

پیش‌گفتار

اولین مطالعات در باره ی مولدها در رسته ی $S-$سیستم ها روی تکواره ها توسط ناور [1] و میخالف [2] در سال ۱۹۹۲ صورت پذیرفت. اساس کار این پایان‌نامه مطالعه مولدها در رسته $S-$سیستم‌های مرتب جزئی است. تحقیق در مورد مولدها در رسته $S-$سیستم‌های مرتب جزئی در سال ۲۰۰۸ توسط لن [3] صورت پذیرفت.

هدف از این تحقیق، مطالعه خواص مولدها و مولدهای تصویری دوری در رسته $S-$سیستم‌های مرتب جزئی است. با معرفی اشیاء $(T,S)-$دوسیستم مرتب جزئی در رسته ${}_T\mathrm{Pos}_S$ نشان می‌دهیم که برای هر ${}_TA_S \in_T \mathrm{Pos}_S$، نگاشت $\mathrm{Pos}(-,{}_TA_S)$ با عملی که روی آن تعریف خواهیم کرد یک تابعگون مرتب جزئی با این ویژگی است که هر شیء از رسته Pos_S پس از قرارگرفتن در آن به یک شیء از رسته ${}_T\mathrm{Pos}$ و بالعکس تبدیل می‌شود. این ویژگی به ما کمک می‌کند تا بتوانیم ارتباط میان اشیاء تصویری دوری و مولدها را تحت شرایطی در رسته‌های متفاوت پیدا کنیم.

این رساله شامل ۳ فصل است و مرجع اصلی آن مقاله [۸] می‌باشد.

در فصل اول مفاهیم رسته‌ای و اشیاء $(T,S)-$دوسیستم در رسته $T-Act-S$ را معرفی کرده و رابطه بین درون‌برها، مولدها و اشیاء تصویری دوری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل دوم را با معرفی رسته $S-$سیستم‌های مرتب جزئی آغاز نموده و در ادامه ساختارهای کلی در رسته Pos_S را مورد بررسی قرار می دهیم. سپس برخی خواص نظریه‌ی رسته‌ای را برای آن بیان می‌کنیم.

در فصل سوم که سه بخش اول آن بر مبنای [۸] می‌باشد نشان می‌دهیم که هر مولد در رسته Pos_S $({}_T\mathrm{Pos})$ قادر است پس از قرارگرفتن در تابعگون $\mathrm{Pos}(-,{}_TA_S)$ تحت شرایطی تبدیل به اشیاء تصویری

[1] Knaver

[2] Mikhalev

[3] Laan

دوری در ${}_T\mathrm{Pos}$ (Pos_S) شوند. و در پایان شرایط معادل برای مولدهای تصویری دوری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در بخش ۴ این فصل که حاصل تحقیقات نگارنده روی [۳]، [۵] و [۶] می‌باشد به معرفی هم‌مولدها و اشیاء انژکتیو منظم در رسته $S-$سیستم‌های مرتب جزئی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر در رسته‌های متفاوت می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا به بررسی ویژگی‌های مجموعه‌های مرتب جزئی و نیم‌گروه‌ها می‌پردازیم. سپس مفاهیم رسته‌ای شامل اشیای آزاد، تصویری، مولد و ... را معرفی کرده و در پایان به معرفی اشیاء $S-$سیستم و $(T,S)-$دو سیستم پرداخته و ارتباط بین اشیای تصویری دوری در یک رسته و مولدها در رسته‌ی دیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۱ مجموعه‌های مرتب جزئی

با توجه به اهمیت مطلب و کار صورت گرفته روی مجموعه‌های مرتب جزئی در فصل‌های آینده، اولین بخش این فصل را به این موضوع اختصاص داده‌ایم.

تعریف ۱.۱.۱. اگر رابطه $\leq$ روی A یک رابطه دوتایی با خواص انعکاسی، پادتقارنی و تعدی باشد زوج $(A,\leq)$ را یک مجموعه مرتب جزئی می‌نامیم. اگر علاوه بر شرایط فوق برای هر a و b در A داشته باشیم $a \leq b$ یا $b \leq a$ رابطه دوتایی $\leq$ یک ترتیب کلی نامیده می‌شود. مجموعه ناتهی A با یک ترتیب

کلی، زنجیر [۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. یک مجموعه مرتب جزئی را کامل [۲] می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعه آن سوپریمم و اینفیمم داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم $(Q, \leq')$ و $(P, \leq)$ دو مجموعه مرتب جزئی باشند نگاشت $h : P \longrightarrow Q$ را

۱) حافظ ترتیب یا یکنوا [۳] (همنوا) گوییم هرگاه $p \leq q$ آنگاه $h(p) \leq' h(q)$.

۲) نشاننده ترتیب [۴] گوییم چنانچه داشته باشیم $p \leq q$ اگر و تنها اگر $h(p) \leq' h(q)$.

تذکر ۴.۱.۱. *هرنگاشت نشاننده ترتیب یک به یک است.*

برهان. چنانچه $h : P \longrightarrow Q$ نشاننده ترتیب باشد و $h(x) = h(y)$ یعنی $h(x) \leq h(y)$ و $h(y) \leq h(x)$. چون h نشاننده ترتیب است نامساوی اول نتیجه می‌دهد $x \leq y$ و نامساوی دوم نتیجه می‌دهد $y \leq x$ و بنا بر خاصیت پادتقارنی $\leq$ داریم $x = y$. $\square$

توجه کنیم عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۵.۱.۱. نگاشت h را نگاشت همانی از مجموعه دو عنصری $\{۰, ۱\} = ۱ \sqcup ۱$ (یعنی اعضا با هم قابل مقایسه نیستند) به روی زنجیر دو عضوی $\{۰, ۱\} = ۲$ که $۰ \leq ۱$ در نظر می‌گیریم. واضح است h یک به یک هست ولی نشاننده ترتیب نیست زیرا $۱ = h(۱) \leq h(۰) = ۰$. در حالی که در $\{۰, ۱\} = ۱ \sqcup ۱$ هیچ ترتیبی بین ۰ و ۱ وجود ندارد.

---

[1]chain

[2]complete poset

[3]monotonic map

[4]order embedding

تعریف ۶.۱.۰. دو مجموعه مرتب جزئی Q و P را یکریخت گوییم چنانچه نگاشت دوسویی و یکنوای $h : P \longrightarrow Q$ به قسمی وجود داشته باشد که $h^{-۱} : Q \longrightarrow P$ نیز یکنوا باشد.

قضیه ۷.۱.۰. *دو مجموعه مرتب جزئی Q و P یکریخت هستند اگر و تنها اگر نشاننده ترتیب پوشای $h : P \longrightarrow Q$ وجود داشته باشد.*

برهان. چون h پوشاست و بنا به تذکر ۴.۱.۰ یک به یک نیز هست پس نگاشت دوسویی یکنواست. به علاوه $h^{-۱} : Q \longrightarrow P$ نیز یکنواست زیرا $q_۱ \leq q_۲$ در Q را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت.

$$h[h^{-۱}(q_۱)] \leq h[h^{-۱}(q_۲)].$$

اکنون بنا بر فرض داریم $h^{-۱}(q_۱) \leq h^{-۱}(q_۲)$. □

تعریف ۸.۱.۰. مجموعه L به همراه دو عمل دوتایی $\vee$ و $\wedge$ روی L مشبکه [1] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ در شرایط زیر صدق کند.

۱) (a) $x \vee y = y \vee x$،

(b) $x \wedge y = y \wedge x$ (قانون‌هایی جابه‌جایی).

۲) (a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$،

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (قانون‌های شرکت پذیری).

۳) (a) $x \vee x = x$،

$x \wedge x = x(b)$ (قانون خودتوانی).

۴) (a) $x = x \vee (x \wedge y)$،

(b) $x = x \wedge (x \vee y)$ (قانون‌های جذب).

---

[1] lattice

مثال ۹.۱.۰. مجموعه اعداد طبیعی به همراه دو عمل دوتایی $\vee$ (کوچک‌ترین مضرب مشترک) و $\wedge$ (بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک) یک مشبکه می‌باشد.

تعریف ۱۰.۱.۰. مجموعه L به همراه عمل $\vee$ روی L نیم مشبکه [1] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ در شرایط زیر صدق کند.

۱) $x \vee y = y \vee x$ (قانون‌هایی جابه‌جایی).

۲) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (قانون‌های شرکت پذیری).

۳) $x \vee x = x$ (قانون خودتوانی).

۲.۰ نیم گروه و تکواره

در این بخش مفاهیم مورد نیاز مربوط به نیم گروه [2] و تکواره [3] را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۰. نیم گروه S که دارای عضو همانی باشد، تکواره نامیده می‌شود.

مثال ۲.۲.۰. $(N, .)$ یک تکواره و $(N, +)$ یک نیم گروه است.

تعریف ۳.۲.۰. زیر مجموعه ناتهی T از نیم گروه S را زیر نیم گروه S نامند اگر $T^۲ \subseteq T$. اگر S تکواره باشد، T را زیر تکواره S نامند اگر $T^۲ \subseteq T$ و $۱ \in T$.

تعریف ۴.۲.۰. اگر S یک نیم گروه (تکواره) باشد، زیرمجموعه ناتهی $K \subseteq S$

---

[1] semi lattice

[2] semigroup

[3] monoid

۱) یک ایده‌آل چپ[1] از S است اگر $SK \subseteq K$.

۲) یک ایده‌آل راست از S است اگر $KS \subseteq K$.

۳) یک ایده‌آل دوطرفه از S است اگر $KS \subseteq K$ و $SK \subseteq K$.

نیم‌گروه S، که ایده‌آل غیر بدیهی ندارد را کاملاً ساده [2] نامند.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد در این‌صورت

۱) عضو $e \in S$ را همانی چپ نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $es = s$.

۲) عضو $e \in S$ را همانی راست نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $se = s$.

۳) عضو $e \in S$ را همانی نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $es = se = s$.

عضو همانی در یک نیم‌گروه معمولاً با 1_s نمایش داده می‌شود.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد در این‌صورت

۱) عضو $z \in S$ را صفر چپ [3] نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $zs = z$.

۲) عضو $z \in S$ را صفر راست [4] نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $sz = z$.

۳) عضو $z \in S$ را صفر نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $sz = zs = z$.

عضو صفر در یک نیم‌گروه در صورت وجود معمولاً با ۰ نمایش داده می‌شود.

[1] left ideal

[2] completely simple

[3] left zero element

[4] right zero element

تعریف ۱.۲.۷. زیرمجموعه ناتهی M از نیم گروه S را پایه‌ای برای S نامند اگر هر عضو S را بتوان به صورت حاصلضرب منحصر به فردی از اعضای M نوشت.

تعریف ۱.۲.۸. نیم گروه S را آزاد [1] نامند اگر دارای پایه ناتهی M باشد.

قضیه ۱.۲.۹. *فرض کنیم $F(X)$ نیم‌گروه آزاد با پایه X و S و $f : X \longrightarrow S$ یک نگاشت از پایه X به نیم‌گروه S باشد. در این صورت همریختی منحصر به فرد $\bar{f} : F(X) \longrightarrow S$ موجود است به طوری‌که $\bar{f}|_X = f$.*

برهان. به [۷] گزاره ۱.۲.۲۹ مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض می‌کنیم X یک مجموعه ناتهی و $\mathbf{n} = \{1, 2, \cdots, n\}$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم.

$$X^+ = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid \quad x_i \in X, \quad i \in \mathbf{n}, \quad n \in N\}$$

به قسمی که دو عضو $x_1 x_2 \dots x_n$ و $y_1 y_2 \dots y_m$ متعلق به X^+ مساویند اگر وتنها اگر $m = n$ و به ازای هر $i \in \mathbf{n}$، $x_i = y_i$. همچنین ضرب در X^+ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_1 x_2 \dots x_n).(y_1 y_2 \dots y_m) = x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$$

در این صورت X^+ را نیم گروه آزاد با پایه X [2] می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. گوییم $s, t \in S$ جابه‌جا می‌شوند اگر $st = ts$. مجموعه

$$C(S) = \{c \in S \mid \quad cs = sc, \quad \forall \ s \in S\}$$

را مرکز S می‌نامیم. اگر $C(S) = S$ آنگاه S را نیم گروه تعویض‌پذیر یا آبلی می‌نامیم.

[1] free semigroup

[2] free smigroup with the basis X

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم S یک تکواره و R زیر تکواره‌ای از S باشد. در این صورت مجموعه

$$C_S(R) = \{s \in S \mid \quad rs = sr, \quad \forall r \in R\}$$

را مرکز ساز R در S می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم S و T دو نیم گروه باشند. نگاشت $\varphi : S \longrightarrow T$ همریختی نیم گروهی نامیده می‌شود اگر برای هر $s, s' \in S$، $\varphi(ss') = \varphi(s)\varphi(s')$. یک همریختی نیم گروهی بین تکواره‌های S و T همریختی تکواره‌ای است اگر $\varphi(۱_S) = ۱_T$. در هر دو حالت

$$ker\varphi = \{(s, s') \in S \times S| \quad \varphi(s) = \varphi(s')\}$$

هسته ی همنهشتی [1] برای همریختی φ نامیده می‌شود.

اگر $S = T$ آنگاه همریختی نیم گروهی را درون ریختی نامند.

تعریف ۱۴.۲.۱. نیم گروهی S را حل‌پذیر (یکتای) چپ [2] نامند اگر برای هر $a, b \in S$ عضو (یکتای) $s \in S$ وجود داشته باشد به قسمی که $sa = b$. به همین ترتیب نیم گروه حل‌پذیر راست تعریف می‌شود.

نیم گروه حل‌پذیر یکتای چپ (راست) را گروه چپ (راست) [3] نامند.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم S نیم‌گروه باشد. برای هر $s, t \in S$ رابطه‌های زیر را تعریف می‌کنیم

$s\mathcal{L}t$ اگر $S^۱s = S^۱t$،

$s\mathcal{R}t$ اگر $sS^۱ = tS^۱$،

$s\mathcal{J}t$ اگر $S^۱sS^۱ = S^۱tS^۱$،

[1] congruence kernel

[2] left solvable

[3] left group

$s\mathcal{H}t$ اگر $S^1 s = S^1 t$ و $sS^1 = tS^1$،

$s\mathcal{D}t$ اگر عنصر $u \in S$ موجود باشد به طوری که $uS^1 = tS^1$ و $S^1 t = S^1 u$. $\mathcal{L}$، $\mathcal{R}$، $\mathcal{J}$، $\mathcal{H}$ و $\mathcal{D}$ رابطه‌های گرین[1] روی S نامیده می‌شوند که در آن

$$S^1 = \begin{cases} S & 1 \in S \\ S \cup \{1\} & 1 \notin S \end{cases}$$

۳.۱ مفاهیم رسته‌ای

رسته‌ها زبان مشترک و زمینه‌ای عام برای پرداختن به اشیای مختلف ریاضی نظیر مجموعه‌ها، گروه‌ها، نیم‌گروه‌ها و غیره را فراهم می‌کند. ایده شهودی تعریف رسته این است که ساختمان‌های ریاضی، همراه با نگاشت‌های مناسبی بین اشیاءشان از خواص مشترکی برخوردارند و بسیاری از مباحث مختلف ریاضی را می‌توان بر حسب رسته‌ها تعبیر کرد.

تعریف ۱.۳.۱. هر رسته [2] رده‌ای است مانند $\mathcal{A}$ از اشیاء (که با $A, B, C, \ldots$ نمایش داده می‌شوند) با این ویژگی که به ازای هر دو شیء مثل A , B، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $Mor_{\mathcal{A}}(A, B)$ نشان می‌دهیم و هر عضو آن را ریخت[3] می‌نامیم. به علاوه دارای این خاصیت است که

۱) به ازای هر چهار شیء مثل A و B و Cو D که $(A, B) \neq (C, D)$،

$$Mor_{\mathcal{A}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{A}}(C, D) = \varnothing$$

[1] Green's relations

[2] Category

[3] morphism

۲) به ازای هر شیء A , B , C تابع

$$\begin{aligned} Mor_{\mathcal{A}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{A}}(A,B) &\longrightarrow Mor_{\mathcal{A}}(A,C) \\ (g,f) &\mapsto gf \end{aligned}$$

موجود است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

(i) به ازای هر چهار شیء A , B , C , D اگر $f \in Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$، $g \in Mor_{\mathcal{A}}(B,C)$ و $h \in Mor_{\mathcal{A}}(C,D)$، آنگاه $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(ii) به ازای هر شیء مثل A، عضوی از $Mor_{\mathcal{A}}(A,A)$ مثل id_A موجود است که به ازای هر عضو از $Mor_{\mathcal{A}}(A,B)$ مثل f و هر عضو از $Mor_{\mathcal{A}}(C,A)$ مثل g، $fid_A = f$ و $id_A g = g$.

تعریف ۲.۳.۱. در رسته $\mathcal{A}$ ریخت $f : A \longrightarrow B$ را یک یکریخت یا تعادل [1] یا هم ارزی نامند اگر ریختی مانند $g : B \longrightarrow A$ در $\mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که $gf = ۱_A$ و $fg = ۱_B$. ترکیب دو تعادل، وقتی تعریف شده باشد، یک تعادل است. اگر $f : A \longrightarrow B$ یک تعادل باشد، می‌گوییم A و B یکریخت یا معادل یا هم ارز می‌باشند.

مثال ۳.۳.۱. رسته‌ای را در نظر می‌گیریم که اشیای آن همه مجموعه‌های مرتب جزئی باشند و ریخت $(P,\leq) \longrightarrow (T,\leq')$ تابعی است مانند $h : P \longrightarrow T$ به طوری که به ازای هر $x,y \in P$،

$$x \leq y \Rightarrow h(x) \leq' h(y).$$

این رسته را با Pos نمایش می‌دهیم.

[1] balanced map

تعریف ۰.۴.۳.۱ ریخت $f : A \longrightarrow B$ در رسته $\mathcal{A}$

الف) تکریختی[1] نامیده می‌شود در صورتی که به ازای هر دو ریخت $k, h \in Mor(C, A)$ اگر $fk = fh$ آنگاه $k = h$. یعنی f از چپ حذف‌پذیر باشد.

در این حالت A زیر شیء از B نامیده می‌شود.

ب) برو ریختی[2] نامیده می‌شود در صورتی که به ازای هر دو ریخت $k, h \in Mor(B, D)$ اگر $kf = hf$ آنگاه $k = h$. یعنی f از راست حذف‌پذیر باشد.

در این حالت B شی خارج قسمتی [3] از A نامیده می‌شود. f دو ریختی است اگر تکریختی و برو ریختی باشد.

تعریف ۰.۵.۳.۱ ریخت $f : A \longrightarrow B$ در رسته $\mathcal{A}$

۱) درون‌بری [4] (یا توکشیده) نامیده می‌شود اگر معکوس راست داشته باشد، یعنی $g \in Mor(B, A)$ وجود داشته باشد به طوری که $fg = 1_B$. در این حالت B درون‌بر A نامیده می‌شود.

۲) هم درون‌بری [5] نامیده می‌شود اگر معکوس چپ داشته باشد، یعنی $g \in Mor(B, A)$ وجود داشته باشد به طوری که $gf = 1_A$. در این حالت A هم درون‌بری از B نامیده می‌شود.

۳) یکریختی نامیده می‌شود اگر f یک درون‌بری و هم درون‌بری باشد. در این حالت می‌نویسیم $A \cong B$.

---

[1] monic

[2] epic

[3] factor object

[4] retraction

[5] coretraction

تعریف ۶.۳.۱. رسته ملموس، رسته‌ای است مانند $\mathcal{A}$ همراه با تابعی چون σ که به هر شیء A از $\mathcal{A}$، مجموعه $\sigma(A)$ (به نام مجموعه زمینه A) را نسبت می‌دهد به طوری که:

الف) هر ریخت $A \longrightarrow B$ تابعی بر مجموعه زمینه‌های $\sigma(A) \longrightarrow \sigma(B)$ است.

ب) ریخت همانی هر شیء A از $\mathcal{A}$ تابع همانی بر مجموعه زمینه $\sigma(A)$ است.

ج) ترکیب ریخت‌ها در $\mathcal{A}$، با ترکیب توابع بر مجموعه‌های زمینه یکی است.

قضیه ۷.۳.۱. *اگر* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *تکریختی باشد،* f *نیز تکریختی است.*

برهان. برای هر $k, h \in Mor(D, A)$ اگر $fk = fh$ آنگاه $(gf)k = (gf)h$ و چون gf تکریختی است لذا $k = h$. □

لم ۸.۳.۱. *در رسته ملموس هر ریخت یک به یک، تکریختی است.*

برهان. فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک به یک و $g, h : C \longrightarrow A$ به گونه‌ای باشند که $fg = fh$. پس برای هر $x \in C$ ، $f[g(x)] = f[h(x)]$. حال با توجه به یک به یک بودن f، برای هر $x \in C$ داریم $g(x) = h(x)$. یعنی f تکریختی است. □

لم ۹.۳.۱. *در رسته ملموس هر ریخت پوشا، برو ریختی است.*

برهان. اگر $f : A \longrightarrow B$ پوشا و $g, h : B \longrightarrow C$ طوری باشند که $fg = fh$. چون به ازای هر $b \in B$ وجود دارد $a \in A$ که $f(a) = b$. برای هر $b \in B$ داریم:

$$g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b).$$

یعنی f از راست حذف‌پذیر است. □

توجه ۱۰.۳.۱. *عکس گزاره‌های بالا همواره برقرار نیست زیرا:*

مثال ۱.۳.۱۱. نگاشت کانونی $\pi : Q \longrightarrow Q/Z$ در رسته گروه‌های آبلی بخش‌پذیر و همریختی‌های گروه‌ها تکریختی است ولی یک به یک نیست.

برهان. به [۱] مثال بعد از تعریف ۱.۳.۱۰ مراجعه شود. □

مثال ۱.۳.۱۲. نگاشت شمول $Z \longrightarrow Q$ در رسته حلقه‌ها برو ریختی است ولی پوشا نیست.

برهان. به [۱] بخش ۳۰۱۰ مراجعه شود. □

تعریف ۱.۳.۱۳. تابعگون [۱] F از رسته $\mathcal{A}$ به رسته $\mathcal{B}$ تابعی است که به هر شیء A از $\mathcal{A}$ شیء $F(A)$ از $\mathcal{B}$ و به ریخت $f : A \longrightarrow A'$ در $\mathcal{A}$ ریخت یکتای $F(f) : F(A) \longrightarrow F(A')$ در $\mathcal{B}$ را نسبت می‌دهد. به علاوه شرایط زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) برای هر $A \in \mathcal{A}$، $F(id_A) = id_{F(A)}$ یعنی F حافظ همانی است.

۲) برای هر $f_1 \in Mor_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ و $f_2 \in Mor_{\mathcal{A}}(A_2, A_3)$، $F(f_1 f_2) = F(f_1)F(f_2)$ یعنی F حافظ ترکیب است.

۲*) برای هر $f_1 \in Mor_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ و $f_2 \in Mor_{\mathcal{A}}(A_2, A_3)$، $F(f_1 f_2) = F(f_2)F(f_1)$ یعنی F ترکیب را معکوس می‌کند.

اگر F در شرایط (۱) و (۲) صدق کند تابعگون همورد[۲] نامیده می‌شود یعنی

$$F(Mor_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)) \subseteq Mor_{\mathcal{B}}(F(A_1), (A_2))$$

و اگر در شرایط (۱) و (۲*) صدق کند تابعگون پادورد[۳] نامیده می‌شود یعنی

$$F(Mor_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)) \subseteq Mor_{\mathcal{B}}(F(A_2), (A_1)).$$

[1] Functor

[2] covariant functor

[3] contravariant functor

تعریف ۱۴.۳.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته باشند:

۱) تابعگون $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$، وفادار[1] نامیده می‌شود به شرط آن که تحدید آن به مجموعه ریخت‌هایش یعنی $F : Mor_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow Mor_{\mathcal{B}}(FA, FA')$ یک به یک باشد.

۲) تابعگون $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ کامل[2] نامیده می‌شود به شرط آن که تحدید آن به مجموعه ریخت‌هایش یعنی $F : Mor_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow Mor_{\mathcal{B}}(FA, FA')$ پوشا باشد.

اگر F وفادار و کامل باشد نشاننده کامل [3] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۳.۱. هرگاه $\mathcal{A}$ یک رسته باشد آنگاه رسته متقابل[4] یا دوگان $\mathcal{A}$ که با $\mathcal{A}^{op}$ نموده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

اشیای $\mathcal{A}^{op}$ همان اشیای $\mathcal{A}$ هستند. مجموعه $Mor_{\mathcal{A}^{op}}(A, B)$، از ریخت‌ها در $\mathcal{A}^{op}$ از A به B مساوی مجموعه $Mor_{\mathcal{A}}(B, A)$ از ریخت‌ها در $\mathcal{A}$ از B به A تعریف می‌شود و عمل ترکیب بین ریخت‌ها:

$$\begin{aligned} Mor_{\mathcal{A}^{op}}(C, B) \times Mor_{\mathcal{A}^{op}}(B, A) &\longrightarrow Mor_{\mathcal{A}^{op}}(C, A) \\ (g, f) &\longrightarrow gf \end{aligned}$$

که $f \in Mor_{\mathcal{A}}(A, B) = Mor_{\mathcal{A}^{op}}(B, A)$، $g \in Mor_{\mathcal{A}}(B, C) = Mor_{\mathcal{A}^{op}}(C, B)$ و $gf \in Mor_{\mathcal{A}}(A, C) = Mor_{\mathcal{A}^{op}}(C, A)$.

تعریف ۱۶.۳.۱. در رسته $\mathcal{A}$ رابطه ترتیب روی ریخت ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

[1] faithful

[2] full

[3] full embeding

[4] opposite categories

فرض کنید $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ دو ریخت باشند در این صورت $\varphi \leq \psi$ اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$، $\varphi(a) \leq \psi(a)$.

تعریف ۱.۳.۱۷. فرض کنید $f, g : A \longrightarrow B$ یک زوج از ریخت‌ها در رسته $\mathcal{A}$ باشند. زوج (E, e) که $E \xrightarrow{e} A$، برابر ساز [1] برای زوج (f, g) نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) $fe = ge$

ب) خاصیت جهانی زیر برای (E, e) برقرار باشد:

برای هر ریخت $e' : E' \longrightarrow A$ اگر $fe' = ge'$ آنگاه ریخت منحصر به فرد $\bar{e} : E' \longrightarrow E$ به قسمی موجود باشد که $e' = e\bar{e}$ یعنی مثلث دیاگرام زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[dl, "\bar{e}"'] \arrow[d, "e'"] & \\ E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

در این حالت می‌نویسیم $(E, e) = Eq(f, g)$ و $\bar{e}$ را برابر ساز القایی توسط e' نامند.

قضیه ۱.۳.۱۸. *گزاره‌های زیر برقرارند:*

۱) *برابر ساز در حد یکریختی منحصر به فرد است.*

۲) *اگر (E, e) برابر ساز باشد e تکریختی است.*

۳) *اگر $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A = A \xrightarrow{id_A} A$، در این صورت g برابر ساز برای gf و id_B است*

برهان. به [۲] گزاره ۷.۵۵ مراجعه شود. $\square$

[1] equalizer

قضیه ۱۹.۳.۱. *اگر $A \xrightarrow{e} E$ برابر ساز نگاشت‌های $f,g : A \longrightarrow B$ در رسته $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:*

۱) $f = g$.

۲) e *برو ریختی است.*

۳) e *یکریختی است.*

۴) id_A *برابر ساز برای* f *و* g *است.*

برهان. به [۲] گزاره ۵۴.۷ مراجعه شود. □

تعریف ۲۰.۳.۱. تکریختی $A \xrightarrow{e} E$ در یک رسته، تکریختی منظم [1] نامیده می‌شود اگر برابر ساز یک جفت ریخت باشد.

تعریف ۲۱.۳.۱. تکریختی h در یک رسته، تکریختی نهایی [2] نامیده می‌شود هرگاه ریخت f و برو ریختی g چنان باشند که اگر $h = fg$ آنگاه نتیجه شود g یکریختی است.

تبصره ۲۲.۳.۱. *در رسته $\mathcal{A}$، ریخت همانی یک تکریختی نهایی است.*

برهان. فرض کنیم $id_A = fg$ که $g : A \longrightarrow B$ و $f : B \longrightarrow A$.اکنون با توجه به فرض، g دارای معکوس چپ f است. ثابت می‌کنیم f معکوس راست g نیز می‌باشد. اگر رابطه بالا را با g ترکیب کنیم داریم: $g = gid_A = gfg$ از طرفی چون $g = id_Bg$ داریم $id_Bg = gfg$. اکنون چون g برو ریختی است داریم $gf = id_B$ پس g یکریختی است. □

قضیه ۲۳.۳.۱. *اگر $A \xrightarrow{f} B$ و $B \xrightarrow{g} C$ ریخت‌هایی در رسته $\mathcal{A}$ باشند، آنگاه*

[1] regular monomorphism

[2] extremal

۱) *اگر f تکریختی نهایی و g تکریختی منظم باشد، آنگاه gf تکریختی نهایی است.*

۲) *اگر gf یک تکریختی نهایی باشد، آنگاه f تکریختی نهایی است.*

۳) *اگر gf یک تکریختی منظم و g تکریختی باشد، آنگاه f تکریختی منظم است.*

برهان. به [۲] گزاره ۶۲.۷ مراجعه شود. □

قضیه ۲۴.۳.۱. *در یک رسته هر تکریختی منظم، نهایی است.*

برهان. فرض کنیم ریخت $A \xrightarrow{h} B$ تکریختی منظم باشد. بنابر تبصره ۲۲.۳.۱ ریخت id_A یک تکریختی نهایی است، لذا از قضیه ۲۳.۳.۱ ، نتیجه می‌شود که $hid_A = h$ تکریختی نهایی است. □

تعریف ۲۵.۳.۱. فرض کنیم $f, g : A \longrightarrow B$ یک زوج از ریخت‌ها باشند. زوج (c, C) که $B \xrightarrow{c} C$ هم برابرساز [۱] (هم هسته تفاضلی) برای زوج (f, g) نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) $cf = cg$.

ب) در خاصیت جهانی زیر صدق می‌کند:

برای هر ریخت $c' : B \longrightarrow C'$ اگر $c'f = c'g$، ریخت منحصر مانند $\bar{c} : C \longrightarrow C'$ به قسمی موجود باشد $c' = \bar{c}c$، یعنی مثلث دیاگرام زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c'"'] & C \arrow[dl, "\overline{c}"] \\ & C' & \end{tikzcd}$$

در این حالت می‌نویسیم $(c, C) = Coeq(f, g)$ و $\bar{c}$ را هم برابر ساز القایی توسط c' می‌نامند.

[1] Coequalizer