دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

شرط مک کوی روی حلقه چند جمله ایهای اریب

نگارش
زهرا خراسانی

استاد راهنما
دکتر ابراهیم هاشمی

شهریور ۹۰

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $g(x), f(x)$ دو چندجمله ای ناصفر از $R[x]$ باشند. مک کوی ثابت کرد که اگر $f(x)g(x) = 0$، آنگاه عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f(x)c = 0$.

حلقه R (نه لزوماً جابجایی) را مک کوی راست می نامیم هرگاه $g(x), f(x)$ دو چندجمله ای ناصفر از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = 0$، آنگاه عنصر ناصفر $c \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $f(x)c = 0$.

در این پایان نامه ابتدا برخی از توسیع های حلقه های مک کوی راست را بررسی می کنیم. به عنوان مثال نشان می دهیم اگر R مک کوی راست باشد، آنگاه $R[x]/(x^n)$ نیز مک کوی راست است.

فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد. حلقه R را مک کوی σ-اریب می نامیم، هرگاه $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ عناصر ناصفری از $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x) = 0$، آنگاه عنصر مخالف صفر $c \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $p(x)c = 0$. سپس رابطه بین حلقه های مک کوی σ-اریب با حلقه های σ-آرمنداریز و σ-برگشت پذیر را مطالعه می کنیم.

واژه‌های کلیدی: حلقه مک کوی، حلقه آرمنداریز، حلقه تقلیل یافته، حلقه نیم جابجایی، حلقه چندجمله ای اریب، حلقه σ-برگشت پذیر، حلقه مک کوی σ-اریب

.... مطالب ارائه شده در این پایان نامه برگرفته از مقالات [۲]، [۱۴]، و [۱۵] می باشد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ پیش نیازها و تعاریف

در سراسر این پایان نامه R نمایانگر یک حلقه شرکت پذیر و یکدار می باشد.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $\varnothing \neq S \subseteq R$. مجموعه S را بسته ضربی می نامیم، هرگاه $1 \in S$ و برای هر $a, b \in S$ ، $ab \in S$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد. حلقه چندجمله ایهای اریب روی R را با $R[x;\sigma]$ نمایش می دهیم که عناصر آن به فرم $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ می باشند که $n \in N$ و $a_i \in R$. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x;\sigma]$ به طور طبیعی تعریف می شوند و عمل ضرب از قانون $xa = \sigma(a)x$ پیروی می کند. به عنوان مثال اگر $f(x) = \sum a_ix^i$ و $g(x) = \sum b_jx^j$، آنگاه

$$f(x)g(x) = (\sum_i a_ix^i)(\sum_j b_jx^j) = \sum_{i,j} a_i\sigma^i(b_j)x^{i+j}.$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم σ یک خودریختی از حلقه R باشد. حلقه چندجمله ایهای اریب لوران روی R را با $R[x, x^{-1};\sigma]$ نمایش می دهیم که عناصر آن به فرم

$a_{-m}x^{-m} + a_{-m+1}x^{-m+1} + \cdots + a_0 + \cdots + a_nx^n$ هستند. (m, n اعداد صحیح نامنفی اند)

دو عمل جمع و ضرب در حلقه $R[x, x^{-1};\sigma]$ به طور طبیعی تعریف می شوند و عمل ضرب از قانون

$x^ia = \sigma^i(a)x^i$ پیروی می کند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر ناصفر $a \in R$ را مقسوم علیه صفر چپ می نامیم، هرگاه عنصر ناصفر $b \in R$ وجود داشته باشد به قسمی که $ab = 0$. مقسوم علیه صفر راست متناظراً تعریف می شود.

اگر a هم مقسوم علیه صفر چپ و هم مقسوم علیه صفر راست باشد، a را یک مقسوم علیه صفر می نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. حلقه جابجایی R را یک دامنه صحیح می نامیم، هرگاه $R \neq 0$ و برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

توجه. هر دامنه فاقد مقسوم علیه صفر است.

تعریف ۶.۱.۱. ایده آل سره P از حلقه R را اول می نامیم، هرگاه به ازای هر ایده آل A و B از R، اگر $AB \subseteq P$، آنگاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $\varnothing \neq X \subseteq R$. پوچ ساز چپ و پوچ ساز راست X در R را به ترتیب چنین تعریف می کنیم:

$$l.ann_R(X) = \{a \in R \mid ax = 0 \text{ ،} x \in X \text{ به ازای هر}\},$$

$$r.ann_R(X) = \{a \in R \mid xa = 0 \text{ ،} x \in X \text{ به ازای هر}\}.$$

اگر X تک عضوی باشد از علائم $r_R(x), l_R(x)$ استفاده می نماییم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر $x \in R$ را منظم می نامیم هرگاه $r.ann_R(x) = 0$ و $l.ann_R(x) = 0$. توجه داریم که اگر R, Q دو حلقه باشند و $R \subseteq Q$، به طوریکه $x \in R$ در حلقه Q وارون پذیر باشد، آنگاه x یک عنصر منظم R است.

تعریف ۹.۱.۱. حلقه R را تقلیل یافته می نامیم هرگاه هیچ عنصر پوچ توان ناصفری نداشته باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. حلقه R را برگشت پذیر می نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$، آنگاه $ba = 0$.

تعریف ۱۱.۱.۱. حلقه R را آرمنداریز می نامیم هرگاه $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ چندجمله ایهای ناصفر در $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = 0$، آنگاه به ازای هر i و j، $a_i b_j = 0$.

تذکر۱. هر حلقه تقلیل یافته و جابجایی، برگشت پذیر است.

تذکر۲. هر زیرحلقه از یک حلقه آرمنداریز، آرمنداریز است.

تعریف ۱۲.۱.۱. حلقه R را متقارن می نامیم هرگاه برای هر $a, b, c \in R$، اگر $abc = 0$، آنگاه $bac = 0$.

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه R را نیم جابجایی می نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$، $ab = 0$ نتیجه دهد $aRb = 0$.

نتیجه ۱۴.۱.۱. ۱. هر حلقه تقلیل یافته و جابجایی متقارن است.

۲. هر حلقه متقارن برگشت پذیر است.

۳. هر حلقه برگشت پذیر نیم جابجایی است.

اثبات. ۱ و ۲ بدیهی است.

۳. فرض کنیم $a, b, r \in R$ و $br = 0$. در نتیجه $abr = 0$، و چون R برگشت پذیر است، پس $arb = 0$، یعنی؛ به ازای هر $r \in R$، $aRb = 0$. بنابراین حلقه R نیم جابجایی است. ■

چنانچه در مثال بعدی خواهیم دید، عکس روابط فوق در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۱۵.۱.۱. فرض کنیم K یک میدان و $F = K\langle x, y, z\rangle$ یک $K-$جبر آزاد باشد. ایده آل I را به صورت

$$I = (FxF)^{2} + (FyF)^{2} + (FzF)^{2} + FxyzF + FyzxF + FzxyF \subset F$$

در نظر می گیریم. قرار می دهیم $R = F/I$. واضح است که R برگشت پذیر است ولی متقارن نیست.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک (R, R)-دو مدول باشند. توسیع بدیهی R توسط M را چنین تعریف می کنیم:

$$T(R,M) = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R, m \in M \right\}.$$

$T(R,M)$ با علامت $R \oplus M$ نیز نمایش داده می شود.

جمع و ضرب روی $T(R,M)$ به طور طبیعی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

همچنین $\left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R, m \in M \right\}$ یک زیر حلقه از حلقه ماتریس بالا مثلثی $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$ است.

گزاره ۱۷.۱.۱. فرض کنیم حلقه R تقلیل یافته باشد. در این صورت

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

آرمنداریز است.

اثبات . فرض کنیم $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$. هر عنصر از S را می توان به فرم (a, b, c, d) نمایش داد. بنابراین دو عمل جمع و ضرب روی S را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1 a_2, a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2, a_1 d_2 + d_1 a_2).$$

همچنین هر چندجمله ای در $S[x]$ را می توان به فرم $(p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ بیان کرد. (به ازای هر $0 \leq i \leq 3$، $p_i(x) \in R[x]$)

فرض کنیم $f(x)=(f_0(x),f_1(x),f_2(x),f_3(x))$ و $g(x)=(g_0(x),g_1(x),g_2(x),g_3(x))$ دو چندجمله ای در $S[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. در نتیجه

$$f(x)g(x)=(f_0(x)g_0(x),f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x),f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_3(x)$$

$$+f_2(x)g_0(x),f_0(x)g_3(x)+f_3(x)g_0(x))=0$$

باتوجه به این تساوی دستگاه معادلات زیر را داریم:

(0) $f_0(x)g_0(x)=0$

(1) $f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x)=0$

(2) $f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_0(x)=0$

(3) $f_0(x)g_3(x)+f_3(x)g_0(x)=0$

مطابق فرض، حلقه R تقلیل یافته است، بنابراین از معادله (0) نتیجه می گیریم $g_0(x)f_0(x)=0$.

اگر معادله (1) را از راست در $f_0(x)$ ضرب کنیم آنگاه $f_0(x)g_1(x)f_0(x)+f_1(x)g_0(x)f_0(x)=0$. پس $f_0(x)g_1(x)=0, f_1(x)g_0(x)=0$.

همچنین با ضرب معادله (3) از راست در $f_0(x)$، $f_0(x)g_3(x)f_0(x)+f_3(x)g_0(x)f_0(x)=0$. بنابراین $f_0(x)g_3(x)=0, f_3(x)g_0(x)=0$.

اکنون معادله (2) را از راست در $f_0(x)$ ضرب می کنیم. در این صورت داریم:

$$f_0(x)g_2(x)f_0(x)+f_1(x)g_3(x)f_0(x)+f_2(x)g_0(x)f_0(x)=0$$

بنابراین $f_0(x)g_2(x)=0$. پس معادله (2) به فرم زیر تبدیل می شود.

$$(3') \qquad f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_0(x)=0.$$

اگر $f_1(x)$ را از راست در معادله $(3')$ ضرب کنیم، آنگاه $f_1(x)g_3(x) = 0$ و $f_2(x)g_0(x) = 0$.

فرض کنیم $f(x), g(x) \in S[x]$. قرار می دهیم:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} x^i \quad , \quad g(x) = \sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} a_j & b_j & c_j \\ 0 & a_j & d_j \\ 0 & 0 & a_j \end{pmatrix} x^j$$

و

$$f_0(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;\; , \;\; f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \;\; , \;\; f_2(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \;\; , \;\; f_3(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$$
$$g_0(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \;\; , \;\; g_1(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \;\; , \;\; g_2(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j x^j \;\; , \;\; g_3(x) = \sum_{j=0}^{m} d_j x^j.$$

بنابراین با توجه به فرض و نتایج بدست آمده، به ازای هر i و j داریم:

$$a_ia_j = 0 \;,\; a_ib_j = 0 \;,\; b_ia_j = 0 \;,\; a_ic_j = 0 \;,\; b_id_j = 0 \;,\; c_ia_j = 0 \;,\; a_id_j = 0 \;,\; d_ia_j = 0$$

در نتیجه:

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j & b_j & c_j \\ 0 & a_j & d_j \\ 0 & 0 & a_j \end{pmatrix} = 0.$$

پس حلقه S آرمنداریز است. ■

قضیه ۱۸.۱.۱. فرض کنیم حلقه R تقلیل یافته باشد. در این صورت توسیع بدیهی R یک حلقه آرمنداریز است.

اثبات. چون $T(R, R)$ با

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

یکریخت است و هر زیر حلقه از یک حلقه آرمنداریز، آرمنداریز است. بنابراین با توجه به گزاره ۱۷.۱.۱، $T(R, R)$ یک حلقه آرمنداریز است. ■

فصل ۲

توسیع هایی از حلقه هایی که شرط مک کوی را دارا هستند

۱.۲ توسیع هایی از حلقه های مک کوی راست

مک کوی [۱] ثابت کرد که اگر R یک حلقه جابجایی و $f(x)$ یک مقسوم علیه صفر در $R[x]$ باشد، آنگاه عنصر مخالف صفر $r \in R$ وجود دارد به قسمی که $f(x)r = ۰$.

تعریف ۱.۱.۲. حلقه R را مک کوی راست می نامیم، هرگاه $g(x), f(x)$ چندجمله ایهای ناصفر در $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = ۰$، آنگاه عنصر ناصفر $c \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $f(x)c = ۰$. حلقه مک کوی چپ متناظراً تعریف می شود.

اگرحلقه ای هم مک کوی چپ و هم مک کوی راست باشد آن را مک کوی می نامیم.

قضیه ۲.۱.۲. حلقه R مک کوی راست است اگر و تنها اگر $R[x]$ مک کوی راست باشد.

اثبات. فرض کنیم R مک کوی راست باشد.

فرض کنیم $F(y) = \sum_{i=۰}^{n} f_i y^i$ و $G(y) = \sum_{j=۰}^{m} g_j y^j$ دو چندجمله ای مخالف صفر در $R[x][y]$ باشند و $F(y)G(y) = ۰$. به ازای هر i, j قرار می دهیم:

$$f_i = \sum_{s=۰}^{p_i} a_{is} x^s \ , \ g_j = \sum_{t=۰}^{q_j} b_{jt} x^t \ \in R[x].$$

---

[۱] McCoy

فرض کنیم $k=\sum \deg(f_i)+\sum \deg(g_j)$، که $\deg$ درجه چندجمله ای است و درجه چندجمله ای صفر را صفر در نظر گرفته ایم. در نتیجه

$$F(x^k)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^{ik}\ ,\ G(x^k)=\sum_{j=0}^{m} g_j x^{jk}\ \in R[x].$$

مشاهده می کنیم که مجموعه ضرایب $F(x^k)$ با مجموعه ضرایب f_iها برابر است و مجموعه ضرایب $G(x^k)$ با مجموعه ضرایب g_jها برابر است. چون $F(y)G(y)=0$ و x با عناصر R جابجا می شود، پس $F(x^k)G(x^k)=0$. از طرفی چون R مک کوی راست است، عنصر مخالف صفر $u\in R$ وجود دارد به طوریکه $F(x^k)u=0$. بنابراین $F(y)u=0$ و در نتیجه $R[x]$ مک کوی راست است.

بعکس، فرض کنیم $R[x]$ مک کوی راست باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ چندجمله ایهای ناصفری از $R[x]$ باشند که $f(x)g(x)=0$. همچنین فرض کنیم $f(y)=\sum_{i=0}^{n} a_i y^i$ و $g(y)=\sum_{j=0}^{m} b_j y^j$ دو چندجمله ای ناصفر از $R[x][y]$ باشند و $f(y)g(y)=0$. چون $R[x]$ مک کوی راست است، عنصر مخالف صفر $h(x)=\sum_{k=0}^{p} h_k x^k\in R[x]$ وجود دارد به طوریکه $f(y)h(x)=0$. بنابراین به ازای هر $i=0,1,\ldots,n$، $a_i h(x)=0$. در نتیجه عنصر مخالف صفر $h_k\in R$ وجود دارد به طوریکه $f(x)h_k=0$. بنابراین R مک کوی راست است. ■

قضیه ۳.۱.۲. حلقه R مک کوی راست است اگر و تنها اگر توسیع بدیهی R با R یا $T(R,R)$ مک کوی راست باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $T(R,R)$ مک کوی راست باشد.

فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو چندجمله ای ناصفر از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. دو عضو $F(x)=\sum_{i=0}^{m} A_i x^i$ و $G(x)=\sum_{j=0}^{n} B_j x^j$ از $T(R,R)[x]$ را در نظر

می گیریم که به ازای هر $\circ \leq i \leq m$ و $\circ \leq j \leq n$،

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & \circ \\ \circ & a_i \end{pmatrix} \ , \ B_j = \begin{pmatrix} b_j & \circ \\ \circ & b_j \end{pmatrix}.$$

چون $f(x)g(x) = \circ$، پس $F(x)G(x) = \circ$، و چون $T(R,R)[x]$ مک کوی راست است، پس عنصرمخالف صفر $\begin{pmatrix} a & b \\ \circ & a \end{pmatrix}$ در $T(R,R)$ وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} a & b \\ \circ & a \end{pmatrix} = \circ$. چون عنصر $\begin{pmatrix} a & b \\ \circ & b \end{pmatrix}$ مخالف صفراست، پس a یا b نیز مخالف صفر هستند. بنابراین به ازای هر $\circ \leq i \leq m$، $\begin{pmatrix} a_ia & a_ib \\ \circ & a_ia \end{pmatrix} = \circ$.

پس به ازای هر $\circ \leq i \leq m$، $a_ia = \circ$ و $a_ib = \circ$، بنابراین $f(x)a = \circ$ و $f(x)b = \circ$. درنتیجه حلقه R مک کوی راست می باشد.

بعکس، فرض کنیم حلقه R مک کوی راست باشد. قرار می دهیم $R' = T(R,R)$.

فرض کنیم $F(x)$ و $G(x)$ دو عضو مخالف صفر از $R'[x]$ باشند و $F(x)G(x) = \circ$. قرار می دهیم:

$$F(x) = \begin{pmatrix} a_\circ & b_\circ \\ \circ & a_\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_۱ & b_۱ \\ \circ & a_۱ \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ \circ & a_m \end{pmatrix} x^m,$$
$$G(x) = \begin{pmatrix} a'_\circ & b'_\circ \\ \circ & a'_\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_۱ & b'_۱ \\ \circ & a'_۱ \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a'_n & b'_n \\ \circ & a'_n \end{pmatrix} x^n.$$

فرض کنیم

$$f_۱(x) = a_\circ + a_۱x + \ldots + a_mx^m \ , \ f_۲(x) = b_\circ + b_۱x + \ldots + b_mx^m$$

$$g_۱(x) = a'_\circ + a'_۱x + \ldots + a'_nx^n \ , \ g_۲(x) = b'_\circ + b'_۱x + \ldots + b'_nx^n.$$

چون $F(x)G(x) = \circ$، پس

$$\circ = \begin{pmatrix} f_۱(x) & f_۲(x) \\ \circ & f_۱(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_۱(x) & g_۲(x) \\ \circ & g_۱(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_۱(x)g_۱(x) & f_۱(x)g_۲(x) + f_۲(x)g_۱(x) \\ \circ & f_۱(x)g_۱(x) \end{pmatrix}.$$

بنابراین $f_۱(x)g_۱(x) = \circ$ و $f_۱(x)g_۲(x) + f_۲(x)g_۱(x) = \circ$. ۹ حالت اتفاق می افتد:

حالت اول. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, f_2(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0, g_2(x) \neq 0$. چون $f_1(x)g_1(x) = 0$ و حلقه R مک کوی راست است، عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f_1(x)c = 0$. بنابراین عنصرناصفر $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ در R' وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. در نتیجه R' حلقه مک کوی راست است.

حالت دوم. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0, f_2(x) \neq 0, g_2(x) = 0$. در این صورت دوباره می توان عنصر ناصفر $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R'$ را انتخاب کرد.

حالت سوم. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, g_1(x) = 0, f_2(x) \neq 0, g_2(x) \neq 0$. در نتیجه $f_1(x)g_2(x) = 0$. چون R مک کوی راست است عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f_1(x)c = 0$. بنابراین عنصر ناصفر $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R'$ وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. در نتیجه R' مک کوی راست است.

حالت چهارم. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0, f_2(x) = 0, g_2(x) \neq 0$. پس $f_1(x)g_1(x) = 0$. بنابراین عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f_1(x)c = 0$. در نتیجه عنصر $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R'$ $\neq 0$ وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$. بنابراین حلقه R' مک کوی راست است.

حالت پنجم. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0, f_2(x) = 0, g_2(x) = 0$. پس $f_1(x)g_1(x) = 0$. بنابراین عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f_1(x)c = 0$. در نتیجه عنصر $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R'$ $\neq 0$ وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$. بنابراین حلقه R' مک کوی راست است.

حالت ششم. اگر $f_1(x) = 0, g_1(x) = 0, f_2(x) \neq 0, g_2(x) \neq 0$، آنگاه می توانیم عنصر ناصفر $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R'$ را انتخاب می کنیم.

حالتهای دیگر شبیه حالات (۱) − (۵) می باشند. ■

مثال ۴.۱.۲. فرض کنیم حلقه R مک کوی راست باشد. نشان می دهیم زیر حلقه

$$T_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & a_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & a_1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} ; a_i, b_i, c_i, d_i \in R \right\}$$

از حلقه ماتریس های بالا مثلثی 6×6، مک کوی راست نیست.

حل. دو چند جمله ای $f(x), g(x) \in T_6[x]$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

به وضوح $f(x)g(x) = 0$، اما عنصر ناصفر c در T_6 وجود ندارد به طوریکه $f(x)c = 0$.

بنابراین حلقه T_6 مک کوی راست نیست.

توجه. فرض کنیم R یک حلقه باشد. قرار می دهیم:

$$B_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a & b & c \\ 0 & a_1 & d & r \\ 0 & 0 & a_1 & s \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1, a, b, c, d, r, s \in R \right\}.$$

واضح است $B_4(R)$ زیر حلقه ای از حلقه ماتریس های بالا مثلثی 4×4 است.

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنیم $B_4(R)$ مک کوی راست باشد. در این صورت حلقه R مک کوی راست است.

اثبات. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ دو چندجمله ای مخالف صفردر $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. همچنین فرض کنیم $F(x)=\sum_{i=0}^{n} A_i x^i$ و $G(x)=\sum_{j=0}^{m} B_j x^j$ عناصری از $B_4(R)[x]$ باشند که برای هر $0\leq i\leq n$ و $0\leq j\leq m$،

$$A_i=\begin{pmatrix} a_i & a_i & a_i & a_i \\ 0 & a_i & a_i & a_i \\ 0 & 0 & a_i & a_i \\ 0 & 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} \quad , \quad B_j=\begin{pmatrix} b_j & b_j & b_j & b_j \\ 0 & b_j & b_j & b_j \\ 0 & 0 & b_j & b_j \\ 0 & 0 & 0 & b_j \end{pmatrix}$$

و

$$F(x)G(x)=\begin{pmatrix} f(x) & f(x) & f(x) & f(x) \\ 0 & f(x) & f(x) & f(x) \\ 0 & 0 & f(x) & f(x) \\ 0 & 0 & 0 & f(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(x) & g(x) & g(x) & g(x) \\ 0 & g(x) & g(x) & g(x) \\ 0 & 0 & g(x) & g(x) \\ 0 & 0 & 0 & g(x) \end{pmatrix}=0.$$

چون $B_4(R)$ مک کوی است، پس عنصر مخالف صفر $A=\begin{pmatrix} s & s_1 & s_2 & s_3 \\ 0 & s & s_4 & s_5 \\ 0 & 0 & s & s_6 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$ در $B_4(R)$ وجود دارد به طوریکه $F(x)A=0$. اگر $s\neq 0$، آنگاه $f(x)s=0$.

اگر $s=0$، آنگاه به ازای هر $1\leq i\leq 6$ عنصر مخالف صفر s_i وجود دارد، به طوریکه به ازای هر $1\leq v\leq 6-i$، $s_{i+v}=0$. بنابراین $f(x)s_i=0$. ■

۲.۲ رابطه بین حلقه های مک کوی و نیم جابجایی

هیرانو [۲] ادعا کرد که اگر حلقه R نیم جابجایی باشد آنگاه $R[x]$ هم نیم جابجایی است، درحالیکه در مثال ۳.۳.۳، نشان می دهیم این ادعا درست نیست. همچنین نشان می دهیم حلقه نیم جابجایی وجود دارد که مک کوی نیست. در واقع ثابت می کنیم که هر حلقه برگشت پذیر مک کوی است. برای اثبات آن نیاز داریم بررسی کنیم که وقتی R برگشت پذیر یا نیم جابجایی است چه روابطی را می توان از $f(x)g(x)=0$ بدست آورد.

لم ۱.۲.۲. فرض کنیم حلقه R نیم جابجایی باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو عضو از $R[x]$ باشند. در این صورت اگر $f(x)g(x)=0$، آنگاه به ازای هر $i\in\{0,1,\dots,m\}$، $a_i b_0^{i+1}=0$.

اثبات. واضح است که برای هر $i\in\{0,1,\dots,m+n\}$، عبارت

$$(*)_i \quad \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}=0.$$

ضریب جمله i–ام معادله ی $f(x)g(x)=0$ است.

اگر $i=0$، آنگاه $a_0b_0=0$. فرض کنیم برای هر $j<k$، $a_j b_0^{j+1}=0$. به ویژه $a_j b_0^k=0$، بنابراین با توجه به خاصیت نیم جابجایی، برای هر $j<k$، $a_j b_{k-j} b_0^k=0$. اگر b_0^k را از راست در ضریب x^k ضرب کنیم، آنگاه:

$$0=\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} b_0^k = a_k b_0^{k+1}.$$

در نتیجه حکم ثابت می شود. ■

قضیه ۲.۲.۲. هرحلقه برگشت پذیر، مک کوی است.

---
[۲] Hirano

اثبات. فرض کنیم حلقه R برگشت پذیر باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو چندجمله ای مخالف صفر از $R[x]$ به ترتیب از درجه m و n باشند و $f(x)g(x)=0$. کافیست نشان دهیم که R مک کوی چپ است.

برای هر چندجمله ای $a(x)\in R[x]$، ایده آل چپ تولید شده به وسیله ضرایب $a(x)$ را با C_a نمایش می دهیم. به استقرا روی درجه $g(x)$ نشان می دهیم که عنصر مخالف صفر $c\in C_f$ وجود دارد به طوریکه $cg(x)=0$.

می توان فرض نمود $a_0, b_0 \neq 0$. در غیر اینصورت $g(x), f(x)$ را بر توانهایی از x تقسیم می کنیم تا جمله ثابت آنها ناصفر شود.

اگر $n=0$، آنگاه با فرض $c=a_0$ نتیجه می گیریم $cg(x)=a_0b_0=0$ و لذا حکم برقرار است.

فرض کنیم $n\geq 1$. با توجه به لم ۱.۲.۲، عدد $l\geq 0$ را طوری انتخاب می کنیم که

$$f(x)b_0^{l+1}=0\neq f(x)b_0^{l}.$$

قرار می دهیم $a(x):=b_0^{l}f(x)$. چون R برگشت پذیر است، $a(x)\neq 0$ اما $b_0^{l}f(x)b_0=0$. پس

$$a(x)g(x)=0 \quad , \quad a(x)b_0=0. \tag{۱.۲}$$

فرض کنیم $b(x):=(g(x)-b_0)/x$. بنابراین با توجه به معادله (۱.۲)، $a(x)b(x)=0$.

یاد آوری می کنیم که $b(x)\neq 0$. چون $\deg(g(x))=n>0$ و $\deg(b(x))=n-1<n$، لذا با توجه به فرض استقرا عنصر مخالف صفر $c\in C_a$ وجود دارد که $cb(x)=0$. از طرفی $a(x)b_0=0$، پس $C_ab_0=(0)$ و از این رو $cb_0=0$. در نتیجه $cg(x)=0$.

با توجه به ساختار $a(x)$ می دانیم $C_a\subseteq C_f$. بنابراین $c\in C_f$ و این برهان را کامل می کند. ■

لم ۳.۲.۲. فرض کنیم حلقه R نیم جابجایی باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ عناصری از $R[x]$ باشند که $f(x)\neq 0$ و $f(x)g(x)=0$. در این صورت اعداد صحیح نامنفی $l_0, l_1, \ldots, l_n \in N$

وجود دارند به طوریکه برای هر $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$،

$$f(x)b_k^{l_k}b_{k-1}^{l_{k-1}}\ldots b_0^{l_0} \neq 0 \quad , \quad f(x)b_k^{l_k+1}b_{k-1}^{l_{k-1}}\ldots b_0^{l_0} = 0.$$

اثبات. وجود l_0 از لم ۱.۲.۲ نتیجه می شود. به استقرا فرض کنیم $l_0, l_1, \ldots, l_j$ وجود داشته باشند که در شرایط بالا صدق می کنند. قرار می دهیم $r = b_j^{l_j}b_{j-1}^{l_{j-1}}\ldots b_0^{l_0}$.

چون $f(x)g(x) = 0$، لذا $m+1$ معادله زیر را داریم:

$$(*)_{j+1} \qquad a_0 b_{j+1} + a_1 b_j + \cdots + a_m b_{j-m+1} = 0,$$

$$(*)_{j+2} \qquad a_0 b_{j+2} + a_1 b_{j+1} + \cdots + a_m b_{j-m+2} = 0,$$

$$\vdots$$

$$(*)_{j+m+1} \quad a_0 b_{j+m+1} + a_1 b_{j+m} + \cdots + a_m b_{j+1} = 0,$$

که $(*)_\alpha$، ضریب x^α در معادله $f(x)g(x) = 0$ را نشان می دهد.

به ازای هر i و هر $k \leq j$، چون $a_i r = 0$، پس با توجه به خاصیت نیم جابجایی و چگونگی انتخاب $l_0, l_1, \ldots, l_j$، داریم $a_i b_k r = 0$. نشان می دهیم که برای هر $i \leq m$، $a_i b_{j+1}^{i+1} r = 0$. سپس l_{j+1} را کوچکترین عدد صحیح نامنفی در نظر می گیریم که به ازای هر i، $a_i b_{j+1}^{l_{j+1}+1} r = 0$.

اگر معادله $(*)_{j+1}$ را از راست در r ضرب کنیم، آنگاه

$$0 = a_0 b_{j+1} r + a_1 b_j r + \cdots + a_m b_{j-m+1} r = a_0 b_{j+1} r.$$

حال اگر معادله $(*)_{j+2}$ را از راست در $b_{j+1} r$ ضرب کنیم با توجه به خاصیت نیم جابجایی داریم:

$$0 = a_0 b_{j+2} b_{j+1} r + a_1 b_{j+1}^2 r + \cdots + a_m b_{j-m+2} b_{j+1} r = a_1 b_{j+1}^2 r.$$

با ادامه این روند نتیجه می گیریم که برای هر $i \leq m$، $a_i b_{j+1}^{i+1} r = 0$. ■

۳.۲ حلقه نیم جابجایی وجود دارد که مک کوی نیست

در این بخش مثالی ارائه می دهیم که نیم جابجایی است اما مک کوی نیست. در بررسی این مثال به لم لوزی نیاز داریم. بنابراین ابتدا بعضی از مفاهیم مقدماتی جهت بیان لم لوزی را ذکر می کنیم.

مقدمه. فرض کنیم k یک حلقه جابجایی و یکدار و X یک مجموعه ناتهی باشد. همچنین فرض کنیم $\langle X\rangle$، تکوار تولید شده توسط X باشد، یعنی؛ $\langle X\rangle = \{x_1 x_2 \ldots x_n \mid x_i \in X \ , n \in N\} \cup \{1\}$. در این صورت $k\langle X\rangle$، $k-$جبر شرکت پذیر آزاد تولید شده توسط X است.

تقلیل. فرض کنیم $i \in I$ و $A, B \in \langle X\rangle$. مجموعه $\{I$ یک مجموعه اندیس گذار باشد، $\{W_i - f_i \,; i \in I$ را در نظر می گیریم که به ازای هر $i \in I$، $W_i \in \langle X\rangle$ و $f_i \in k\langle X\rangle$. بنابراین $k-$درونریختی $\varphi : k\langle X\rangle \to k\langle X\rangle$ با ضابطه $AW_iB \mapsto Af_iB$ را یک $k-$تقلیل می نامیم، که این تابع هر عنصر از $\langle X\rangle$ را به خودش تصویر می کند و سایر عناصر $k\langle X\rangle$ را حرکت نمی دهد.

توجه داریم که برای کلیه عناصر در $\langle X\rangle$ یا در $k\langle X\rangle$ حداقل یک تقلیل وجود دارد که می توان برای آنها بکار برد. پس اگر هر تقلیل، تغییرناپذیر باشد آنگاه تک جمله ای تقلیل ناپذیر است.

گراف. گراف جهت دار G، گرافی است که در آن راس w به راس w' وصل می شود هرگاه w' حاصل تقلیل w باشد.

مؤلفه همبندی. زیرگراف ماکسیمال C از گراف G را یک مؤلفه همبندی می نامیم هرگاه بین هر دو راس آن یک مسیر وجود داشته باشد.

لم لوزی. فرض کنیم G یک گراف جهت دار و v یک راس از آن باشد به طوریکه

۱. طول هر مسیر جهت دار با نقطه شروع v متناهی باشد

۲. (شرط لوزی) هر دو مسیر با نقطه شروع از v را بتوان به مسیرهای جهت دار با نقطه پایان یکسان توسیع داد.