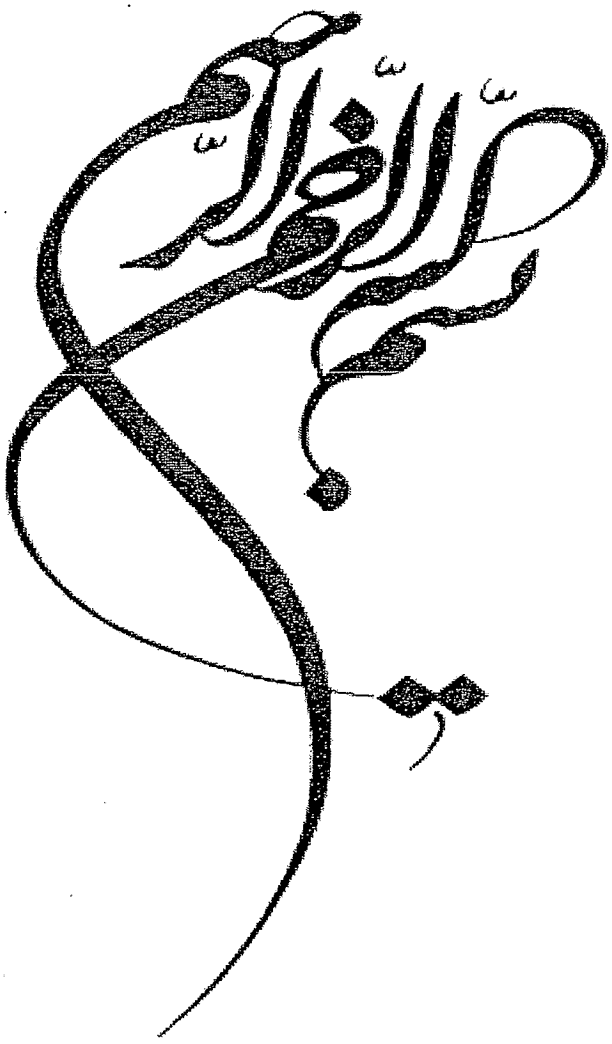


۱۳۸۷ /۷/ ۱۰

۹۳۸۷۴

۸۷/۱/۱۰۵۳۴۴
۸۷/۱۱/۲۰

دانشگاه علامه طباطبائی تهران

گروه آمار

عنوان

سامانه های صف دو مرحله ای با بازگشت برنولی و سرویس انتخابی و تعطیلی سرویس دهنده

استاد راهنما : دکتر عبدالرحیم بادامچی زاده

استاد مشاور : دکتر محمد رضا صالحی راد

۱۳۸۷ /۷/ ۱۵

۹۸۷۹۳

تهیه و تنظیم :
عبداله کارگر حسین بیگی

بسمه تعالی

دانشگاه علامه طباطبائی

دانشکده اقتصاد

ارزشیابی پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد

جلسه نهائی دفاعیه پایان نامه آقای عبداله کارگر حسین‌بیگی دانشجوی کارشناسی ارشد

رشته: آمار اجتماعی و اقتصادی

تحت عنوان :

« بررسی سامانه صف دو مرحله‌ای با بازگشت برنولی و سرویس انتخابی با تعطیلی سرویس‌دهنده»

در تاریخ ۸۷/۶/۱۳ با حضور امضاء کنندگان زیر انجام و با درجه عالی و نمره ۱۹ مورد تصویب قرار گرفت.

اعضاء هیأت داوران :

۱- استاد راهنما و عضو هیأت داوران : آقای دکتر بادامچی‌زاده

۲- استاد مشاور و عضو هیأت داوران : آقای دکتر صالحی‌راد

۳- نماینده تحصیلات تکمیلی و عضو هیأت داوران : آقای دکتر سلیلی

۴- عضو هیأت داوران : آقای دکتر خرم

تقدیرو تشکر

اول سپاس خدای بزرگ را هر توفیقی در گرو لطف و عنایت اوست و سپس اساتید محترمی که مرا درس زندگی آموختند . پیش از همه از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر عبدالرحیم بادامچی زاده ،که در این پایان نامه با راهنمایی های ارزنده و هدایت های بی دریغ خویش ، برجسته ترین نقش را داشته اند ، نهایت تشکر را دارم .

از جناب آقای دکتر محمد رضا صالحی راد که تذکراتشان باعث غنای پایان نامه شدوهمچنین از زحمات اساتید محترم جناب آقای دکترخرم و سلیلی کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم .

در پایان از پدر، مادر و همسرم که مشعلان طریق علم آموزی ام بوده اند و با حمایت های بی دریغ خویش ،همیشه دلگرمی بنده شده اندنهایت سپاس و قدر شناسی را دارم .

عبداله کارگر حسین بیگی

شهریور - ۱۳۸۷

چکیده

در این پایان نامه به بررسی سامانه های صف می پردازیم . که ورودی آنها پواسون بوده و تک سرویس دهنده ای با توزیع کلی به ارایه سرویس می پردازد. همچنین سرویس دارای دو مرحله سرویس نامتجانس است که زمان سرویس هر مرحله دارای توزیع کلی و مستقل از همدیگر است. به علاوه سرویس دهنده پس از اتمام سرویس یک متقاضی به دلایل مختلف مانند خستگی ،ارتقاء سامانه ،ارایه سرویس درباجه ای دیگر و... باجه سرویس را با احتمال θ تعطیل می کند و با احتمال $1-\theta$ برای ارایه سرویس در سامانه باقی می ماند. این نوع تعطیلی به شیوه برنولی معروف است . زمان تعطیلی دارای توزیع کلی است که مستقل ازتوزیع زمان های سرویس در نظر گرفته می شود.

در فصل اول پایان نامه به بیان مفاهیم مقدماتی و اساسی نظریه صف بندی می پردازیم که در فصل های بعدی مکرر از آنها استفاده خواهیم کرد.

در فصل دوم به بررسی سامانه صفی با ورودی پواسون ،دو مرحله سرویس نامتجانس با توزیع زمان های کلی و مستقل وبا تعطیلی سرویس دهنده به شیوه برنولی می پردازیم .

در فصل سوم سامانه صفی با ورودی پواسون و دو مرحله سرویس ناهمگن بررسی می شود، که سرویس مرحله اول اجباری بوده و سرویس مرحله دوم اختیاری می باشد به قسمی که پس از اتمام سرویس مرحله اول یا مرحله دوم به دلایلی سرویس متقاضی با احتمال معینی رد شده و متقاضی به اول صف اصلی باز خورد می شود.

درفصل چهارم سامانه صف باورودی پواسون و دو مرحله سرویس ناهمگن و تعطیلی به شیوه برنولی بررسی می شود طوری که سرویس مرحله اول برای همه اجباری بوده ولی با احتمال معینی سرویس مرحله دوم را انتخاب می کند که سرویس مرحله دوم به سه نوع سرویس تقسیم می گردد که متقاضیان با احتمال معینی یکی از آنها را انتخاب می کند .

در فصل پنجم به کمک داده های از فرآیند سرویس دهی گمرک ایران، سامانه فصل چهارم را به طور عملی اجرا کرده و صحت روابط تحلیلی و نظری را بررسی می کنیم .

فهرست مطالب

فصل اول _ معرفی صف ها

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ مدل های صف بندی ۳

۱-۳ صف M/M/1 ..... ۹

۱-۴ صف M/G/1 ..... ۱۷

فصل دوم _سامانه صف دو مرحله ای با تعطیلی سرویس دهنده

۲-۱ مقدمه ۲۶

۲-۲ تعریف و مدل سازی سامانه ۲۷

۲-۳ توزیع اندازه سامانه درحالت پایا ۲۹

۲-۴ توزیع زمانهای انتظار ۴۴

۲-۵ متوسط دوره اشتغال ۴۶

۲-۶ برخی حالت های خاص ۴۷

فصل سوم _ سامانه صف دو مرحله ای نامتجانس و باز خورد سرویس دهنده به شیوه برنولی

۳-۱ مقدمه ۵۳

۳-۲ تعریف ها و مدل سازی ریاضی ۵۴

۳-۳ توزیع اندازه سامانه در حالت پایا ۵۵

۳-۴ متوسط اندازه سامانه ۶۴

۳-۵ متوسط زمان پاسخ ۶۹

فصل چهارم_ سامانه صف با سرویس نوع دوم انتخابی و متنوع و تعطیلی سرویس دهنده

۴-۱ مقدمه ۷۳

۴-۲ تعریف ها و مدل سازی ریاضی ۷۴

۴-۳ توابع مولد احتمال حالت پایا ۷۸

۴-۴ متوسط اندازه های سامانه و دیگر اندازه های موثر سامانه ۸۵

فصل پنجم

مثال کاربردی ۹۰

مراجع ۹۴

فصل اول

معرفی صف

۱-۱ مقدمه

با ازدیاد جمعیت جهان و مسایل گوناگون و پیچیده آن ،برای موفقیت انجام امور اجتماعی لازم است که همه افراد حقوق همدیگر را محترم شمرده و برای گرفتن سرویس از جامعه، نوبت دیگران را رعایت نمایند.

اگر تابع این روش باشیم که در مقابل هر متقاضی فورا سرویس لازم را انجام دهیم، آنگاه علاوه بر بروزمسایل متعدد ، از نظر اقتصادی نیز به صرفه نخواهد بود . پس باید باور کنیم که انتظار جزئی از زندگی ما را تشکیل می دهد. خطوط انتظار در جهان امروزی از قسمتهای مختلفی مانند انسانها،اتومبیل ها ویا اتفاقاتی که منجر به تشکیل آن می گردد ، به وجود می آیند. که بعضی از مثالهای کلاسیک آن مانند ترافیک، انسانها،حمل ونقل در صنعت وغیره می‌باشد. مساله حمل ونقل در صنعت به صورتهایی مانند هواپیماها در باند پروازفرودگاهها،کشتی ها وکامیونها در بارانداز ها،اتومبیل ها برای عبور از پل ها یا تونل ها یا دریافت بنزین از پمپ بنزین هاو... که در صف انتظار قرا می گیرند ، اتفاق می‌افتد.

اداره ها و بنگاههای اقتصادی برای سرویس دادن به مشتریان (ارباب رجوع ها)باید طوری برنامه ریزی نمایند تا باعث ناراحتی و از دست دادن مشتریان نگردند.

در بیمارستان برای سرویس دادن به بیماران صف های مختلفی تشکیل می گردد که معمولا باعث آزار و ناراحتی بیماران می شود. در صف انتظار برای ورود به آزمایشگاه ، اتاق عمل و... نیز باید برنامه ریزی صحیحی صورت پذیرد. در این گونه موارد نظریه صف بندی و کاربردهای آن می‌تواند کارساز باشد.

نظریه صف

مطالعه ریاضی صف های انتظار بر اساس اندازه صف، زمان انتظاردر صف، زمان لازم برای انتظار درکل سامانه و همچنین متوسط این اندازه ها موضوعات اساسی نظریه صف هستند .

پس اصول نظریه صف را می توان از نظر ریاضی به دوگروه تقسیم نمود.

الف- صف هایی که دارای یک توزیع مشخص بوده ،در آنها خط مشی ورودی و سرویس دارای فرمول مشخص می باشد.

ب- صف های که دارای توزیع های کلی یا تجربی یا فرضی بوده که با استفاده از شبیه سازی مورد مطالعه قرار می گیرند.

در زندگی روز مره تعداد زیادی صف وجود دارد که برخی ازآنها را می توان برنامه ریزی نمود و بعضی غیر قابل پیش بینی است. ملا حظه می کنیم که مقدار زمانی که برای انتظار تلف می شود،گاهی ممکن است یک هفته،یا یک ماه ، یا سال باشد.

تاریخچه صف

نقطه شروع نظریه صف به سال ۱۹۰۹میلادی بر می گردد،وقتی که ریاضی دان دارنمارکی ارلانگ(۱۹۲۹-۱۸۷۸) مقاله اصلی خود را درباره بررسی ترافیک خطوط تلفن منتشر کرد . ارلانگ را باید به حق بانی نظریه صف دانست .

ارلانگ کارمندشرکت مخابرات دانمارک بوده و وظیفه اش استفاده از روشهای ثابت شدهٔ احتمال در مساله تعیین تعداد بهینه استفاده خطوط تلفن بر اساس در خواستهای مکالمه بود.در سال۱۹۲۷مولینا کاربرد نظریه احتمال در مسائل اساسی تلفن را منتشر کرد .

در اوایل سال۱۹۳۰فیلکس پولاچک بعضی کارهای پیشینیان برای ورودی پواسون،خروجی دلخواه و مسائل یک باجه ای را دنبال کرد ودر همان ایام کار دیگری در روسیه بوسیله کولموگروف و خینچین و در فرانسه بوسیله کروملین و در سوئدبه وسیله پالم انجام گرفت.در اوایل کارهادر نظریه صف نسبتا به کندی انجام گرفت .اما در سال۱۹۵۰به بعد این روند تغییر یافت و در این اواخر کارهای قابل توجهی در این زمینه انجام شده است.

۱-۲ مدل های صف بندی

توصیف مدل صف بندی اشخاص، اشیاء و یا کارها به منظور گرفتن یک نوع سرویس به یک مکان مراجعه می کند که هریک از آنها را معمولا متقاضی می نامند. اگر ارائه سرویس بلافاصله مقدور نباشد. متقاضیان منتظر می مانند و یک صف را تشکیل داده وهرمتقاضی بعداز گرفتن سرویس سامانه را ترک می کند.

الف- طرح ورود متقاضیان

۱-الگوی های ورودی به یک سامانه صف بندی معمولا برحسب متوسط تعداد ورود در واحد زمان یا میانگین نرخ ورود یا میانگین فاصله زمانی دوورود متوالی اندازه گیری می شود.

۲-درالگوی های ورودی، جریان ورود نیز مطرح است یعنی به عبارتی جریان ورود یا قطعی است یا احتمالاتی و یا تصادفی ، که می تواند بر روی مدل صف بندی موثر می باشد.

۳-عامل موثر دیگر برروی مدل های صف بندی مراجعه گروهی به جای مراجعه تکی می باشد

۴- عامل موثر نهایی بر مدل صف بندی این است که الگوی ورودی با زمان تغییر کند. اگر الگوی ورودی با زمان تغییر نکند یعنی تابع توزیع احتمال ورود متقاضی مستقل از زمان باشد آنگاه الگوی ورود پایا (مانا)می نامند .

ب- الگوی ارائه سرویس

تمام عوامل فوق در مورد ارائه سرویس نیز صادق است، یعنی با تغییر آنها مدل صف بندی نیز تغیر می کند.

پ- نظم صف

روش انتخاب متقاضیان برای انجام سرویس را نظم صف می گویند. رایج ترین آنها انجام سرویس به ترتیب ورود است ، که آن را با[۱] (FIFO)یا (FCFS) نشان می دهند.

---

۱) First In First out (First come First service

ج – مراحل سرویس

۱- سامانه صف بندی تنها یک مرحله سرویس دارد مانند آرایشگاه ها یا فروشگا ههها،

۲-سامانه صف بندی که دویا بیش از دو مرحله سرویس دارد، مانند سامانه خط های تولید و نامه های اداری و ... که این مراحل سرویس دهی،می تواند مدل های مختلفی برای صف بندی داشته باشد.

الف) سامانه صف بندی چند مرحله ای با تک سرویس دهنده ،

ب) سامانه صف بندی چند مرحله ای باتک سرویس دهنده با بازخوردهای مختلف(برگشت به اول صف یا اول سرویس یا بین مرحل سرویس)،

ج) سامانه صف بندی چند مرحله ای با c سرویس دهنده ،

د– ظرفیت سامانه

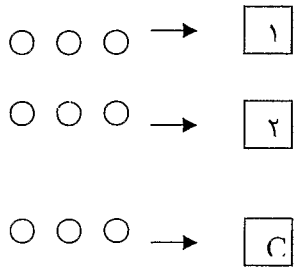
دربعضی از سامانه های صف بندی به دلایل مسائل اقتصادی و هزینه ای، ممکن است از نظر گنجایش مکان انتظار محدودیت فیزیکی وجود داشته باشد. یعنی ممکن است حداکثرتوان پذیرش، مثلا k متقاضی را داشته باشد. در این صورت می گوییم ظرفیت سامانه محدود و برابر k است. این محدودیت بر اندازه های موثربودن(اندازه صف و...) تاثیر می گذارد.

ه – تعداد باجه های سرویس

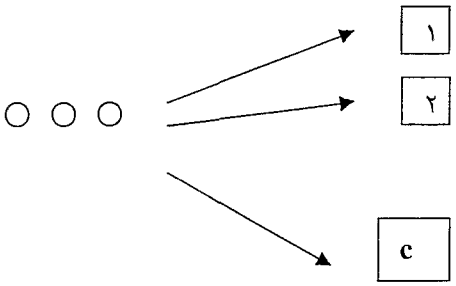
به تعداد سرویس های موازی که همزمان می توانند به ارایه سرویس بپردازند، اطلاق می شود. این نوع سرویس دهی دو نوع می باشد.

۱-متقاضیان برای هر باجه صف جداگانه (C صف جداگانه)تشکیل می دهند و هر-متقاضی از باجه مربوطه خود سرویس می گیرد به عبارتی Cمدل یک باجه ای شکل (۱-۱).

۲-متقاضیان ابتدا یک صف تشکیل داده،بعد از اول صف متقاضیان به باجه های موازی مراجعه نموده و سرویس می گیرند به عبارتی یک مدل Cباجه‌ای داریم (شکل ۱-۲).



شکل (۱-۱)



شکل (۱-۲)

برای توصیف این مراحل صف بندی نماد معروف کندال(۱۹۵۳) برای یکسان سازی در متون صف بندی ارائه شده است که بصورت A/B/X/Y/Z نشان داده می شود.

که‌در آن Aتوزیع‌مدت‌زمان بین دو ورود متوالی ،B الگوی‌سرویس(توزیع‌احتمال‌زمان سرویس)،Xتعداد باجه های موازی،Yتعداد ظرفیت سامانه ونظم صف می باشند.

از اصلی ترین بحث های این پایان نامه **تعطیلی سرویس دهنده** وسامانه های **صف بازخوردی** می باشد که در این قسمت تعریف کلی از این مفاهیم را داریم .

تعطیلی سرویس دهنده

در برخی از مدل های صف بندی سرویس دهنده به دلایل مختلفی برای مدت معینی سرویس را ترک می کند. در یک خط تولید برای تعمیر و ارتقاء دستگاه، در ادارات برای رفع خستگی کارمندها ویا ارائه سرویس دیگر و از این قبیل مسایل ،سرویس تعطیل می شود .واضح است که این اتفاق تاثیری اساسی در طول صف و زمان انتظار متقاضیان خواهد داشت .

سامانه صف بازخوردی

در برخی از سامانه های صف، سرویس متقاضیان در انتهای سرویس مورد بررسی قرار می گیرد . ممکن است ارائه سرویس مورد قبول واقع نشود. در این صورت متقاضی مورد نظر برای دریافت مجدد سرویس باید به صف برگردد . به عنوان مثال در یک خط تعمیر قطعات یا اظهار نامه های وارداتی و صادراتی در گمرکات و غیره ،این نوع اتفاقات رخ می دهد. البته این باز خورد ها (بازگشت ها)به دو نوع صورت می گیرد

الف- متقاضی به انتهای صف برمی گردد.

ب- در برگشت مجدد ،متقاضی با اولویت و بدون رعایت صف سرویس دریافت می کند.

تعریف

یک سامانه را در حالت پایا (ما نا) گوییم هرگاه رفتار سامانه مستقل از زمان باشد.

اگر $p_n(t)$ نشانگر احتمال وجود n متقاضی در سامانه در زمانt باشد، آنگاه در حالت پایا داریم

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} p_n(t) = 0$$

تعریف دوره بیکاری

فاصله زمانی بین خروج آخرین متقاضی از سامانه تا ورود اولین مشتری بعدی را دوره بیکاری سرویس دهنده یا فاصله زمانی بین دوره اشتغال متوالی را دوره بیکاری می نامند.

تعریف دوره اشتغال

فاصله زمانی بین ورود یک متقاضی به یک باجه بیکار در(زمان صفر)تا زمانی که باجه سرویس دو باره بیکار شود را دوره اشتغال سرویس دهنده گویند.

تعریف چرخه اشتغال

مجموعه دوره اشتغال ودوره بیکاری مجاور آن،یا فاصله زمانی بین دومراجعه متوالی به سامانه ای تهی، یا فاصله زمانی بین دو خروج متوالی که سامانه تهی را پشت سر می‌گذارد راچرخه اشتغال گویند.

عامل بهره دهی یا شدت ترافیک

این عامل را با ρ نمایش می دهند وآنرا به صورت زیر تعریف می کنند

$$\rho = \frac{\text{متوسط نرخ ورود}}{\text{متوسط نرخ خروج}}.$$

درصدی از زمان که سامانه کار می کند ویا نسبت میانگین کل تقاضا برای دریافت سرویس در واحد زمان به کل ظرفیت سامانه برای ارائه سرویس در واحد زمان را عامل بهره دهی یا شدت ترافیک گویند. عامل بهره دهی هرچقدر بزرگتر باشد تقاضا برای دریافت سرویس زیادتر می شودو سامانه باید کار بیشتر ی را انجام دهد بنابراین صف طولانی می گردد.

نرخ بیکاری

بنا به تعریف وجود صفر متقاضی در سامانه در هر زمان دلخواه را گویند.

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

دراین صورت میانگین زمان بیکاری (برای امکانات سرویس)عبارتست از

$$\text{میانگین زمان بیکاری} = (1 - \frac{\lambda}{\mu}) \times \text{زمان کل سرویس}$$

۱-۳ صف M/M/1

این صف از ساده ترین و معمول ترین مدل ها صف است که حالت خاص اکثر سامانه های صف می باشد. نتایج آن الهام بخش مطالعه سامانه های صف بندی و تاییدی بر صحت روابط آنها ست.

در این مدل تک باجه ای توزیع ورودی مدل پواسون بوده وتوزیع سرویس نمایی است . در این سامانه ورود ها و خروج ها در طول زمان تصادفی اند. نظم صف به ترتیب ورود (FIFO) که می توان ورودی ها را به عنوان زاد و خروجی ها را به عنوان مرگ تعبیر نمود. یعنی حالت خاصی از فرایند زاد ومرگ است. چنین صفی رابه عنوان صف ساده(صف مارکوفی یا پواسونی) هم مي شناسیم.

متقاضیان بر اساس فرایند پواسون بانرخ λ مراجعه می کنند. یعنی احتمال وقوع مراجعه در بازه به طول بی نهایت کوچکh برابر است با$\lambda h+o(h)$.در صورتیکه احتمال بیش از یک مراجعه در چنین بازه ای برابر$o(h)$است.واین معادل این است که توزیع فواصل زمانی بین دو ورود متوالی نمایی با تابع چگالی $a(t)=\lambda e^{-\lambda t}$خواهد بود.

توزیع زمانهای سرویس ،نمایی با پارمتر μ و تابع چگالی آن $b(t)=\mu e^{-\mu t}$ می باشد.

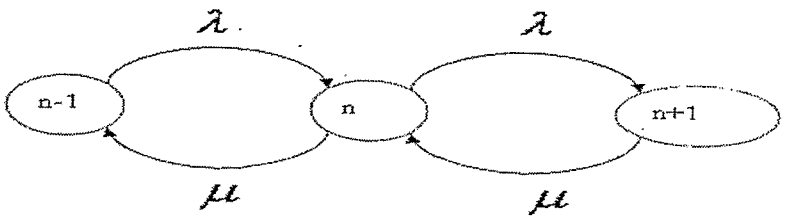
به عبارتی احتمال سرویس در بازه به طول بی نهایت کوچک h برابراست با $\mu h+o(h)$ وانجام بیش از یک سرویس در چنین باجه ای برابر$o(h)$ است.

فرض بر این است که فواصل زمانی مراجعات و زمان های سرویس از نظر احتمال مستقل هستند. چنین مدل صفی را صف$M/M/1$ (صف ساده با پارامتر λ و μ)می نامند.میانگین زمان مراجعات $\frac{1}{\lambda}$ و میانگین زمان سرویس $\frac{1}{\mu}$ است .

رفتار مدل صف بندی در حالت پایا

قبل از ارائه معادلات حالت پایا در مدل صف بندی فوق به روش ریاضی، می خواهیم به روش هندسی و شهودی معادلات حالت پایا را بدست آوریم که یک روش کوتاه می باشد. در حالت خاص فرض می کنیم $\lambda_n=\lambda, \mu_n=\mu$ باشد.

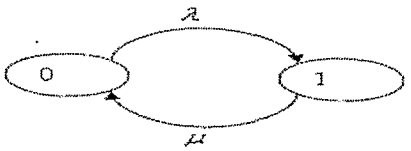
وقتی شرایط حالت پایا برقرار باشد لازم است که کل جریان ورودی به حالت، برابربا کل جریان خروجی از حالت باشد.برای صف M/M/1حالتn(n>1) را در نظر می گیریم. دراین صورت نمودار زیر را داریم .



اگرکل جریان ورودی و جریان خروجی را برابربگیریم آنگاه

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n \Rightarrow P_{n+1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}$$

برای این مدل در حالتn=0 خاص است. در این حالت نمودار زیر را داریم.



در اینجا نیز اگر کل جریان ورودی وخروجی باهم برابر باشند، داریم.

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

تحلیل فوق، یعنی مساوی قرار دادن کل جریان ورودی با کل جریان خروجی به یک حالت را معادلات تعادل کلی می گویند.

این معادلات را می توان بر اساس روابط فرایند زاد و مرگ نیز بدست آورد. برای این منظور فرض می کنیم اگر $P_n(t)$ احتمال وجود n متقاضی در سامانه درزمان t باشد.در این صورت برای باقی ماندن در حالت n تا لحظه $t+\Delta t$ چهار حالت وجود دارد

۱)سامانه تا زمان t در حالتn قرار دارد و هیچ ورودی یا خروجی در فاصله زمانی به طول Δt اتفاق نیافتد.

۲)سامانه تازمانt در حالت n قرار دارد و یک ورودی و یک خروجی در فاصله $(t,t+\Delta t)$ اتفاق افتد.

۳)سامانه درزمانt در حالت n-1 قرار دارد ودر فاصله زمانی به طول Δt یک ورودی داشته باشیم و سامانه خروجی نداشته باشد.

۴)سامانه در زمانt در حالت n+1 قرار دارد ودر فاصله زمانی به طول Δt سامانه یک خروجی دارد ولی هیچ ورودی نداشته باشد.

باتوجه به این شرایط معادلات زادو مرگ را نوشته و بعد از خلاصه کردن وتقسیم طرفین این معادلات بر Δt و حد گیری زمانی که Δt به سمت صفر میل می‌کند داریم

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t}=-(\lambda+\mu)p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+\mu p_{n+1}(t) \quad (۱-۳-۱)$$

برای این منظور ، n = ۰،در سامانه را بررسی می کنیم. دو حالت رخ می دهد.

۱- اگر در زمانt در حالت صفر باشیم و هیچ ورودی در طول بازه ای کوچک رخ ندهد.

۲- اگردر زمانt در حالت یک باشیم و در طول بازه کوچک هیچ ورودی رخ ندهد، اما سامانه یک خروجی داشته باشد. آنگاه خواهیم داشت

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)[1-\lambda\Delta t) + p_1(t)[\mu\Delta t][1-\lambda\Delta t]$$

با صرفنظر کردن جملات $(\Delta t)^2$ داریم

$$\lim_{\Delta t\to 0} = \frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \qquad (۲\text{-}۳\text{-}۱)$$

معادله های فوق را معادله های دیفرانسیلی تفاضلی می‌گویند.

حال معادله های فوق در حالت پایا را حل می‌کنیم . برای این منظور ، طبق تعریف حالت پایا داریم

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} p_n(t) = 0$$

حالت پایا زمانی رخ می دهدکه $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ باشد. اگر $\frac{\lambda}{\mu} > 1$ باشد آن را حالت انفجار در سامانه می‌گویند. که معادلات(۱-۳-۱)و(۱-۳-۲) به صورت زیر خواهند بود

$$0 = -(\lambda+\mu)p_n + \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۱)$$

برای حالت $n = 0$، داریم

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \qquad (۴\text{-}۳\text{-}۱)$$

برای اطلاعات بیشتر به گراس و همکاران [۶] مراجعه کنید .