بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مراغه
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه :

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

مدول‌های $\mathcal{W}$–گرنشتاین

استاد راهنما:

دکتر محسن آقاجانی

پژوهشگر:

الهام بالش‌زر

مهر ۱۳۹۱

ستایش...

قلم‌ها قیام می‌کنند تا قیامت بر پا کنند. دل‌ها را خورشیدی و چشم‌ها را بارانی کنند. طوفانی به راه اندازند و لیلی‌ها را مجنون کنند. هم از عشق می‌نویسند، هم از علم؛ وچه قلم ارزشمندی است قلم علم! اگر علم از قلم می‌چکد، بی‌شک لطف خداست، همین جاست که قلم مولانا می‌نویسد:

کار تو تبــدیل اعیان و عطـــــا

کار ما سهو است و نسیان و خطا

سهو و نسیان را مبدل کن به علم

من همه جهلم مرا ده صبر و حلم

درست همان جایی که خداوند به قلم قسم می‌خورد«ن و القلم و ما یسطرون» (سوره‌ی قلم، آیه‌ی ۱) گر چه به قلم قسم می‌خورد اما در پس پرده به انسانی سوگند می‌خورد که قلم در دست می‌گیرد و می‌نویسد. قلم به خودی خود ارزش ندارد؛ به دیگر بیان، اگر انسان ارزشمند باشد آن‌گاه قلم ارزشمند است و ارزشمند می‌نویسد.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای دلسوز و مهربانم، جناب آقای دکتر محسن آقاجانی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین از جناب آقای دکتر رضا سزیده که قبول زحمت نموده و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند تقدیر و تشکر می نمایم.

در پایان، از خانواده‌ی عزیزم که بعد از خدا همواره همراه وپشتیبانم بوده‌اند نهایت تشکر را ابراز می‌دارم.

الهام بالش‌زر

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به

تمامی عزیزانم...

نام خانوادگی دانشجو: بالش‌زر نام: الهام

عنوان پایان نامه:

مدول‌های $\mathcal{W}$−گرنشتاین

استاد راهنما: جناب آقای دکتر محسن آقاجانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه

تارخ فارغ التحصیلی: مهر ۱۳۹۱ تعداد صفحه:۸۶

کلید واژه‌ها: کلاس خودمتعامد، مدول $\mathcal{W}$−گرنشتاین، بعد رزلوشن، دو مدول نیمه دوگان (وفادار)، کلاس اوسلاندر، کلاس باس

چکیده:

در این نوشتار فرض می‌کنیم $\mathcal{W}$ یک کلاس از R−مدول‌های چپ خودمتعامد باشد.

مدول‌های جدیدی را با عنوان مدول‌های $\mathcal{W}$−گرنشتاین معرفی و مورد مطالعه قرار می‌دهیم که توسیع مشترکی از مدول‌های تصویری (انژکتیو)گرنشتاین و مدول‌های $\mathbf{V}$−گرنشتاین تصویری (انژکتیو) می‌باشند.

در نهایت، مدول‌های $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}$−گرنشتاین و $\mathcal{W}_{\mathcal{I}}$− گرنشتاین را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{P}} := \{C \otimes_R P \mid \text{یک } R\text{− مدول چپ تصویری است } P\}$$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{I}} := \{\mathrm{Hom}_S(C, E) \mid \text{یک } S\text{−مدول چپ انژکتیو است } E\}$$

که در آن ${}_SC_R$ یک $(S\text{–}R)$ دو مدول نیمه دوگان می‌باشد.

فهرست مطالب

مقدمه

اوسلاندر [۱] و بریجر [۲] [۲] در سال ۱۹۶۹ G–بعد را برای مدول‌های با تولید متناهی معرفی کردند. ایناکس [۳] و جندا [۴] [۷] با الهام از این موضوع، مدول‌های گرنشتاین تصویری و همچنین بعد گرنشتاین تصویری را برای مدول‌های دلخواه تعریف نمودند.

نشان داده شده که برای مدول‌های با تولید متناهی روی حلقه‌های جابه‌جایی و نوتری، بعد گرنشتاین تصویری با G–بعد یکی می‌باشد. همچنین مدول‌های گرنشتاین انژکتیو در [۷] معرفی شده‌اند.

در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول بعدی را آورده ایم.

در فصل دوم مدول‌های $\mathcal{W}$–گرنشتاین را برای کلاس خودمتعامد $\mathcal{W}$ از R–مدول‌های چپ معرفی می‌کنیم. یک R–مدول چپ M را $\mathcal{W}$– گرنشتاین گوییم اگر دنباله‌ی دقیق

$$W_\bullet = \cdots \longrightarrow W_1 \longrightarrow W_0 \longrightarrow W^0 \longrightarrow W^1 \longrightarrow \cdots$$

---

[۱] Auslander

[۲] Bridger

[۳] Enochs

[۴] Jenda

از مدول‌های در $\mathcal{W}$ موجود باشد به طوری‌که $M = Ker(W^{0} \longrightarrow W^{1})$ و $W_{\bullet}$ با تاثیر دو تابعگون $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{W}, -)$ و $\mathrm{Hom}_R(-, \mathcal{W})$ برای انتخاب‌های دلخواه از $\mathcal{W}$ دقیق باشد.

کلاس مدول‌های $\mathcal{W}-$گرنشتاین را با $\mathcal{G}_{\mathcal{W}}$ نشان می‌دهیم.

در فصل سوم مدول‌های $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}-$گرنشتاین و $\mathcal{W}_{\mathcal{I}}-$ گرنشتاین را برای دومدول نیمه دوگان ${}_SC_R$ روی حلقه‌های شرکت پذیر R و S بررسی می‌کنیم. این کلاس‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{P}} := \{C \otimes_R P \mid \text{یک } R- \text{ مدول چپ تصویری است } P\}$$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{I}} := \{\mathrm{Hom}_S(C, E) \mid \text{یک } S-\text{مدول چپ انژکتیو است } E\}$$

و آن‌ها را به ترتیب مدول‌های $C-$گرنشتاین تصویری و $C-$گرنشتاین انژکتیو می‌نامیم. ثابت می‌کنیم $\mathcal{W}_{\mathcal{P}} = Add_SC$ و $\mathcal{W}_{\mathcal{I}} = ProdC^{+}$ است جاییکه $C^{+} = \mathrm{Hom}_S(C, Q)$ و ${}_SQ$ یک هم مولد انژکتیو باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که:

زیر رسته‌ی $R-$مدول‌های چپ $C-$گرنشتاین انژکتیو ($R-$مدول‌های چپ گرنشتاین تصویری در کلاس اوسلاندر) و $S-$مدول‌های چپ گرنشتاین انژکتیو در کلاس باس ($S-$مدول‌های چپ $C-$گرنشتاین تصویری) تحت هم ارزی فاکسبی هم ارزند.

با استفاده از این مطالب نشان می‌دهیم که روی یک حلقه‌ی جابه‌جایی و نوتری، یک $R-$مدول متناهی مولد M، $addC-$ گرنشتاین است اگر و تنها اگر $AddC-$گرنشتاین باشد.

$a \oplus k$

فصل ۱

پیش نیازها

در سراسر این پایان‌نامه همه‌ی حلقه‌ها را شرکت پذیر و یکدار و همه‌ی مدول‌ها را یکانی در نظر می‌گیریم. R−مدول چپ M را با $_RM$ و R−مدول راست M را با M_R نمایش می‌دهیم.

برای نمایش حاصلضرب (حاصلجمع) مستقیم از کپی‌های M با اندیس (I) از نمادهای M^I $(M^{(I)})$ استفاده می‌کنیم.

ابعاد تصویری (انژکتیو) M را با $pd(M)$ $(id(M))$ نمایش می‌دهیم. Add_RM (add_RM)) برای کلاس همه‌ی مدول‌های یکریخت با جمعوندهای مستقیم از جمع مستقیم دلخواه (متناهی) از کپی‌هایی M به کار برده می‌شود و $Prod_RM$ برای کلاس همه‌ی مدول‌های یکریخت با جمعوندهای مستقیم از حاصلضرب مستقیم کپی‌های M به کار برده می‌شود.

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم R و S دو حلقه‌ی شرکت پذیر باشند، ${}_SM_R$ یک $(S\text{-}R)$ -دو مدول است اگر M یک S−مدول چپ و یک R−مدول راست باشد و برای هر $s \in S$ ، $r \in R$ و $x \in M$ شرط $s(xr) = (sx)r$ برقرار باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{W}$ یک کلاس از R−مدول‌های چپ باشد. $\mathcal{W}$ خودمتعامد نامیده می‌شود اگر در شرط $Ext^i_R(W, W') = \circ$ برای هر $W, W' \in \mathcal{W}$ و هر $i \geq ۱$، صدق کند.

همیشه $\mathcal{W}$ به عنوان یک کلاس از R−مدول‌های چپ که تحت جمع مستقیم متناهی و جمعوند مستقیم بسته است تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱ M را یک R−مدول $\mathcal{W}$−گرنشتاین گوییم اگر دنباله‌ی دقیق

$$W_\bullet = \cdots \longrightarrow W_۱ \longrightarrow W_\circ \longrightarrow W^\circ \longrightarrow W^۱ \longrightarrow \cdots$$

از مدول‌های در $\mathcal{W}$ موجود باشد بطوریکه $M = Ker(W^\circ \longrightarrow W^۱)$ و $W_\bullet$ با تاثیر دو تابعگون $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{W}, -)$ و $\mathrm{Hom}_R(-, \mathcal{W})$ دقیق باشد. $\mathcal{G}_\mathcal{W}$ را کلاس R−مدول‌های چپ $\mathcal{W}$−گرنشتاین در نظر می گیریم.

تعریف ٤.۱.۱ کلاس همه‌ی مدول‌های یکریخت با جمعوندهای مستقیم از جمع مستقیم متناهی از کپی‌هایی M را add_RM می گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ کلاس همه‌ی مدول‌های یکریخت با جمعوندهای مستقیم از جمع مستقیم دلخواه از کپی‌هایی M را Add_RM می گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ برای R–مدول M نگاشت دوگان مضاعف، نگاشت متعارف زیر می‌باشد:

$$\sigma_M : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R)$$

$$\sigma_M(x)(\Psi) = \Psi(x)$$

برای هر $\Psi \in \mathrm{Hom}_R(M,R), x \in M$.

تعریف ۷.۱.۱ یک $R-$ مدول متناهی M متعلق به کلاس G ($G(R)$) است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد.

الف)برای هر $m > \circ$، $Ext_R^m(M,R) = \circ$.

ب)برای هر $m > \circ$، $Ext_R^m((\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R),R) = \circ$.

ج)نگاشت دوگان مضاعف$\sigma_M : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R)$ یکریختی باشد.

مثال: هر R–مدول آزاد متناهی متعلق به G -کلاس می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱ G–رزلوشن R–مدول M یک دنباله از مدول‌های در $G(R)$ است به صورت:

$$\cdots \longrightarrow G_L \longrightarrow G_{L-۱} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_۱ \longrightarrow G_\circ \longrightarrow \circ$$

بطوریکه در G_L برای $L > \circ$ دقیق است و $M \cong G_\circ|_{Im(G_۱ \longrightarrow G_\circ)}$ یعنی دنباله‌ی دقیق

$$\cdots \longrightarrow G_L \longrightarrow G_{L-۱} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_۱ \longrightarrow G_\circ \longrightarrow M \longrightarrow \circ$$

را داریم. رزلوشن مذکور به‌طول n است اگر $G_n \neq 0$ و $G_L = 0$ برای $L > n$.

تعریف ۹.۱.۱ همبافت دقیق از R–مدول‌های تصویری

$$P_\bullet = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$$

را رزلوشن تصویری کامل گوییم اگر برای هر R–مدول تصویری Q تابعگون $\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, Q)$ دقیق باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ یک R– مدول M را گرنشتاین تصویری گوییم اگر رزلوشن تصویری کاملی مانند

$$P_\bullet = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد بطوریکه: $M = Ker(P^0 \longrightarrow P^1)$.

تعریف ۱۱.۱.۱ همبافت دقیق از R–مدول‌های انژکتیو

$$E_\bullet = \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

را رزلوشن انژکتیو کامل گوییم اگر برای هر R–مدول انژکتیو I تابعگون $\mathrm{Hom}_R(I, E_\bullet)$ دقیق باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ یک R–مدول M را گرنشتاین انژکتیو گوییم اگر رزلوشن انژکتیو کاملی مانند :

$$E_\bullet = \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد بطوریکه: $M = Ker(E^0 \longrightarrow E^1)$.

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر R و S دو حلقه شرکت پذیر باشند. $C ={}_S C_R$ را نیمه دوگان گوییم هرگاه

شرایط زیر برقرار باشد.

الف)${}_S C$ مرتبه‌ی $S-$ رزلوشن تصویری متناهی داشته باشد.

ب)C_R مرتبه‌ی $R-$رزلوشن تصویری متناهی داشته باشد.

ج)نگاشت همسان[1] ${}_S S_S \xrightarrow{S\gamma} \mathrm{Hom}_R(C,C)$ یکریخت باشد.

د)نگاشت همسان ${}_R R_R \xrightarrow{\gamma_R} \mathrm{Hom}_S(C,C)$ یکریخت باشد.

ه)برای هر $i \geq ۱$، $Ext^i_S(C,C)=\circ$.

خ)برای هر $i \geq ۱$، $Ext^i_R(C,C)=\circ$.

تعریف ۱۴.۱.۱ دو مدول T، خود متعامد متوازن وفادار است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

الف)$R \cong End_S(T)$ ، $S \cong End_R(T)$.

ب)برای هر $i \geq ۱$، $Ext^i_R(T,T)=\circ=Ext^i_S(T,T)$.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم ω یک مدول خودمتعامد متوازن وفادار باشد. در این صورت یک $R-$

مدول M را $\Omega-$ گرنشتاین گوییم اگر همبافت دقیق زیر

$$\cdots \longrightarrow W_{-۱} \longrightarrow W_\circ \longrightarrow W_۱ \longrightarrow \cdots$$

که در آن $W_i \in add_R\omega$ موجود باشد بطوریکه $M=Ker(W_\circ \longrightarrow W_۱)$ و همبافت دقیق فوق با تاثیر

[1]homothety

دو تابعگون $\mathrm{Hom}_R(-,\omega)$ و $\mathrm{Hom}_R(\omega,-)$ دقیق باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶ فرض کنیم R و S دو حلقه‌ی نوتری راست و چپ باشند ${}_SV_R$ یا به طور ساده V را مدول دوگان تعریف می‌کنیم یعنی $(S-R)$-دو مدولی که $R \cong End_S(V)$ و $S \cong End_R(V)$ و در شرایط زیر صدق کند:

الف) $id({}_SV) \leqslant r$ ؛ $id(V_R) \leqslant r$.

ب) برای هر $i \geq ۱$، $Ext^i_R(V,V) = \circ = Ext^i_S(V,V)$.

ج) ${}_SV$ و V_R با تولید متناهی باشد.

فرض کنیم $\mathbb{W}$ کلاس همه‌ی S-مدول‌های چپ W باشد بطوریکه $W \cong V \otimes_R P$ برای R-مدول تصویری P و $\mathbb{U}$ کلاس همه‌ی R-مدول‌های چپ U باشد بطوریکه $U \cong \mathrm{Hom}_S(V,E)$ برای S-مدول انژکتیو E. در این صورت R- مدول چپ N یک مدول V-گرنشتاین انژکتیو گفته می‌شود اگر رزلوشن دقیق زیر

$$\cdots \longrightarrow U_۱ \longrightarrow U_\circ \longrightarrow U^\circ \longrightarrow U^۱ \longrightarrow \cdots$$

برای $U^i, U_i \in \mathbb{U}$ موجود باشد بطوریکه $N = Ker(U^\circ \longrightarrow U^۱)$، و اثر تابعگون‌های $\mathrm{Hom}_R(U,-)$ و $\mathrm{Hom}_R(-,U)$ برای هر $U \in \mathbb{U}$ روی آن دقیق باشد. S-مدول چپ M یک مدول V-گرنشتاین تصویری گفته می‌شود اگر رزلوشن دقیق زیر موجود باشد.

$$\cdots \longrightarrow W_۱ \longrightarrow W_\circ \longrightarrow W^\circ \longrightarrow W^۱ \longrightarrow \cdots$$

برای هر $W_i, W^i \in \mathbb{W}$ و $M = Ker(W^{0} \longrightarrow W^{1})$، بطوریکه اثر تابعگون‌های $\mathrm{Hom}_R(-,W)$ و $\mathrm{Hom}_R(W,-)$ برای هر $W \in \mathbb{W}$ روی آن دقیق باشد. اگر $R = S$ باشد هر مدول در $\mathbb{U}$ و در $\mathbb{W}$ به ترتیب $V-$ گرنشتاین انژکتیو و $V-$گرنشتاین تصویری می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. اگر $x \in R$ یک مقسوم علیه صفر روی M نباشد در این صورت x را یک عنصر $M-$ منظم می گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۸ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. رشته‌ی $x = x_1 \cdots x_n$ از عناصر R را یک رشته‌ی $M-$ منظم گوییم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف)برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، x_i یک عنصر $\frac{M}{(x_1 \cdots x_{i-1})M}$ -منظم باشد.

ب) $\frac{M}{xM} \neq 0$.

تعریف ۱.۱.۱۹ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد و I ایده‌آلی در حلقه R باشد. $x_1, \cdots, x_n \in I$ را یک رشته‌ی $M-$منظم ماکسیمال از I گوییم هرگاه به ازای هر $x_{n+1} \in I$ رشته‌ی $x_1, \cdots, x_{n+1}$ یک رشته $M-$منظم از I نباشد.

تعریف ۱.۱.۲۰ اگر R یک حلقه نوتری باشد و M یک $R-$مدول متناهی مولد و I ایده‌آلی در R باشد بطوریکه $IM \neq M$ در اینصورت تمام رشته‌های $M-$ منظم ماکسیمال در I دارای طول یکسان هستند که این طول را درجه‌ی I در M گوییم وبا $grade(I, M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم $(R,\underline{m})$ یک حلقه موضعی نوتری و M یک R–مدول متناهی مولد باشد.

در این صورت $grade(\underline{m},M)$ را عمق M گوییم و با $depthM$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۱.۱ اگر R یک حلقه موضعی و نوتری باشد و $M \neq 0$ یک R–مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه $depthM \leqslant dimM \leqslant dimR$ و اگر $depthM = dimM$ باشد، آن‌گاه M را کوهن–مکالی می‌نامیم. گوییم حلقه‌ی دلخواه R کوهن–مکالی است هر گاه به ازای هر ایده‌آل اول P از R، حلقه‌ی موضعی R_P کوهن–مکالی باشد.

نتیجه ۲۳.۱.۱ ([۴ – ۳۰۴]) اگر C همبافت نیمه دوگان روی حلقه‌ی R باشد و برای $i \in \mathbb{N}$، $infC = inf\{i\epsilon Z|H_i(C) = 0\}$ و $supC = sup\{i\epsilon Z|H_i(X) = 0\}$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

الف) $depth_RC = depthR - infC$.

ب) $dimR - supC \leq dim_RC \leq dimR - infC$.

تعریف ۲٤.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی کوهن–مکالی از بعد کرول d باشد. Ω را یک R–مدول دوگانی گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف)Ω متناهی باشد و $id_R(\Omega) < \infty$.

ب) برای هر $i \geq 1$، $Ext^i_R(\Omega,\Omega) = 0$.

ج)نگاشت $h : R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\Omega,\Omega)$ برای هر $r \in R$ و $x \in \Omega$ که به صورت $h(r)(x) = rx$ تعریف می‌شود یکریختی باشد.

$\mathbb{V}$ را کلاسی از R–مدول‌های V فرض می‌کنیم که $V = \mathrm{Hom}_R(\Omega, E)$ برای R–مدول انژکتیو E. در این صورت R–مدول M را Ω– گرنشتاین انژکتیو گوییم اگر همبافت دقیق زیر:

$$\cdots \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V^0 \longrightarrow V^1 \longrightarrow \cdots$$

از مدول‌های در $\mathbb{V}$ با $M = Ker(V^0 \longrightarrow V^1)$ موجود باشد بطوریکه تابعگون‌های $\mathrm{Hom}_R(V, -)$ و $\mathrm{Hom}_R(-, V)$ برای هر $V \in \mathbb{V}$ روی آن دقیق است. اگر $\mathbb{W}$ کلاسی از R–مدول‌های W باشد بطوریکه $W = \Omega \otimes_R P$ برای R–مدول تصویری P، آن‌گاه M یک مدول Ω–گرنشتاین تصویری گفته می‌شود اگر همبافت دقیق زیر:

$$\cdots \longrightarrow W_1 \longrightarrow W_0 \longrightarrow W^0 \longrightarrow W^1 \longrightarrow \cdots$$

از مدول‌های در $\mathbb{W}$ موجود باشد بطوریکه $M = Ker(W^0 \longrightarrow W^1)$ و نیز اثر تابگون‌های $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{W}, -)$ و $\mathrm{Hom}_R(-, \mathbb{W})$ روی آن دقیق باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱ مفاهیم متعامد راست و چپ یک کلاس از R–مدول‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{C}^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}^{\perp_i} \quad ; \quad \mathcal{C}^{\perp_i} = \{X | Ext^i(C, X) = 0 \quad \forall C \in \mathcal{C}\} \quad , \quad i \geq 1.$$

$$^{\perp}\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} {}^{\perp_i}\mathcal{C} \quad ; \quad {}^{\perp_i}\mathcal{C} = \{X | Ext^i(X, C) = 0 \quad \forall C \in \mathcal{C}\} \quad , \quad i \geq 1.$$