دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز تابعی غیر خطی)

موضوع:

قضایای جمع برای عملگرهای یکنوای ماکسیمال در فضاهای باناخ انعکاسی

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر مهدی روحی

نگارش:

ابراهیم اکبرفخرآبادی

تابستان ۱۳۹۰

چکیده:

هدف در این پایان نامه تعریف عملگرهای یکنوا و یکنوای ماکسیمال در فضاهای باناخ انعکاسی می‌باشد و سعی کرده‌ایم اغلب نتایج و خواص مهم آنها و ارتباطی که با هم دارند را بررسی کنیم. همچنین در مورد زیر دیفرانسیل‌ها که تعمیمی از مفهوم مشتق می‌باشد نگاه مختصری داریم. زیر دیفرانسیل یک عملگر یکنوای ماکسیمال است که اهمیت بنیادی در مطالعه عملگرهای یکنوای ماکسیمال دارد. در ادامه نمایشی از عملگرهای یکنوا توسط توابع محدب را بیان می‌کنیم که نقش مهمی در مطالعه عملگرهای یکنوای ماکسیمال دارند که آن اخیراً مورد توجه زیادی قرار گرفته است. و ثابت می‌کنیم که چگونه این نمایش‌ها می‌تواند برای به دست آوردن نتایجی درباره عملگرهای یکنوای ماکسیمال مورد استفاده قرار بگیرد. ما درباره اهمیت قضیه مجموع راکفلر[1] و تعمیم آن بحث خواهیم کرد. در نهایت شرایطی را فراهم خواهیم کرد که تحت آنها مجموع دو عملگر یکنوای ماکسیمال در فضاهای باناخ انعکاسی خود یکنوای ماکسیمال است.

---

[1] Rockafellar

مقدمه:

عملگرهای یکنوا کاربردهای فراوانی در نواحی مختلف علوم ریاضیات دارند به عنوان مثال در معادلات دیفرانسیل جزئی، نظریه عملگرها و آنالیز عددی بسیار مفیدند. عملگرهای یکنوا نقش اساسی در بهینه سازی دارند. عملگرهای یکنوا برای اولین بار توسط میتنی[۱۳] [2] و زارانتونلو[۲۸] [3] به طور کاملاً جداگانه معرفی شده‌اند. عملگرهای یکنوای ماکسیمال که روی فضاهای باناخ تعریف شده‌اند در دهه ۱۹۶۰ معرفی گردیده و مورد مطالعه قرار گرفتند. یکی از با ارزش ترین نتایج در تئوری عملگرهای یکنوا مربوط به راکفلر[۲۲] است که ثابت نمود عملگرهای دوری یکنوای ماکسیمال دقیقاً عملگرهای زیر دیفرانسیل از توابع‌اند که محدب و نیم پیوسته پایین و سره‌اند. تئوری عملگرهای یکنوا با یک سری از مقالات توسط میتنی و برودِر در ۱۹۶۲ پیشرفت کرد. بعداً این اندیشه‌ها در این مقالات توسط راکفلر گسترش یافت به چیزی که اکنون به عنوان یک نظریه می‌شناسیم.

در فصل اول یک سری از نتایج اساسی آنالیز تابعی و آنالیز محدب که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است را بیان می‌کنیم. معرفی عملگرهای یکنوای و مفهوم یکنوای ماکسیمال و همچنین کرانداری موضعی عملگرهای یکنوا را در فصل دوم بیان کرده‌ایم. همچنین در این فصل درباره زیر دیفرانسیل‌ها که یک رده مهم عملگرهای یکنوا می‌باشند بحث کرده‌ایم. که در آن خاصیت اصلی زیر دیفرانسیل‌ها و اینکه زیر دیفرانسیل یک عملگر یکنوای ماکسیمال است مطالبی بیان می‌کنیم. نتایج کلیدی عملگرهای یکنوای ماکسیمال در فضاهای باناخ انعکاسی که در سال‌های اخیر اثبات شده‌اند در پایان این فصل آورده‌ایم.

اما در فصل سوم نمایشی از عملگرهای یکنوا توسط توابع محدب بیان کرده‌ایم موضوعی که اخیراً مورد توجه زیادی قرار گرفته است. بویژه علاقه‌مندی زیادی در مورد نمایش‌های فیتزپاتریک [4] می‌باشد. ما خواص اساسی این نمایش‌ها را بیان می‌کنیم و همچنین ثابت می‌کنیم فوایدشان و آنها را برای به دست آوردن نتیجه اساسی عملگرهای یکنوا به کار می‌بریم.

در نهایت می‌رسیم به فصل اصلی یعنی فصل چهارم که در آن قضیه مجموع راکفلر که یکی از نتایج مهم عملگرهای یکنوای ماکسیمال می‌باشد را بیان می‌کنیم. در این فصل تعمیم‌های مهم مختلفی از قضیه

---

[2] Minty

[3] Zarantonello

[4] Fitzpatrick

مجموع راکفلر را بحث می‌کنیم. بعضی از این تعمیم‌ها منسوب به سیمونز–زالینسکو[۲۷] [5] می‌باشند که در اینجا ثابت می‌کنیم. که با بیان شرایط مختلف در این تعمیم‌ها ثابت می‌کنیم مجموع دو عملگر یکنوای ماکسیمال در فضاهای باناخ انعکاسی خود یکنوای ماکسیمال است.

[5] Simons-Zalinescu

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

دراین فصل تعاریف و نتایج مهمی از آنالیز تابعی و آنالیز محدب را طی بخش‌های مختلف که در نظریه عملگرهای یکنوا مورد استفاده قرار می‌گیرد بیان می‌کنیم.

۱.۱ مقدماتی از توپولوژی

در این بخش برخی از تعاریف و نتایج مهم توپولوژی که در بخش‌های بعدی این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند را یادآوری می‌نماییم. برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۸]، [۱۵] و منابع موجود در آن‌ها مراجعه نمود. سراسر این رساله فرض می‌کنیم $\mathcal{P}(X)$ مجموعه توانی (مجموعه تمام زیر محموعه‌های) مجموعه X باشد.

تعریف ۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. گرد آیه τ از زیر مجموعه‌های X یک **توپولوژی** روی X گفته می‌شود هرگاه

(الف) $\emptyset, X \in \tau$،

(ب) اگر $A, B \in \tau$، آنگاه $A \cap B \in \tau$،

(ج) برای هر خانواده دلخواه $\{A_i : i \in \mathbf{I}\}$ از اعضای τ داشته باشیم $\bigcup\limits_{i\in\mathbf{I}} A_i \in \tau$، که در آن $\mathbf{I}$ یک مجموعه اندیس گذار است.

در این صورت (X, τ) یا به اختصار X را **فضای توپولوژیک**، به اعضای τ **مجموعه باز** و متمم مجموعه‌های باز را **مجموعه بسته** می‌گوییم.

به ازای هر مجموعه ناتهی X قرار می‌دهیم $\tau_i = \{\emptyset, X\}$ و $\tau_d = \mathcal{P}(X)$. به وضوح τ_i و τ_d توپولوژی‌هایی روی X می‌باشند که آن‌ها را به ترتیب **توپولوژی ناگسسته** و **توپولوژی گسسته** روی X می‌نامیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم $\tau_۱$ و $\tau_۲$ دو توپولوژی روی X باشند، گوییم $\tau_۱$ **ضعیف تر** از $\tau_۲$ است یا $\tau_۲$ **قوی تر** از $\tau_۱$ است هرگاه $\tau_۱ \subseteq \tau_۲$.

۲.۱ مقدماتی از آنالیز تابعی

در این بخش بعضی از تعاریف و نتایج مهم آنالیز تابعی که در بخش‌های بعدی این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، را یادآوری می‌نماییم. برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۲۵، ۲۴، ۲۳، ۱۲، ۵] و منابع موجود در آن‌ها مراجعه نمود. سراسر این رساله فرض می‌کنیم $\mathbb{R}$ میدان اعداد حقیقی و $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد و $\mathbb{F}$ یعنی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$.

تعریف ۳.۱ **فضای برداری** روی $\mathbb{F}$ مجموعه‌ای است مانند E که عنصرهایش را **بردار** نامیده و در آن دو عمل به نام‌های **جمع** و **ضرب اسکالر** تعریف شده‌اند که از خواص جبری آشنای زیر برخوردار می‌باشند:

(الف) به هر جفت از بردارهای x و y برداری مانند $x+y$ چنان نظیر است که $x+(y+z)=(x+y)+z$ و $x+y=y+x$.

(ب) E بردار منحصر به فردی مانند 0 (**بردار صفر یا مبدا** E) دارد به طوری که به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم $x+0=x$.

(ج) به ازای هر $x \in E$ بردار منحصر به فردی مانند $-x$ چنان نظیر است که $x+(-x)=0$.

(د) به هر جفت (α, x) با $\alpha \in \mathbb{F}$ و $x \in E$ یک بردار مانند αx چنان نظیر است که $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$، $1x=x$ و دو **قانون پخشپذیری** $\alpha(x+y)=\alpha x+\beta y$ و $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ برقرار می‌باشند.

تعریف ۴.۱ فضای برداری E با **بعد** n است یا $\dim E=n$ اگر E پایه‌ای مانند $\{u_1,...,u_n\}$ داشته باشد. این یعنی هر $x \in E$ نمایش منحصر به فردی به شکل $x=\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n$ داشته باشد که در آن α_i اعدادی مختلط هستند. اگر به ازای nای داشته باشیم $\dim E=n$، گوییم E با **بعد متناهی** است. هرگاه $E=\{0\}$ آنگاه $\dim E=0$.

تعریف ۵.۱ فرض کنیم E یک فضای برداری حقیقی یا مختلط و $\|.\|: E \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in E$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

(الف) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\|=0$ اگر و تنها اگر $x=0$،

(ب) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$،

(ج) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$،

آنگاه $\|.\|$ را یک **نرم** بر E نامیم و $(E, \|.\|)$ را یک **فضای نرمدار** گوییم.

تذکر ۶.۱ اگر E یک فضای نرمدار باشد و برای هر $x,y \in E$ قرار دهیم $d(x,y) = \|x-y\|$، آنگاه به سادگی دیده می‌شود که d یک متر روی E است و لذا هر فضای نرمدار یک فضای متریک است. d را متر تولید شده به وسیله نرم می‌نامیم.

تعریف ۷.۱ فضای نرمدار E را **یک فضای باناخ** گوییم هرگاه E نسبت به متر تولید شده به وسیله نرم فضایی کامل باشد.

تعریف ۸.۱ فرض کنیم که E یک فضای نرمدار باشد. ضعیف‌ترین توپولوژی روی E که همه $x^* \in E^*$ پیوسته باشند را **توپولوژی ضعیف** روی E می‌نامند، جایی که E^* مجموعه تمام توابع خطی پیوسته از E به $\mathbb{R}$ می‌باشد. اگر $\{x_n\}$ دنباله ای در فضای نرمدار E باشد **همگرایی ضعیف** دنباله $\{x_n\}$ به x_0 به مفهوم آن است که هر همسایگی ضعیف x_0 عناصر دنباله را از مرتبه‌ای به بعد دارا باشد.

قضیه ۹.۱ اگر E یک فضای نرمدار و M یک زیر فضای برداری از E باشد، آنگاه M در توپولوژی ضعیف بسته است اگر و تنها اگر در توپولوژی نرم E بسته باشد.

تعریف ۱۰.۱ اگر E یک فضای نرمدار باشد و $\phi : E \to E^{**}$ با ضابطه $\phi(x) = g_x$ باشد. ضعیف ترین توپولوژی روی E^* که تحت آن تمام $\phi(x)$ ها توابعی پیوسته باشند را **توپولوژی ضعیف*** می‌نامند ($g_x(x^*) = \langle x^*, x\rangle$ که $x^* \in E^*$ و $\|g_x\| = \|x\|$).

در ضمن توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف* را به ترتیب با $w(E, E^*)$ و $w(E^*, E)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱ (**باناخ–آلا اُغلو**[1]) هرگاه V یک همسایگی ۰ در فضای برداری توپولوژیک E بوده و $B = \{x^* \in E^* : |x^*(x)| \leq 1 \; \forall x \in V\}$ آنگاه B ضعیف* فشرده است.

[1] Banach-Alaoglu

در ادامه به سه قضیه مهم جداسازی به ترتیب منتسب به ماژور[۲]، ایدلهیت[۳] و توکی[۴] می‌پردازیم.

قضیه ۱۲.۱ فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی ناتهی از فضای برداری توپولوژیکی E باشند به طوری که A آفین و B محدب با درون ناتهی است. اگر $A \cap \mathrm{Int}(B) = \emptyset$ آنگاه $w^* \in X^* \setminus \{0\}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ موجودند به طوری که

(الف) برای هر $x \in A$ داریم $w^*(x) = s$،

(ب) برای هر $x \in B$ داشته باشیم $w^*(x) \leq s$،

(ج) برای هر $x \in \mathrm{Int}(B)$ داریم $w^*(x) < s$.

قضیه ۱۳.۱ فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی ناتهی محدب از فضای برداری توپولوژیکی E باشند به طوری که $\mathrm{Int}(B) \neq \emptyset$ محدب با درون ناتهی و B آفین است. اگر $A \cap \mathrm{Int}(B) = \emptyset$ آنگاه $w^* \in X^* \setminus \{0\}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ موجودند به طوری که

(الف) برای هر $x \in A$ داشته باشیم $s \leq w^*(x)$،

(ب) برای هر $x \in B$ داریم $w^*(x) \leq s$،

(ج) برای هر $x \in \mathrm{Int}(B)$ داشته باشیم $w^*(x) < s$.

قضیه ۱۴.۱ فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی محدب از فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب E باشند. اگر A بسته، B فشرده و $A \cap B = \emptyset$ باشد، آنگاه یک $w^* \in E^* \setminus \{0\}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ موجودند به طوری که برای هر $x \in A$ و $y \in B$ داشته باشیم $\langle w^*, y\rangle \leq \alpha < \beta \leq \langle w^*, x\rangle$ یا به طور معادل $\max\{w^*(x) : x \in B\} < \inf\{w^*(x) : x \in A\}$.

قضیه ۱۵.۱ (**قضیه خاصیت اشتراک متناهی**)[۲۵] اگر C_n زیر مجموعه‌های بسته‌ای از یک فضای فشرده باشد. و به ازای هر تعدادمتناهی اشتراک آنها ناتهی باشد، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n \neq \emptyset$.

---

[۲] Mazur

[۳] Eidelheit

[۴] Tukey

۳.۱ قضیه هان—باناخ

تعریف ۱۶.۱ فرض کنیم E یک فضای برداری حقیقی باشد، $p : E \to \mathbb{F}$ **تابعک زیرخطی** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in E$ و هر $t > \circ$ داشته باشیم $p(tx) = tp(x)$ و $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
و اگر $t = \circ$ بگیریم $P(\circ) = \circ$ می‌باشد.

لم ۱۷.۱ فرض کنیم E یک فضای برداری غیر صفر باشد و $P : E \to \mathbb{R}$ زیر خطی باشد و برای همه $x, y \in E$ داشته باشیم

$$P_y(x) := \inf_{\lambda > \circ} [P(x + \lambda y) - \lambda P(y)].$$

در این صورت $P_y : E \to \mathbb{R}$ می‌باشد و P_y زیر خطی است همچنین $P_y \leq P$ و $P_y(-y) \leq -P(y)$ است.

برهان: فرض کنیم $x \in E$ و $\lambda > \circ$ سپس $\lambda P(y) = P(\lambda y) \leq P(x + \lambda y) + P(-x)$، لذا

$$P(x + \lambda y) - \lambda P(y) \geq -P(-x).$$

با گرفتن اینفیمم بر روی $\lambda > \circ$، $-\infty < -P(-x) \leq P_y(x)$ را نتیجه می‌گیریم. بنابراین $P_y : E \to \mathbb{R}$.
اکنون ثابت می‌کنیم P_y زیر جمعی است. برای این منظور فرض کنیم $x_۱, x_۲ \in E$ و $\lambda_۱, \lambda_۲ > \circ$ در این صورت

$$\begin{aligned} [P(x_۱ + \lambda_۱ y) - \lambda_۱ P(y)] &+ [P(x_۲ + \lambda_۲ y) - \lambda_۲ P(y)] \\ &\geq P(x_۱ + x_۲ + (\lambda_۱ + \lambda_۲) y) - (\lambda_۱ + \lambda_۲) P(y) \\ &\geq P_y(x_۱ + x_۲). \end{aligned}$$

با گرفتن اینفیمم بر روی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$، $P_y(x_۱ + x_۲) \leq P_y(x_۱) + P_y(x_۲)$ به دست می‌آوریم. بنابراین P_y زیر جمعی است.
در ادامه فرض کنیم $x \in E$ و $\mu > \circ$ در این صورت

$$P_y(\mu x) = \inf_{\lambda > \circ} [P(\mu x + \lambda y) - \lambda P(y)]$$

$$= \mu \inf_{\lambda>0}[P(x+(\lambda/\mu)y) - (\lambda/\mu)P(y)]$$
$$= \mu \inf_{\nu>0}[P(x+\nu y) - \nu P(y)] = \mu P_y(x).$$

بنابراین P_y همگن مثبت و زیر خطی است. حال اگر x عنصری دلخواه از E باشد و $\lambda = 1$ فرض کنیم در این صورت

$$P_y(x) \leq P(x+y) - P(y) \leq P(x).$$

بنابراین $P_y \leq P$. به طور مشابه $P_y(-y) \leq P(-y+y) - P(y) = -P(y)$. ■

لم ۱۸.۱ (**هان–باناخ**[۵]) فرض کنیم E فضای برداری غیر صفر و $p : E \to \mathbb{R}$ زیر خطی باشد سپس یک تابعک خطی E بر روی L وجود دارد به طوری که $L \leq P$.

برهان: فرض کنیم $\mathcal{Q}$ برای مجموعه همه تابعک های زیر خطی Q بر روی E پایا باشد به طوری که $Q \leq P$. ابتدا ثابت می‌کنیم هر زیرمجوعه مرتب شده ناتهی $\mathcal{T}$ یک کران پایین در $\mathcal{Q}$ دارد. برای این منظور قرار دهیم $Q(x) := \inf\{T(x) : T \in \mathcal{T}\}$. اگر $x \in E$ و $T \in \mathcal{T}$ سپس از این که T زیر جمعی است داریم $T(x) \geq -T(-x) \geq -p(-x)$. با گرفتن اینفیموم بر روی $T \in \mathcal{T}$ به دست می‌آوریم $-\infty < -p(-x) \leq Q(x)$ بنابراین $Q : E \to \mathbb{R}$ می‌باشد.
اکنون ثابت می‌کنیم که Q زیر جمعی است.
برای این هدف فرض کنیم $x_1, x_2 \in E$ و فرض کنیم $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ دلخواه باشد. اگر $T_2 \leq T_1$ سپس

$$T_1(x_1) + T_2(x_2) \geq T_2(x_1) + T_2(x_2) \geq T_2(x_1 + x_2) \geq Q(x_1 + x_2).$$

در حالی که اگر $T_1 \leq T_2$ سپس

$$T_1(x_1) + T_2(x_2) \geq T_1(x_1) + T_1(x_2) \geq T_1(x_1 + x_2) \geq Q(x_1 + x_2).$$

بنابراین در هر مورد $T_1(x_1) + T_2(x_2) \geq Q(x_1 + x_2)$. با گرفتن اینفیمم بر روی T_1 و T_2 به دست می‌آوریم $Q(x_1 + x_2) \leq Q(x_1) + Q(x_2)$. بنابراین Q زیر جمعی است.
ساده است که Q همگن مثبت است، بنابراین Q زیر خطی است واضح است که $Q \in \mathcal{Q}$.

[۵] Hahn-Banach

با استفاده از لم زرن عنصر مینیمال L از $\mathcal{Q}$ وجود دارد. اکنون فرض کنیم $y \in E$، از لم ۱۷.۱ $L_y : E \to \mathbb{R}$ زیر خطی است، $L_y \leq L$ (از $L \in \mathcal{Q}$) و $L_y(-y) \leq -L(y)$. از اینکه L در $\mathcal{Q}$ مینیمال است، در حقیقت $L_y = L$، بنابراین $L(-y) \leq -L(Y)$. از طرف دیگر از اینکه L زیر جمعی است، $L(-y) \geq -L(y)$ را نتیجه می‌گیریم. از این دو نامعادله $L(-y) = -L(y)$ نتیجه می‌شود. اکنون اگر $x \in E$ و $\lambda < 0$ در این صورت

$$L(\lambda x) = L(-(-\lambda)x) = -L((-\lambda)x) = -(-\lambda)L(x) = \lambda L(x) \qquad (۱.۱)$$

و بنابراین L همگن است. فرض کنیم $x_1, x_2 \in E$ سپس از اینکه L زیر جمعی است $L(-x_1 - x_2) \leq L(-x_1) + L(-x_2)$ را به دست می‌آوریم. از (۱.۱) داریم

$$\begin{aligned} L(x_1 + x_2) &= L(-(-x_1 + -x_2)) = -L(-x_1 - x_2) \\ &\geq -L(-x_1) - L(-x_2) = L(x_1) + L(x_2) \geq L(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

در نتیجه $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$، بنابراین L خطی است. ■

قضیه ۱۹.۱ (**قضیه ماژور – اُرلیس**) [6] فرض کنیم S تابعک زیر خطی بر روی E باشد. علاوه بر این فرض کنیم C زیر مجموعه محدب ناتهی از E باشد، در این صورت تابعک خطی L بر روی E وجود دارد طوری که روی E، $L \leq S$ می‌باشد و $\inf\limits_C L = \inf\limits_C S$.

برهان: قرار دهیم $\alpha := \inf\limits_C S$. فرض کنیم $\alpha = -\infty$ سپس از قضیه هان باناخ نتیجه به دست می‌آید. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$، $T : E \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T(x) := \inf_{y \in C, \lambda > 0} [S(x + \lambda y) - \lambda\alpha]. \qquad (۲.۱)$$

اگر $x \in E, y \in C$ و $\lambda > 0$ سپس $\alpha \leq S(y)$ لذا

$$\begin{aligned} S(x + \lambda y) - \lambda\alpha &\geq S(x + \lambda y) - \lambda S(y) \\ &= S(x + \lambda y) - S(\lambda y) \geq -S(-x) > -\infty. \end{aligned}$$

[6] Mazur-Orlicz

با گرفتن اینفیمم روی $y \in C$ و $\lambda > ۰$، $-\infty < -S(-x) \leq T(x)$ را به دست می‌آوریم. بنابراین $T : E \mapsto \mathbb{R}$.

ساده است اینکه T تابعک زیر خطی است. بنابراین با توجه به قضیه هان باناخ تابعک خطی L روی E وجود دارد به طوری که روی E، $L \leq T$ می‌باشد.

بامیل دادن $\lambda \to ۰$ در معادله (۲.۱) داریم

$$T(x) = \inf_{y \in C, \lambda > ۰}[S(x + \lambda y) - \lambda\alpha] \leq \inf_{y \in C, \lambda > ۰}[S(x) + \lambda S(y) - \lambda\alpha = S(x)$$

یعنی $T \leq S$ روی E به دست می‌آید. بنابراین $L \leq S$ روی E نتیجه می‌شود.

فرض کنیم $x \in C$ در این صورت

$$-L(x) = L(-x) \leq T(-x) \leq S(-x + ۱x) - ۱\alpha = -\alpha.$$

لذا $L(x) \geq \alpha$. با گرفتن اینفیمم روی $x \in C$ به دست می‌آید $\inf\limits_C L \geq \alpha = \inf\limits_C S$.

از طرف دیگر $L \leq S$ روی E و $\inf\limits_C L \leq \alpha = \inf\limits_C S$.

بنابراین $\inf\limits_C L = \inf\limits_C S$ و اثبات کامل می‌شود. ■

نتیجه ۲۰.۱ (**قضیه هان باناخ یک بعدی**) فرض کنیم S تابعک زیر خطی روی E باشد و$x \in E$. در این صورت یک تابعک خطی L روی E وجود دارد به طوری که روی E، $L \leq S$ می‌باشد و $L(x) = S(x)$.

برهان: با توجه به قضیه ماژور—اُرلیس و با قرار دادن $C = \{x\}$ واضح است. ■

۴.۱ توابع محدب و نیم پیوسته

تعریف ۲۱.۱ فرض کنیم $f : E \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. دراین صورت

(۱) f را **محدب** می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in E$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(y).$$

(۲) f را **مقعر** می‌نامیم هرگاه $-f$ محدب باشد.

(۳) f را **آفین** می‌نامیم هرگاه هم محدب و هم مقعر باشد.

غلاف محدب مجموعه A را با $\mathrm{co}A$ نشان می‌دهیم و همچنین غلاف محدب بسته A را با $\overline{\mathrm{co}}A$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف باشد و $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ یک تابع محدب باشد. **دامنه** f را با $\mathrm{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ و **ابر نمودار** f را با $\mathrm{Epi}(f) := \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$ تعریف می‌نماییم. گوییم f سره است هرگاه $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$.

تعریف ۲۳.۱ فرض کنیم $\mathcal{U}_{x_\circ}$ مجوعه تمام همسایگی‌های $x_\circ \in X$ باشد. تابع $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ **نیم پیوسته پایینی در** $x_\circ \in X$ نامیده می‌شود هرگاه

$$f(x_\circ) = \sup_{U \in \mathcal{U}_{x_\circ}} \inf_{x \in U} f(x).$$

f نیم پیوسته پایینی روی X نامیده می‌شود هرگاه f نیم پیوسته پایینی در هر $x \in X$ باشد. همچنین **نیم پیوسته بالایی در** $x_\circ \in X$ نامیده می‌شود هرگاه

$$f(x_\circ) = \inf_{U \in \mathcal{U}_{x_\circ}} \sup_{x \in U} f(x).$$

f نیم پیوسته بالایی روی X نامیده می‌شود هرگاه f نیم پیوسته بالایی در هر $x \in X$ باشد.

نماد $PCLSC(E)$ را برای مجموعه همه توابع نیم پیوسته پایینی محدب $f : E \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ به گونه‌ای که $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$ به کار می‌بریم که در آن P همان سره است.

گزاره ۲۴.۱ [۲۶] هرگاه $g_۱, g_۲ \in PCLSC(E)$ آنگاه

$$\mathrm{sur}(\mathrm{dom}g_l - \mathrm{dom}g_۲) = \mathrm{int}(\mathrm{dom}g_l - \mathrm{dom}g_۲).$$

تعریف ۲۵.۱ فرض کنیم F زیر فضای بسته E و قرار دهید

$$F^{\perp} := \{y^* \in E^* : \langle F, y^* \rangle = \{\circ\}\}.$$

فرض کنیم $S : E \multimap E^*$، گوییم S به حالت $F-$اشباع شده است اگر برای $u \in D(S)$،

$$Su + F^{\perp} = Su.$$

لم ۲۶.۱ [۲۶] فرض کنیم F زیر فضای بسته E، $w \in E$، $S : E \multimap E^*$ یکنوای ماکسیمال باشد و $D(T) \subseteq F + w$ باشد در این صورت S به حالت $F-$اشباع شده است.

گزاره ۲۷.۱ به ازای تابع $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ شرایط ذیل معادلند.

(الف) f نیم پیوسته پایینی روی X است.

(ب) به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ مجموعه $\{x \in X : f(x) \leq r\}$ در X بسته است.

(ج) به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ مجموعه $\{x \in X : f(x) > r\}$ در X باز است.

(د) $\mathrm{Epi}(f)$ در $E \times \mathbb{R}$ بسته است.

(هـ) به ازای هر $x \in X$ و هر تور $\{x_\alpha\}$ در X با شرط $x_\alpha \to x$ داشته باشیم $f(x) \leq \liminf\limits_{\alpha} f(x_\alpha)$.

به عنوان چند نمونه از نتایج شناخته شده و سر راست توابع نیم پیوسته پایینی داریم:

- ι_C نیم پیوسته پایینی است اگر و فقط اگر C بسته باشد، که در آن ι_C **تابع شاخص** است و به صورت

$$\iota_C(x) := \begin{cases} \circ & x \in C \\ +\infty & x \notin C. \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

- اگر تابع f نیم پیوسته پایینی باشد، آنگاه به ازای هر $t \in [\circ, +\infty)$ تابع tf نیز نیم پیوسته پایینی است.

- اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع نیم پیوسته پایینی باشد و $f(x) := \sup\limits_{g \in \mathcal{F}} g(x)$، آنگاه تابع f نیم پیوسته پایینی است.

• اگر f و g نیم پیوسته پایینی باشند، آنگاه $f+g$ نیز نیم پیوسته پایینی است.

تعریف ۲۸.۱ فرض کنیم f تابع سره محدب نیم پیوسته پایینی روی فضای باناخ E باشد. دراین صورت رابطه فِنچِل[7] f^* روی E^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^*\rangle - f(x)\} \geq \langle x, x^*\rangle - f(x), \quad x^* \in E^*$$

قضیه ۲۹.۱ (**دوگان فِنچِل**)[۲۶] فرض کنیم f و g محدب نیم پیوسته پایینی باشند، $-f \leq g$ و $\bigcup_{\lambda>0} \lambda[\mathrm{dom}(f) - \mathrm{dom}(g)]$ زیر فضای بسته E باشد در این صورت $z^* \in E^*$ وجود دارد به طوری که

$$f^*(-z^*) + g^*(z^*) \leq 0.$$

۵.۱ قضیه مینیماکس

علائم: $\lambda \vee \mu$ را برای نشان دادن ماکسیمم λ و μ می‌نویسیم. و همچنین $\lambda \wedge \mu$ را برای نشان دادن مینیمم λ و μ می‌نویسیم.

لم ۳۰.۱ فرض کنیم X زیر مجموعه ناتهی محدب از یک فضای برداری باشد

(i) اگر $f_1, ..., f_n$ توابع محدب روی X باشند. آنگاه $0 \leq \lambda_1, ..., \lambda_n$ وجود دارد به طوری که $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$ و

$$\inf_X [f_1 \vee ... \vee f_n] = \inf_X [\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n].$$

(ii) اگر $g_1, ..., g_n$ توابع مقعر روی X باشند. آنگاه $0 \leq \lambda_1, ..., \lambda_n$ وجود دارد به طوری که $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$ و

$$\sup_X [g_1 \wedge ... \wedge g_n] = \sup_X [\lambda_1 g_1 + ... + \lambda_n g_n].$$

---

[7] Fenchel

برهان: قرار دهیم $E=\mathbb{R}^n$. و اینکه $S: E\mapsto \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S(\mu_۱,...,\mu_n):=\mu_۱\vee ...\vee \mu_n.$$

سپس S زیر خطی است. قرار دهیم

$$C:=\{(\mu_۱,...,\mu_n):\ f_i\leq \mu_i\ i=۱,...,n \text{ به طوری که برای } x\in X \text{ وجود دارد }\}$$

واضح است C زیر مجموعه محدب E است. با توجه به قضیه مازور—اُرلیس تابعک خطی L روی E وجود دارد به طوری که

$L\leq S$ روی E می‌باشد و $\inf\limits_C L=\inf\limits_C S$.

از اینکه L خطی است، $\lambda_۱,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که برای $(\mu_۱,...,\mu_n)\in\mathbb{R}^n$

$L(\mu_۱,...,\mu_n)=\lambda_۱\mu_۱+...+\lambda_n\mu_n$.

از اینکه $L\leq S$ روی E است، از تعریف S نتیجه می‌شود که $۰\leq\lambda_۱,...,\lambda_n$ و $\lambda_۱+...+\lambda_n=۱$. سرانجام

$$\inf_C L=\inf_{x\in X}[\lambda_۱f_۱(x)+...+\lambda_nf_n(x)]=\inf_X[\lambda_۱f_۱+...+\lambda_nf_n].$$

و

$$\inf_C S=\inf_{x\in X}[f_۱(x)\vee...\vee f_n(x)]=\inf_X[f_۱\vee...\vee f_n]$$

از اینکه $\inf\limits_C L=\inf\limits_C S$، (i) را نتیجه می‌گیریم.

اکنون با قرار دادن $f_i:=-g_i$، (ii) از (i) به دست می‌آید. اثبات کامل می‌شود. ■

لم ۳۱.۱ [۲۵] فرض کنیم E فضای توپولوژی هاسدورف فشرده و $f:E\to\mathbb{R}$ روی E نیم پیوسته بالایی باشد در این صورت f به ماکسیمم خود می‌رسد یعنی $f(x_۰)=\sup\limits_{x\in E}f(x)$.

قضیه ۳۲.۱ (**قضیه مینیماکس**) فرض کنیم A و B زیر مجموعه محدب ناتهی از یک فضای برداری باشند. همچنین B فضای توپولوژی هاسدورف فشرده باشد. اگر $h:A\times B\mapsto\mathbb{R}$ روی A محدب و روی