بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور مرکز تهران
مجتمع علوم پایه و کشاورزی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد آمار ریاضی

برآوردگر های بیز و مینیماکس پارامتر مقیاس توزیع رایلی

توسط:

سجاد گودرزی

استاد راهنما:

دکترپرویز نصیری

استاد مشاور:

دکتر علی شادرخ

پاییز ۱۳۸۹

شماره ....
تاریخ ....
پیوست ....

دانشگاه پیام نور
دانشگاه پیام نور استان تهران

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

مجتمع علوم پایه و کشاورزی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع ازپایان نامه کارشناسی ارشد آقای سجاد گودرزی
دانشجوی رشته آمار ریاضی به شماره دانشجویی: ۸۷۰۰۰۶۵۲۸
تحت عنوان:

" برآوردگرهای بیز و مینیماکس پارامترمقیاس توزیع رایلی"

جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل در روزسه شنبه مورخ: ۲۲ /۸۹/۸ ساعت : ۱۵-۱۴ درمحل
مجتمع علوم پایه و کشاورزی برگزار شد. و پس از بررسی پایان‌نامه مذکور با نمره به عدد ۱۸/۷۵
به حروف ... و با درجه ارزشیابی ... مورد قبول واقع شد ☒ نشد ☐

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه/ موسسه	امضاء
۱	دکتر پرویز نصیری	استاد راهنما	استادیار	پیام نور	
۲	دکتر علی شادرخ	استاد مشاور	استادیار	پیام نور	
۳	دکترامیر تیمور پاینده	استاد داور	استادیار	دانشگاه شهید بهشتی	
۴	دکتر سیما نصری	نماینده علمي گروه	استادیار	پیام نور	۸۹/۸/۲۲

تهـران، خیابـان استـاد
نجـات‌الهـی، خـیابـان
شهید فلاح‌پور، پلاک ۲۷
تلـفـــن: ۸۸۸۰۰۲۵۲
دورنـگـار: ۸۸۳۱۹۴۷۵
www.tpnu.ac.ir
science.agri@tpnu.ac.ir

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه

درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان

در راه کسب علم ودانش تلاش نمایم .

والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا

که این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن

را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

آموزگارانی که برایم زندگی؛ بودن و انسان بودن را معنا کردند

حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان

تقدیر و تشکر

اکنون که به مراحل پایانی اتمام تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد رسیده‌ام بر خود لازم می‌دانم از همه کسانی که در اتژین مدت مشوق و در کنار من بوده‌اند تشکر و قدرانی نمایم. از جناب آقای دکتر نصیری که زحمت راهنمایی این پایان نامه را قبول نموده‌اند، جناب آقای دکتر شادرخ که با راهنمایی‌های خویش همواره در کنار بنده بوده‌اند و سایر دوستان تشکر می‌نمایم./

سجاد گودرزی

پاییز ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه ضمن معرفی توزیع رایلی، برآوردگر های بیز توزیع رایلی با استفاده از توزیع پیشین فاقداطلاع، یکنواخت، پارتو و تبدیلی از توزیع گامای معکوس، تحت توابع زیان مربع خطای وزنی و لاینکس تعمیم یافته محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند و در مواردی که برآوردگر دقیق و صریح به دست می‌آید در مورد مینیماکس بودن یا نبودن تحقیق به عمل آمده است. در پایان ضمن مقایسه کارایی برآوردگر ها، با استفاده از روش های عددی برآوردگرها با هم مقایسه شده اند که بنابر این نتیجه گیری، برآوردگرهای بیز و مینیماکس پارامتر توزیع رایلی برای توابع پیشین فاقد اطلاع، گامای معکوس و یکنواخت تحت تابع زیان مربع خطای وزنی به این برآوردگرها تحت تابع زیان لاینکس تعمیم یافته ترجیح داده می شوند همچنین در صورت استفاده از تابع زیان لاینکس تعمیم یافته بهتر است مقادیر **C** بزرگ در نظر گرفته شوند اما برای برآوردگرهای بیز پارامتر توزیع رایلی با چگالی پیشین پارتو ستفاده از تابع زیان مربع خطای وزنی توسیه نمی شود.

کلید واژه: برآورد بیزی، برآورد مینیماکس، توزیع پیشین، تابع زیان مربع خطای وزنی، تابع زیان لاینکس تعمیم یافته.

فهرست مطالب

عنوان | **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه

فهرست جدول‌ها

پیشگفتار

هدف از نگارش این پایان نامه به دست آوردن برآوردگرهای بیزی مختلف برای پارامتر توزیع رایلی است که در این راستا از توابع چگالی مختلف از جمله گامای معکوس، پارتو، یکنواخت توزیع شبه پیشین(فاقد اطلاع) به عنوان توابع پیشین و از توابع زیان مربع خطای وزنی و لاینکس تعمیم یافته(MLINEX) به عنوان توابع زیان استفاده خواهیم کرد. همچنین پس از بدست آوردن این برآوردگرهای غیر کلاسیک به مقایسه این برآوردگرها می پردازیم. به همین منظور در اولین فصل پس از تعریف تابع زیان در حالت کلی و معرفی برخی از توابع زیان موجود به معرفی تابع زیان لاینکس می‌پردازیم و برخی ویژگی های این تابع زیان را برمی‌شمریم. همچنین در این فصل به اصل بیز و نظریه تصمیم و اصل مینیماکس می‌پردازیم. در فصل دوم ابتدا توزیع رایلی و ویژگی های آن و همچنین توزیع‌های پیشین مورد نظر را معرفی می‌کنیم، سپس برآوردگرهای بیز را با استفاده از توزیع های پیشین و توابع زیان مورد بحث بدست می‌آوریم. همچنین در صورت امکان برای هریک از توابع پیشین و تحت توابع زیان مختلف به بررسی مینیماکس بودن این برآوردگرها می‌پردازیم. در فصل سوم به مقایسه عددی این برآوردگر ها خواهیم پرداخت و ارائه یک نتیجه گیری کلی فصل پایانی این پایان نامه است.

فصل ۱–

توابع زبان و برآورد بیزی

۱-۱- مقدمه

در ابتدای این فصل به دلیل نقش مهم تابع زیان در برآورد بیزی ابتدا به توضیحاتی در مورد تابع زیان و همچنین انواع متداول تابع زیان و ویژگی های آن ها پرداخته شده است. سپس با استفاده از تابع زیان و مخاطره و رابطه بین این دو تابع قواعد بیز و مینیماکس بیان شده و شکل کلی برآوردگر بیز تحت توابع زیان مربع خطای وزنی و لاینکس تعمیم یافته(MLINEX) به دست آمده است. در واقع مطالبی که در این فصل مورد بررسی قرار می گیرند ابزار مناسبی برای پیش برد مسئله مورد نظر در فصل بعد به شمار می رود.

۱-۲- توابع زیان

انتخاب تابع زیان در نظریه تصمیم نقش بسیار مهمی دارد و برگزیدن بهترین تصمیم در گرو یافتن یک الگوی زیان مناسب است. ممکن است تأثیرات منفی یا زیان‌های حاصل از خطای یک تصمیم بیش از آنکه به میزان خطا بستگی داشته باشد به نوع خطا وابسته باشد، در چنین مواردی الگوی زیان نامتقارن که رفتار متفاوتی در قبال خطای مثبت و منفی دارد پوشش بهتری بر زیان حاصل از یک خطای تصمیم می دهد. طرح یک مسئله می‌تواند در درک بیشتر و بهتر مسئله مؤثر باشد.
اگر کارشناسان علوم فضایی علاقمند به تعیین قابلیت اطمینان (طول عمر) سوخت جامد یک موشک سفینه فضایی باشند و با برآوردگر $\hat{\mu}$ آن را برآورد کنند آنگاه خطا $\Delta(\hat{\mu},\mu)=\hat{\mu}-\mu$ ایجاد می‌شود. خطای کم برآورد طول عمر سوخت موشک تنها باعث افزایش هزینه سوخت موشک می‌شود در حالی که خطای بیش برآورد، باعث سقوط سفینه فضایی و به وجود آمدن زیان های مالی و جانی جبران ناپذیری خواهد شد. در اینجا زیان خطای مثبت بیشتر از زیان خطای منفی است. در چنین مواردی معمولاً استفاده از الگوی نامتقارن پیشنهاد می‌گردد.
آماردان باید بر اساس مشاهده یک نمونه تصادفی از یک تابع چگالی برآورد پارامتر آن را بدست آورد، در این صورت می‌توان مقدار برآوردگر $T(X)=t(X_۱,X_۲,\dots,X_n)$ را یک تصمیم و خود برآوردگر را یک تابع تصمیم نامید زیرا به آماردان القا می‌کند که چگونه باید تصمیم بگیرد. حال واضح است که t در برآورد $\tau(\theta)$ می‌تواند همراه با مقداری خطا باشد که در این صورت اندازه ای از شدت خطا، مناسب به نظر می‌رسد.
اگر پارامتر θ به وسیله برآوردگر δ برآورد شود، آنگاه خطای این تصمیم (برآورد) با نماد $\Delta(\delta,\theta)$ نشان داده می‌شود که معمولا تابعی از θ و δ است.

۱-۲-۱- انواع توابع خطا

۱- تابع خطای ساده:

$$\Delta(\delta,\theta)=\delta-\theta \tag{۱-۱}$$

۲- تابع خطای نسبی:

$$\Delta(\delta,\theta)=\frac{\delta-\theta}{\theta} \tag{۱-۲}$$

۳- تابع خطای لگاریتمی:

$$\Delta(\delta,\theta)=log\,(\frac{\delta}{\theta}) \tag{۱-۳}$$

معمولا از تابع خطای ساده در مسائل مربوط به پارامتر مکان و از تابع خطای نسبی و لگاریتمی در مسائل مربوط به پارامتر مقیاس استفاده می‌شود.

زیان حاصل از خطای برآورد $\Delta(\delta,\theta)$ را با نماد $L(\Delta(\delta,\theta))$ یا $L(\delta,\theta)$ نمایش می‌دهند که L تابعی است که زیان ناشی از خطای یک تصمیم را به دست می‌دهد، بنابراین آن را تابع زیان می‌نامند. تابع زیان $L(\theta)$ یک تابع حقیقی است که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد.

۱. برای همه برآوردگرهای ممکن δ و هر θ در Θ: $L(\delta,\theta)\geq ۰$

این ویژگی نشان دهنده نامنفی بودن مقادیر زیان حاصل از خطای تصمیم (برآورد) Δ است.

۲. برای $\delta=\theta$: $L(\delta,\theta)=۰$

این ویژگی زیان برآورد خطای صفر را برابر صفر در نظر می گیرد.

۳. اگر $|\Delta|\leq|\Delta.|$ باشد آنگاه؛ $L(\Delta.)\leq L(\Delta)$

این ویژگی نشان می دهد که تابع زیان روی بازه $(-\infty,۰)$ غیرصعودی و روی بازه $(۰,\infty)$ غیرنزولی است یعنی تابع زیان با افزایش میزان خطای برآورد زیان بیشتری را منظور می کند.

۴. برای توابع زیان متقارن: $L(-\Delta)=L(\Delta)$

۵. برای توابع زیان نامتقارن: $L(\Delta)\geq L(-\Delta)$ یا $L(-\Delta)\geq L(\Delta)$

۱-۳- معرفی توابع زیان متداول

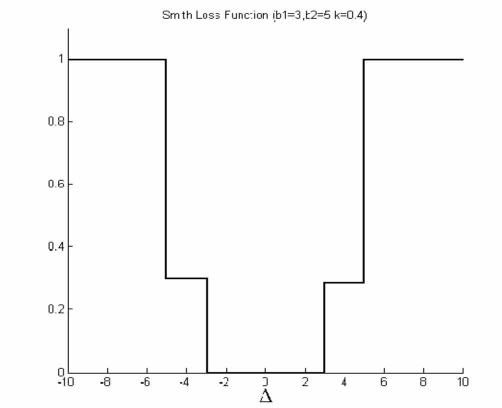
در این بخش برخی از توابع زیان متداول معرفی و دسته بندی می‌گردند.

۱-۳-۱- تابع زیان پله‌ای

فرم کلی تابع زیان پله‌ای به صورت زیر می باشد که توسط اسمیت (smith ۱۹۸۰) معرفی شده است.

$$L(\Delta)=\begin{cases} ۰ & |\Delta|<b_۱ \\ k & b_۱<|\Delta|<b_۲ \\ ۱ & b_۲\leq|\Delta| \end{cases} \tag{۱-۴}$$

که در آن پارامترهای $k, b_1, b_2 > 0$ با توجه به زیان خطای بیش برآورد و کم برآورد انتخاب می‌شوند. این تابع بیانگر این مطلب است که اگر برآورد δ در محدوده b_1 واحد از θ باشد هیچ زیانی ایجاد نمی‌شود و اگر این برآورد بین محدوده b_1, b_2 باشد به مقدار k واحد زیان تولید شده و در صورتی که این برآورد از محدوده b_2 خارج شود مقدار ۱ زیان دیده خواهد شد. در شکل ۱-۱ تابع زیان پله ای در بازه (۱۰,۱۰-) رسم شده است.

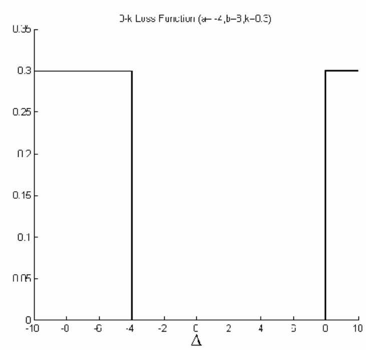


شکل ۱-۱: رسم تابع زیان پله‌ای

یک حالت خاص از این تابع زیان، تابع زیان پایه است که به صورت زیر می‌باشد.

$$L(\Delta) = \begin{cases} 0 & |\Delta| < b \\ 1 & |\Delta| \geq b \end{cases} \qquad (۵-۱)$$

که در آن پارامتر $\mathrm{b}>0$ و با توجه به شرایط مسئله انتخاب می‌شود. این تابع ساده ترین شکل یک تابع زیان متقارن و کراندار است. در شکل۱-۲ تابع زیان در بازه (۱۰,۱۰-) رسم شده است.



شکل ۱-۲: رسم تابع زیان پایه

۱-۳-۲- تابع زیان قدر مطلق خطا

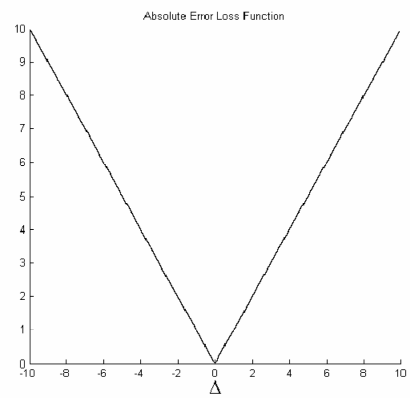
دربرخی از مسائل تصمیم اختلاف مقدار واقعی پارامتر با مقدار برآورد شده، رابطه مستقیمی با میزان واقعی زیان برآورد دارد . در واقع زمانی که Δ از نظر قدر مطلق صعود کند $L(\Delta)$ نیز صعود می کند و بر عکس. در این موارد معمولاً تابع زیان قدر مطلق خطا به فرم زیر پیشنهاد می شود.

$$L(\Delta) = |\Delta| \qquad (۶\text{-}۱)$$

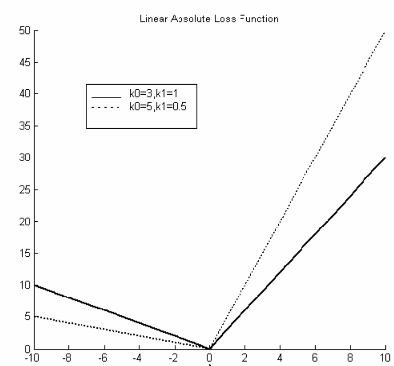
اما در مواردی که اهمیت زیان حاصل از خطای بیش برآورد همسطح زیان خطای کم برآورد نیست از تابع زیان خطی به فرم زیر استفاده می‌شود.

$$L(\Delta) = \begin{cases} k_{۰}\Delta & \Delta \geq ۰ \\ -k_{۱}\Delta & \Delta < ۰ \end{cases} \qquad (۷\text{-}۱)$$

که در آن $k_{۱}, k_{۰} > ۰$ به ترتیب پارامترهای خطای بیش برآورد و کم برآورد هستند و با توجه به اهمیت هر یک از خطاها انتخاب می‌شوند. در شکل های ۲-۳ و ۲-۴ به ترتیب دو تابع زیان قدر مطلق خطا و خطی در بازه (۱۰,۱۰-) رسم شده اند.



شکل ۱-۳: رسم تابع زیان قدر مطلق خطا



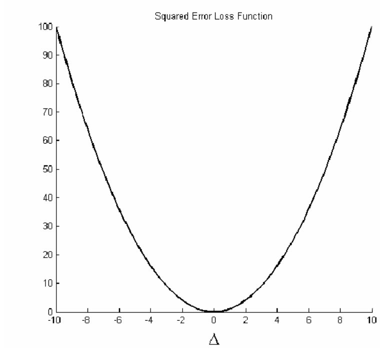
شکل ۱-۴: رسم تابع زیان خطی

۱-۳-۳- تابع زیان مربع خطا

در مسائلی که مقدار خطا اهمیت دارد نه نوع (علامت) آن معمولاً تابع زیان مربع خطا بر پایه خطای ساده Δ و به فرم زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$L(\Delta) = \Delta^{۲} \qquad (۸-۱)$$

که شکل ۱-۵ نشان دهنده این تابع می باشد.



شکل ۱-۵: رسم تابع زیان مربع خطا

این تابع زیان دارای دو نقطه ضعف مهم تقارن و بی‌کران بودن است که تعمیم های متنوعی از این تابع به منظور از بین بردن این دو نقطه ضعف وجود دارد. در زیر به سه مورد آنها اشاره می شود.

۱. **تابع زیان مربع خطای وزنی**

شکل کلی این تابع زیان بر پایه خطای ساده Δ به صورت زیر می باشد:

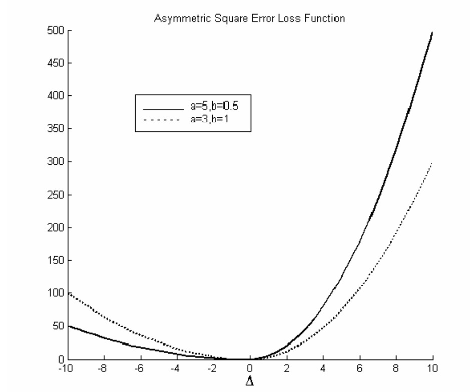
$$L(\Delta) = \omega(\theta)\Delta^{۲} \qquad (۹-۱)$$

که در آن $\omega(\theta)$ تابع وزنی است که برای خطای برآورد مقادیر مختلف پارامتر θ، زیان های متفاوتی را در نظر می‌گیرد. در اینجا از تابع زیان با وزن $\omega(\theta) = \frac{۱}{\theta^{۲}}$ استفاده خواهد شد.

۲. **تابع زیان مربع خطای نامتقارن**

$$L(\Delta) = \begin{cases} a\Delta^{۲} & \Delta \geq ۰ \\ b\Delta^{۲} & \Delta < ۰ \end{cases} \qquad (۱۰-۱)$$

که در آن $a,b>۰$ به ترتیب پارامترهای خطای بیش برآورد و کم برآورد هستند این تابع زیان تعمیم نامتقارن تابع زیان مربع خطاست. هر گاه اهمیت خطای بیش برآورد بیشتر باشد آنگاه $b<۱,a>۱$ و هر گاه اهمیت خطای کم برآورد بیشتر باشد آنگاه $b>۱,a<۱$ در نظر گرفته می شود. در شکل(۱-۶) دو تابع خطای نا متقارن در بازه (۱۰,۱۰-) رسم شده اند.



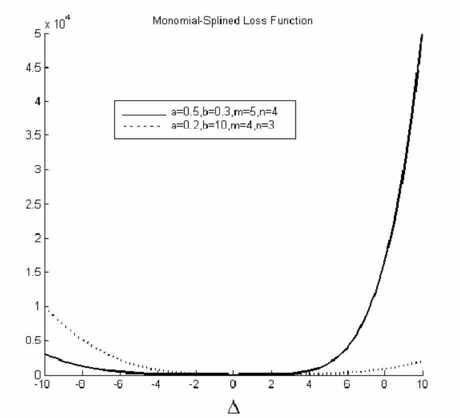
شکل ۱-۶: رسم تابع زیان مربع خطای نامتقارن

این تابع و نیز تابع زیان خطی، فرم های خاصی از تابع زیان یک جمله ای – اسپیلایند هستند که اولین بار به وسیله تامپسون و باسو (۱۹۹۶) برای برآورد قابلیت اطمینان و به فرم زیر معرفی گردید:

$$L(\Delta)=\begin{cases} a\Delta^m & ;\Delta\geq 0 \\ b|\Delta|^n & ;\Delta< 0 \end{cases}$$

که در آن پارامترهای بیش وکم برآورد a>۰ و b>۰ با توجه به اهمیت زیان خطای بیش وکم برآورد انتخاب می شوند.

در شکل (۱-۷) دو تابع زیان یک جمله ای – اسپیلایند در بازه (۱۰،۱۰-) رسم شده اند.



شکل ۱-۷: رسم تابع زیان یک جمله ای – اسپیلایند

۳. تابع زیان مربع خطای کراندار

یکی از مهمترین نقاط ضعف تابع زیان مربع خطا، بی کران بودن این تابع زیان است، لذا در ادامه تعمیم کراندار این تابع آورده می‌شود.

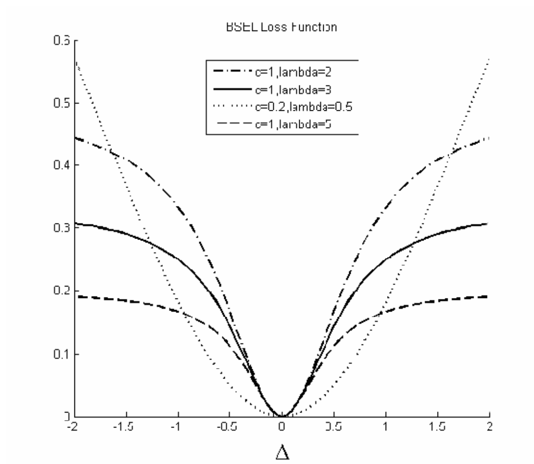
تابع زیان مربع خطا را به فرم کلی زیر در نظر می گیریم .

$$L(\Delta)=C\Delta^2 \qquad (۱۱\text{-}۱)$$

تابع زیان مربع خطای کراندار بر پایه تابع زیان مربع خطا به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$L(\Delta) = \frac{L(\Delta)}{1+\lambda L(\Delta)} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{1+\lambda L(\Delta)}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{1+b\Delta^2}\right) \quad (۱۲-۱)$$

که در آن $\lambda > 0$ پارامتر کران و $b = c\lambda$ پارامتر مقیاس این تابع زیان هستند در شکل ۱- ۸ چند تابع زیان مربع خطای کراندار در بازه (۲و۲-) رسم شده اند.



شکل ۱-۸: رسم تابع زیان مربع خطای کراندار

مشاهده می شود که این تابع زیان متقارن و با افزایش b جریمه یا زیان کمتری برای خطای برآورد در نظر می گیرد. با تمایل b به مقادیر کوچک (نزدیک صفر) تابع زیان مربع خطای کراندار به تابع زیان بی‌کران مربع خطا متمایل می گردد.

ویژگی های تابع زیان مربع خطای کراندار

۱) این تابع زیان برای هر $\Delta \in \Re$ ، کراندار است و $0 \le L(\Delta) < \frac{1}{\lambda}$.

۲) تابع زیان مربع خطای کراندار به طور نامتناهی (از همه مراتب) مشتق پذیر است و ازاین رو، برای هر $\Delta \in \Re$ ، پیوسته است. مشتق اول و دوم این تابع زیان به فرم زیر هستند:

$$L'(\Delta) = \frac{2b\Delta}{\lambda(1+b\Delta^2)^2} \quad \text{(a)}$$

$$L''(\Delta) = \frac{2b(1+b\Delta^2) - 8(b\Delta)^2}{(1+b\Delta^2)^3} \quad \text{(b)}$$

۳) تابع زیان مربع خطای کراندار در $\Delta = 0$ به حداقل خود یعنی $L(0) = 0$ می رسد و با افزایش $|\Delta|$، اکیداً به کران بالای خود یعنی $\frac{1}{\lambda}$ افزایش می یابد.

اثبات: چون با توجه به تساوی های (a) و(b) داریم:

$$L(+\infty) = L(-\infty) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{و} \qquad L(0) = L'(0) = 0$$

همچنین برای هر $\Delta > 0$ ، $L'(\Delta) > 0$ و $L'(+\infty) = 0^+$

و برای هر $\Delta < 0$ ، $L'(\Delta) < 0$ و $L'(-\infty) = 0^-$.