دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

ریاضی محض؛ گرایش جبر

بررسی حاصلضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی

نگارنده

سارا سپاهانی

استاد راهنما

دکتر علیرضا سالمکار لنگرودی

۱۳۸۸/۱۰/۲۷

استاد مشاور

دکتر نگار شهنی کرمزاده

شهریورماه ۱۳۸۸ خورشیدی

تاریخ ....
شماره ....
پیوست..........................

"بسمه تعالی"

دانشگاه شهید بهشتی

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

باز گشت به مجوز دفاع شماره **۲۰۰/۹۷۲۷/د** مورخ **۸۸/۶/۲۳** جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان‌نامه خانم: **سارا سپاهانی** به شماره شناسنامه **۲۳۶۲۴** صادره از **تهران** متولد **۱۳۵۹** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد پیوسته **ریاضی**

با عنوان:

بررسی حاصلضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی

به راهنمایی:

آقای دکتر علیرضا سالمکار

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۸/۶/۲۵** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمرهٔ **۱۹ (نوزده تمام)** و درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه
۱- ***استاد راهنما:*** آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی
۲- ***استاد مشاور:*** *خانم دکتر نگار شهنی کرمزاده*	استادیار	شهید بهشتی
۳- ***استاد داور:*** آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی
۴- ***استاد داور:*** آقای دکتر مسعود طوسی	استاد	شهید بهشتی
۵- **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی

چکیده

حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها نخستین بار در مقاله‌ای منتشر شده در سال ۱۹۸۷ توسط رونی براون[۱] و ژان لویی لوده[۲] معرفی شد. بدیهی است که باید بتوان برای ساختارهای جبری دیگری چون جبرهای لی و یا جبرهای جابجایی نیز یک ضرب مشابه تعریف کرد. در این پایان‌نامه حاصلضرب تانسوری ناآبلی برای جبرهای لی با استفاده از یک خاصیت جهانی تعریف و وجود آن اثبات می‌شود. همچنین برخی از خواص آن مورد کاوش قرار می‌گیرد و خصوصا به بررسی روابط موجود میان ضرب تانسوری جبرهای لی و همولوژی‌های رده پایین این ساختار جبری پرداخته می‌شود. شباهت‌هایی که همواره میان گروه‌ها و جبرهای لی مشاهده می‌شود ما را بر آن می‌دارد که درستی روابطی که برای گروه‌ها وجود دارد را برای جبرهای لی هم بیازماییم و نتیجه هم نشان می‌دهد که در این راه به خطا نرفته‌ایم و برخی از روابط حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها برای حاصلضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی نیز صادق است. البته در مورد گروه‌ها با توجه به ارتباط تنگاتنگ میان نظریه‌ی همولوژی گروه‌ها با نظریه‌ی هموتوپی فضاهای توپولوژیک، در بسیاری موارد می‌توان درستی یک رابطه‌ی جبری را با استفاده از روش‌های توپولوژیک بررسی کرد حال آن که علیرغم شباهت‌های فراوان جبرهای لی با گروه‌ها چنین رابطه‌ای لااقل تاکنون میان جبرهای لی و فضاهای توپولوژیک برقرار نشده و ناچاریم از روش‌های کاملا جبری برای اثبات روابط مشابه در رسته‌ی جبرهای لی بهره ببریم.

---
[۱] Ronnie Brown
[۲] Jean-Louis Loday

فهرست مطالب

پیشگفتار

در این پایان‌نامه که بر اساس مقاله‌ی [۶] تدوین شده است به حاصلضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی می‌پردازیم. در فصل یک تعاریف به کار رفته در این نوشته را به منظور ایجاد هماهنگی و برطرف نمودن هرگونه ابهام احتمالی و خودکفا بودن متن از تعاریف ابتدایی گرفته تا مفاهیم مورد استفاده در نظریه‌ی رسته‌ها که شالوده‌ی بخش‌هایی از پایان‌نامه است گرد آورده‌ایم. در فصل دوم حاصلضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی تعریف، وجود آن اثبات و و خواص و روابط ابتدایی آن از جمله خاصیت جهانی بیان گشته است. در این فصل همچنین مفاهیم دیگری همچون مدول‌های متقاطع که موضوع اصلی فصل چهارم است تعریف گشته و مثال‌هایی از آن در اختیار خواننده قرار داده شده است. در ادامه‌ی فصل حاصلضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی به عنوان یک تابعگون مورد مطالعه قرارگرفته و در انتهای فصل، گسترش مرکزی جهانی[۳] یک جبر لی معرفی و رابطه‌ی آن با همولوژی مرتبه‌ی دوم جبر لی که همان ضربگر شور[۴] جبر لی است بررسی می‌شود.

در فصل سوم حاصلضرب خارجی جبرهای لی تعریف شده و به بررسی رابطه‌ی آن و رابطه‌ی تابعگون

---

[۳] universal central extension

[۴] Schur multiplier

سراسری دوجمله‌ای [5] با حاصلضرب تانسوری ناآبلی می‌پردازیم و با استفاده از دنباله‌ی دقیق

$$H_3(P) \to \Gamma(P^{ab}) \to J_2(P) \to H_2(P) \to 0$$

که وجود شکل کلی‌تر آن در فصل چهارم اثبات می‌شود، همریختی‌هایی را استخراج می‌کنیم. در انتهای این فصل به بررسی ارتباط مدول‌های متقاطع و همولوژی مرتبه‌ی دوم در رسته‌ی جبرهای لی پرداخته و به نتیجه‌ای مشابه آنچه که در[۴] برای گروه‌ها به دست آمده می‌رسیم.

فصل آخر که مهم‌ترین فصل این پایان‌نامه است با ذکر تاریخچه‌ای از همولوژی و کوهمولوژی ناآبلی در گروه‌ها به چگونگی محاسبه‌ی آن‌ها در جبرهای لی می‌پردازد. همانطور که در فصل اول آمده است همولوژی و کوهمولوژی کلاسیک جبرهای لی که توسط شوالی[6] و آیلنبرگ[7] معرفی شده با در نظر گرفتن جبر لی L روی حلقه‌ی جابجایی Λ به عنوان یک L^e-مدول که L^e همان جبر جهانی پوششی[8] L است و در نظر گرفتن Λ به عنوان یک L^e-مدول بدیهی حاصلضرب تانسوری متعارف آن‌ها را در نظر گرفته و تابعگون‌های مشتق شده‌ی چپ از آن را به عنوان مدول‌های همولوژی در نظر می‌گیرد. با معرفی حاصلضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی راه برای معرفی همولوژی ناآبلی جبرهای لی به صورت تابعگون های مشتق شده از این تابعگون هموار شده است. در این فصل با استفاده از جبرهای لی سادکی[9]، تحلیلی آزاد از جبر لی مورد نظر ایجاد گردیده و با اعمال تابعگونی دلخواه از رسته‌ی جبرهای لی به درون همین رسته تابعگون‌های مشتق شده‌ی چپ آن محاسبه گردیده و ارتباط این تابعگون‌ها با همولوژی کلاسیک جبرهای لی بررسی می‌گردد. در ادامه وجود دنباله‌ی استفاده شده در فصل سوم در شکل کلی‌تر اثبات اثبات می‌شود. در انتهای فصل تابعگون‌های مشتق شده‌ی نسبی معرفی می‌شوند و همریختی‌هایی ارایه می‌شود که در واقع تعمیمی از حالت مطلق و غیرنسبی تابعگون‌های مشتق شده است و در پایان طی قضیه‌ای تعمیمی برای فرمول هوپف[10] برای همولوژی مرتبه دوم جبرهای لی ارایه می‌شود.

---

۵ universal quadratic functor

۶ Chevalley

۷ Eilenberg

۸ universal enveloping algebra

۹ simplicial lie algebra

۱۰ Hopf

فصل ۱

تعاریف و گزاره‌ها

تعریف ۱-۱ (رسته) یک رسته[۱] مانند $\mathcal{C}$ از اجزای زیر تشکیل شده است

۱) گردایه‌ای از اشیا که آن را با $obj(\mathcal{C})$ نمایش می‌دهیم،

۲) یک مجموعه از مورفیسم‌ها[۲] یا $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ برای هر زوج مرتب $(A,B) \in obj(\mathcal{C}) \times obj(\mathcal{C})$ که برای دو زوج مرتب اژ اشیا مانند (A,B) و (A',B') مجموعه‌های $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ و $Hom_{\mathcal{C}}(A',B')$ دو مجموعه‌ی مجزا هستند مگر این که $A = A'$ و $B = B'$،

۳) به ازای هر $A \in obj(\mathcal{C})$ عضو $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ و به ازای هر سه تایی از اشیا مانند (A,B,C) یک قانون ترکیب مورفیسم‌ها به صورت نگاشت

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$
$$(f,g) \mapsto g \circ f$$

---

۱ category

۲ morphism

وجود داشته باشد به طوری که دو قانون زیر برای هر $f : A \to B$، هر $g : B \to C$ و هر $h : C \to D$ برقرار باشد

۱ـ قانون عضو همانی

$$f \circ id_A = f, id_A \circ g = g$$

۲ـ قانون شرکت‌پذیری

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

تعریف ۱-۲ (شیء صفر) در رسته‌ی C گوییم شیء $0 \in obj(C)$، شیء صفر[۳] است هرگاه به ازای هر $X \in obj(C)$ مجموعه‌های $Hom_C(0, X)$ و $Hom_C(X, 0)$ تک‌عضوی باشند. شیء صفر در صورت وجود یکتاست.

تعریف ۱-۳ (مورفیسم صفر) اگر رسته‌ی C دارای شیء صفر باشد آنگاه برای هر $X, Y \in obj(C)$ مورفیسم یکتای $X \to 0 \to Y$ موجود است که آن را با 0_{XY} نمایش می‌دهیم و مورفیسم صفر[۴] از X به Y می‌نامیم.

تعریف ۱-۴ (هسته) گوییم مورفیسم $k : A \to B$، هسته‌ی[۵] مورفیسم $f : B \to C$ است هرگاه $f \circ k = 0_{AC}$ و اگر مورفیسم دیگری مانند $k' : A' \to B$ موجود باشد که $f \circ k' = 0_{A'C}$ آنگاه مورفیسم یکتای $\iota : A' \to A$ موجود است به طوری که $k \circ \iota = k'$.

تعریف ۱-۵ (هم‌هسته) گوییم مورفیسم $c : C \to D$، هم‌هسته‌ی[۶] مورفیسم $f : B \to C$ است هرگاه $c \circ f = 0_{BD}$ و اگر مورفیسم دیگری مانند $c' : C \to D'$ موجود باشد که $c' \circ f = 0_{BD'}$ آنگاه مورفیسم یکتای $\pi : D \to D'$ موجود است به طوری که $\pi \circ c = c'$.

تعریف ۱-۶ (ضرب) فرض کنید C یک رسته و $\{A_i | i \in I\}$ خانواده‌ای از اشیای C باشد. منظور از ضرب[۷] A_i ها یک شیء مانند $P \in obj(C)$ است به همراه خانواده‌ای از مورفیسم‌ها $\{\pi_i : P \to A_i | i \in I\}$ به طوری که برای هر شیء $B \in obj(C)$ و خانواده‌ی مورفیسم‌های $\{\varphi_i : B \to A_i | i \in I\}$، مورفیسم یکتای $\varphi : B \to P$ موجود باشد به طوری که برای هر $i \in I$ داشته باشیم $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$.

---
۳ zero object
۴ zero morphism
۵ kernel
۶ cokernel
۷ product

تعریف ۱-۷ (هم‌ضرب) فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته و $\{A_i|i \in I\}$ خانواده‌ای از اشیای $\mathcal{C}$ باشد. منظور از هم‌ضرب[۸] A_i ها یک شیء مانند $S \in obj(\mathcal{C})$ است به همراه خانواده‌ای از مورفیسم‌ها $\{\iota_i : A_i \to S|i \in I\}$ به طوری که برای هر شیء $B \in obj(\mathcal{C})$ و خانواده‌ی مورفیسم‌های $\{\psi_i : A_i \to B|i \in I\}$ ، مورفیسم یکتای $\psi : S \to B$ موجود باشد به طوری که برای هر $i \in I$ داشته باشیم $\psi \circ \iota_i = \psi_i$.

تعریف ۱-۸ (تابعگون) گوییم F تابعگونی[۹] همورد[۱۰] (پادورد[۱۱]) از رسته‌ی $\mathcal{C}$ به رسته‌ی $\mathcal{D}$ است اگر F به هر شیء $X \in \mathcal{C}$ یک شیء $F(X) \in \mathcal{D}$ و به هر مورفیسم $f : X \to Y$ در $\mathcal{C}$ مورفیسم $F(f) : F(X) \to F(Y)$ ‏($F(f) : F(Y) \to F(X)$) در $\mathcal{D}$ را نظیر کند به طوری که برای مورفیسم دیگر $g : Y \to Z$، داشته باشیم

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$
$$(F(g \circ f) = F(f) \circ F(g))$$

تعریف ۱-۹ (تابعگون وفادار) گوییم تابعگون $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ یک تابعگون وفادار [۱۲] است هرگاه به ازای هر دو شیء $X, Y \in obj(\mathcal{C})$، نگاشت $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ یک نگاشت یک به یک باشد.

تعریف ۱-۱۰ (رسته‌ی ملموس) دوتایی $(\mathcal{C},\sigma)$ که در آن $\mathcal{C}$ یک رسته و $\sigma : \mathcal{C} \to Sets$ تابعگونی وفادار از $\mathcal{C}$ به رسته‌ی مجموعه‌ها است را یک رسته‌ی ملموس[۱۳] می‌نامیم به این شرط که

۱) هر مورفیسم در رسته‌ی $\mathcal{C}$ یک نگاشت در رسته‌ی مجموعه‌ها باشد،

۲) هر مورفیسم همانی در رسته‌ی $\mathcal{C}$ یک نگاشت همانی در رسته‌ی مجموعه‌ها باشد،

۳) هر ترکیب مورفیسم‌ها در $\mathcal{C}$ یک ترکیب نگاشت‌ها در رسته‌ی مجموعه‌ها باشد.

با شرایط بالا به ازای هر شیء $A \in \mathcal{C}$، مجموعه‌ی $\sigma(A)$ را مجموعه‌ی زمینه‌ی[۱۴] A می‌نامیم.

تعریف ۱-۱۱ (رسته‌ی جمعی) یک رسته‌ی جمعی[۱۵] مانند $\mathcal{A}$ عبارت است از رسته‌ای که دارای شیء صفر باشد و به ازای هر دو شیء X و Y از آن شامل ضرب آن‌ها بوده و نیز $Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ دارای

---

۸ coproduct
۹ functor
۱۰ covariant
۱۱ contravariant
۱۲ faithful
۱۳ concrete category
۱۴ underlying set
۱۵ additive category

ساختار گروه آبلی باشد و ترکیب مورفیسم‌ها یا همان نگاشت

$$Hom_{\mathcal{A}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{A}}(Y,Z) \to Hom_{\mathcal{A}}(X,Z), \qquad (f,g) \mapsto g \circ f$$

یک نگاشت دوخطی باشد.

تعریف ۱-۱۲ (رسته‌ی آبلی) رسته‌ای جمعی را که

۱) به ازای هر مجموعه‌ی متناهی از اشیا شامل ضرب و هم‌ضرب آن‌ها باشد،

۲) هر مورفیسم در آن دارای هسته و هم‌هسته باشد،

۳) در آن رسته هر تکریختی هسته‌ی هم‌هسته‌ی خود و هر برو‌ریختی هم‌هسته‌ی هسته‌ی خود باشد،

یک رسته‌ی آبلی[۱۶] می‌نامیم. در واقع رسته‌ی آبلی رسته‌ای است که روش‌های جبر همولوژی روی آن قابل اجرا است.

تعریف ۱-۱۳ (تابعگون جمعی) اگر تابعگون F از رسته‌ی جمعی $\mathcal{A}$ به رسته‌ی جمعی $\mathcal{B}$ دارای این خاصیت باشد که به ازای هر $X,Y \in \mathcal{A}$، نگاشت $F : Hom_{\mathcal{A}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{B}}(FX,FY)$ یک همریختی باشد آنگاه می‌گوییم که F یک تابعگون جمعی[۱۷] است.

تعریف ۱-۱۴ (تبدیل طبیعی) اگر $F,E : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ دو تابعگون باشند گوییم $T : F \Rightarrow E$ یک تبدیل طبیعی از F به E است اگر به هر شیء $Z \in \mathcal{C}$، مورفیسم $T(Z) : F(Z) \to E(Z)$ را در $\mathcal{D}$ نظیر کند به طوری که برای هر مورفیسم $f : X \to Y$ در $\mathcal{C}$، نمودار زیر جابجایی باشد

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "T(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "T(Y)"] \\
E(X) \arrow[r, "E(f)"'] & E(Y)
\end{tikzcd}$$

تعریف ۱-۱۵ (تابعگون فراموشکار) تابعگون فراموشکار[۱۸] به تابعگونی از یک رسته‌ی ملموس به رسته‌ی ملموس دیگری گفته می‌شود که حداقل یکی از ساختارهای جبری رسته‌ی اول را نادیده بگیرد (حالتی که در آن هیچ ساختاری نادیده گرفته نشود تابعگون همانی‌ست که در اینجا مورد نظر ما نیست). برای مثال تابعگونی که ساختار ضرب اسکالر یک فضای برداری روی میدان Λ را فراموش می‌کند یک تابعگون فراموشکار از رسته‌ی فضاهای برداری روی میدان Λ به رسته‌ی گروه‌های آبلی است و تابعگونی که علاوه

۱۶ abelian category
۱۷ additive functor
۱۸ forgetful functor

بر ضرب اسکالر، ساختار گروه آبلی آن فضای برداری را هم فراموش کند تابعگونی فراموشکار از رسته‌ی فضاهای برداری روی میدان Λ به رسته‌ی مجموعه‌ها است.

تعریف ۱-۱۶ (تابعگون‌های الحاقی) فرض می‌کنیم $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ و $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ دو تابعگون باشند. در این صورت گوییم تابعگون F نسبت به تابعگون U الحاقی چپ[19] است اگر به ازای هر $X \in \mathcal{C}$ و هر $Y \in \mathcal{D}$، یک تناظر دوسویی طبیعی میان دو مجموعه‌ی زیر برقرار باشد

$$Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \cong Hom_{\mathcal{C}}(X, U(Y))$$

تعریف ۱-۱۷ (مدول روی حلقه‌ی یکدار) اگر Λ یک حلقه‌ی جابه‌جایی یکدار باشد گروه آبلی M را یک Λ-مدول نامیم هرگاه M مجهز به ضرب اسکالر Λ روی خود باشد و یا به بیان دیگر نگاشتی چون

$$. : \Lambda \times M \to M$$

موجود باشد به گونه‌ای که چهار خاصیت زیر را دارا باشد

یک) به ازای هر $\lambda \in \Lambda$ و $m, m' \in M$، $\lambda.(m + m') = \lambda.m + \lambda.m'$

دو) به ازای هر $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ و M، $(\lambda + \lambda').m = \lambda.m + \lambda'.m$

سه) به ازای هر $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ و $m \in M$، $(\lambda\lambda').m = \lambda.(\lambda' m)$

چهار) به ازای هر $m \in M$، $1_{\Lambda}.m = m$

تعریف ۱-۱۸ (مدول روی حلقه‌ی یکدار) تعریفی معادل برای Λ-مدول M این است که یک Λ-مدول عبارت است از یک گروه آبلی مانند M به همراه یک همریختی حلقه‌ها

$$\omega : \Lambda \to End(M)$$

تعریف ۱-۱۹ (جبر) منظور از یک جبر، یک مدول مانند A روی حلقه‌ی جابه‌جایی یکدار Λ به همراه یک نگاشت Λ-دوخطی

$$m : A \times A \to A$$
$$(x, y) \mapsto m(x, y)$$

است که آن را ضرب می‌نامیم و معمول است که به جای $m(x, y)$ از نماد xy استفاده کنیم.

تعریف ۱-۲۰ (جبر شرکت‌پذیر) گوییم جبر A دارای خاصیت شرکت‌پذیری[20] است هرگاه

$$\forall x, y, z \in A, \quad x(yz) = (xy)z$$

[19] left adjoint
[20] associativity

تعریف ۱-۲۱ (جبر لی) منظور از یک جبر لی مانند L، جبری است که ضرب آن دارای دو خاصیت زیر است

۱) به ازای هر $x \in L$،

$$xx = 0$$

۲) به ازای هر $x, y, z \in L$

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$$

که به خاصیت دوم تساوی ژاکوبی[21] گفته می‌شود.

نمادگذاری ۱-۲۲ مرسوم است که برای جبرهای لی از نماد $[x, y]$ برای نمایش ضرب x و y استفاده کنیم و ضرب را براکت لی[22] بنامیم.

تعریف ۱-۲۳ (جبر لی آبلی) گوییم جبر لی Lآبلی است هرگاه به ازای هر $x, y \in L$ داشته باشیم $[x, y] = 0$. واضح است که هر Λ-مدول مانند M را می‌توان با تعریف ضرب به صورت

$$[x, y] = 0 \quad \forall x, y \in M$$

به عنوان یک جبر لی آبلی در نظر گرفت.

تعریف ۱-۲۴ (زیرجبر و ایدآل) اگر L یک جبر لی باشد منظور از یک زیرجبر، زیرمدولی از L است که تحت عمل ضرب بسته باشد. همچنین اگر I زیرجبری از L باشد به طوری که به ازای هر $l \in L$ و هر $x \in I$ داشته باشیم $[x, i] \in I$ آنگاه می‌گوییم I ایدآلی ازL است.

تعریف ۱-۲۵ (زیرجبر تولید شده توسط زیرمجموعه‌ی یک جبر لی) اگر S زیرمجموعه‌ای از جبر لی L باشد، منظور از جبر لی تولید شده توسط S، کوچکترین زیرجبر L است که شامل مجموعه‌ی S باشد. این زیرجبر اشتراک تمام زیرجبرهای شامل S بوده و با توجه به این که اشتراک هر گردایه از زیرجبرهای یک جبر لی خود یک زیرجبر لی است، برای هر زیرمجموعه S این زیرجبر موجود است.

تعریف ۱-۲۶ (جبر لی خارج‌قسمتی) اگر I ایدآلی از جبر لی L باشد آنگاه مدول خارج‌قسمتی L/I با تعریف ضرب به صورت

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I, \;\; x, y \in L$$

تشکیل یک جبر لی می‌دهد که به آن جبر لی خارج‌قسمتی می‌گوییم.

---

[21] Jacobi identity

[22] Lie bracket

تعریف ۱-۲۷ (ایدآل جابجاگر) اگر L یک جبر لی باشد، زیر جبر تولید شده توسط مجموعه‌ی

$$\{[l,l'] \mid \quad l,l' \in L\}$$

را با $[L,L]$ نمایش می‌دهیم. این زیرجبر در واقع ایدآلی از جبر لی L است و آن را ایدآل جابجاگر[۲۳] L می‌نامیم. همچنین جبر لی خارج‌قسمتی $L^{ab} = L/[L,L]$ را که به وضوح آبلی است، جبر لی آبلی شده‌ی[۲۴] L می‌نامیم.

تعریف ۱-۲۸ (جبر لی کامل) جبر لی L را کامل می‌گوییم هرگاه $[L,L] = L$

تعریف ۱-۲۹ (مرکز جبر لی) مرکز یک جبر لی مانند L عبارت است از مجموعه‌ی

$$Z(L) = \{x \in L, \ \forall y \in L : [x,y] = \circ\}$$

واضح است که مرکز یک جبر لی ایدآلی از آن جبر لی است.

گزاره ۱-۳۰ اگر A یک جبر لی شرکت‌پذیر باشد با تعریف براکت لی به صورت

$$[x,y] = xy - yx, \qquad x,y \in A$$

جبر لی شرکت‌پذیر A تبدیل به یک جبر لی می‌شود که آن را با A_L نمایش می‌دهیم. با این تعریف، $(-)_L$ تابعگونی از رسته‌ی جبرهای شرکت‌پذیر به رسته‌ی جبرهای لی است.

تعریف ۱-۳۱ (جبرهای لی خطی) مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان Λ با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک جبر لی شرکت‌پذیر می‌دهد. با توجه به گزاره‌ی قبل و با تعریف براکت لی برای دو ماتریس A و B به صورت

$$[A,B] = AB - BA$$

مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ تشکیل یک جبر لی می‌دهد که آن را با $gl(\Lambda)$ نمایش می‌دهیم. هر زیرجبری از $gl(\Lambda)$ یک جبر لی خطی نامیده می‌شود. از جمله‌ی این زیرجبرها می‌توان از مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ با اثر[۲۵] صفر نام برد. این زیرجبر را که در واقع ایدآلی از $gl(\Lambda)$ است را جبر لی خطی ویژه [۲۶] می‌نامیم و با $sl(\Lambda)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۳۲ (جبر تانسوری) برای Λ-مدول M قرار می‌دهیم

$$T_n M = M \otimes_\Lambda M \otimes_\Lambda M \otimes_\Lambda \dots \otimes_\Lambda M, \qquad T_\circ M = \Lambda$$

---

۲۳ commutator ideal

۲۴ abelianized

۲۵ trace

۲۶ special linear Lie algebra

و جبر تانسوری روی M را تعریف می‌کنیم

$$TM = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n M$$

که در آن عمل ضرب به صورت زیر تعریف شده است

$$(m_1 \otimes m_2 \otimes \ldots \otimes m_p).(m'_1 \otimes m'_2 \otimes \ldots \otimes m'_q) = m_1 \otimes \ldots \otimes m_p \otimes m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_q$$

در واقع TM جبر آزاد روی Λ-مدول M است با این خاصیت جهانی که اگر $\iota : M \to TM$ نگاشت شمول طبیعی و A یک جبر دلخواه و $f : M \to A$ یک همریختی Λ-مدولی باشد آنگاه همریختی یکتای جبری $f' : TM \to A$ موجود است به طوری که $f'\iota = f$. به بیان دیگر تابعگون T که یک Λ-مدول مانند M را به جبرتانسوری روی آن می‌برد، نسبت به تابعگون فراموشکاری که ساختار جبری یک جبر را فراموش می‌کند الحاقی چپ است.

تعریف ۱-۳۳ (پوشش جهانی) اگر L یک جبر لی باشد، پوشش جهانی L [۲۷] عبارت است از خارج قسمت جبر TL بر ایدآل تولید شده توسط عناصری به شکل

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \qquad x, y \in L$$

در واقع یک جبر شرکت‌پذیر مانند L^e به همراه همریختی جبرهای لی $\iota : L \to L^e_L$ با این خاصیت جهانی که اگر A یک جبر شرکت‌پذیر و $f : L \to A_L$ یک همریختی جبرهای لی باشد آنگاه همریختی $f' : L^e \to A$ موجود باشد به طوری که $f'\iota = f$. در واقع $(-)^e$ تابعگونی از رسته‌ی جبرهای لی به رسته‌ی جبرهای شرکت‌پذیر بوده و نسبت به تابگون $(-)_L$ الحاقی چپ است.

تعریف ۱-۳۴ (جبر لی آزاد روی یک مجموعه) جبر لی آزاد روی مجموعه‌ی S عبارت است از یک جبر لی $F(S)$ همراه با نگاشت $\iota : S \to F$ با این خاصیت که اگر M یک جبر لی دلخواه و $f : S \to M$ نگاشتی دلخواه باشد آنگاه همریختی یکتای جبرهای لی مانند $f' : F(S) \to M$ موجود باشد به طوری که $f'\iota = f$.

تعریف ۱-۳۵ (جبر لی آزاد روی Λ-مدول) جبر لی آزاد روی Λ-مدول M عبارت است از یک جبر لی $F(M)$ همراه با همریختی Λ-مدولی $\iota : M \to F(M)$ با این خاصیت که اگر P یک جبر لی دلخواه و $f : M \to P$ یک همریختی Λ-مدولی باشد آنگاه همریختی یکتای جبرهای لی مانند $f' : F(M) \to P$ موجود باشد به طوری که $f'\iota = f$.

[۲۷] universal enveloping algebra

تعریف ۱-۳۶ (مدول روی جبر لی) اگر L یک جبر لی باشد، یک L-مدول عبارت است از یک Λ -مدول (جبر لی آبلی) مانند M به همراه همریختی جبرهای لی

$$\rho : L \to (End_{\Lambda}(M))_L$$

گزاره ۱-۳۷ اگر L یک جبر لی بوده و M یک L-مدول باشد به راحتی می‌توان نشان داد که M یک L^e-مدول (با در نظر گرفتن L^e به عنوان یک حلقه) است و بالعکس اگر M یک L^e-مدول باشد هم می‌توان نشان داد که M یک L -مدول است. بنابراین از این پس میان L-مدول بودن و L^e-مدول بودن تفاوتی قایل نخواهیم بود و این دو مفهوم را به جای یکدیگر به کار خواهیم برد.

تعریف ۱-۳۸ (نمایش آزاد یک جبر لی) نمایش آزاد یک جبر لی مانند L عبارت است از یک جبر لی آزاد مانند F به همراه ایدآل R از آن به طوری که $L \cong F/R$.

گزاره ۱-۳۹ اگر P زیرجبری از جبر لی L باشد آنگاه L^e به عنوان P-مدول آزاد است.

تعریف ۱-۴۰ (مشتق روی یک جبر لی) اگر L یک جبر لی باشد منظور از یک مشتق روی L عبارت است از همریختی Λ-مدولی $d : L \to L$ به طوری که

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)], \ \forall x,y \in L$$

گزاره ۱-۴۱ مجموعه‌ی تمام مشتقات یک جبر لی مانند L که آن را با $Der(L)$ نمایش می‌دهیم تشکیل یک جبر لی می‌دهد.

تعریف ۱-۴۲ (جمع نیم‌مستقیم) اگر L و M دو جبر لی باشند و همریختی جبرهای لی $\theta : L \to Der(M)$ موجود باشد، جمع نیم‌مستقیم[۲۸] L و M توسط θ که با $L \rtimes M$ نمایش داده می‌شود عبارت است از جمع مستقیم Λ-مدول‌های L و M یا $L \oplus M$ به همراه عمل ضرب زیر

$$[(l,m),(l',m')] = ([l,l'],(\theta(l'))(m) - (\theta(l))(m') + [m,m']), \ \forall l,l' \in L, m,m' \in M$$

به راحتی دیده می‌شود که M ایدآلی از $L \rtimes M$ و L زیرجبری از آن است.

تعریف ۱-۴۳ (جبر لی سادکی) منظور از جبر لی سادکی[۲۹] دنباله‌ای از جبرهای لی $\{L_0, L_1, L_2, \ldots\}$ به همراه همریختی‌های $\partial_i : L_n \to L_{n-1}$ و $\sigma_i : L_n \to L_{n+1}$ برای $i = 0, 1, \ldots, n$ است به طوری

[۲۸] semidirect sum
[۲۹] simplicial Lie algebra

که در شرایط زیر صدق کنند

$$\partial_i\partial_j = \partial_{j-1}\partial_i \quad \text{اگر } i < j$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_i \quad \text{اگر } i \leq j$$

$$\partial_i\sigma_j = \begin{cases} \sigma_{j-1}\partial_i & \text{اگر } i < j \\ identity & \text{اگر } i = j \text{ یا } i = j+1 \\ \sigma_j\partial_{i-1} & \text{اگر } i > j-1 \end{cases}$$

تعریف ۱-۴۴ (رسته‌ی جبرهای لی سادکی) اگر L و L' دو جبر لی سادکی باشند، یک همریختی جبرهای لی سادکی از L به L' عبارت است از دنباله‌ای از همریختی‌های جبرهای لی $\{f_i : L_i \to L'_i\}_{i\geq 0}$ که با ∂_iها و σ_iها در تعریف فوق جابجا شوند. با همریختی مذکور، گردایه‌ی جبرهای لی تشکیل یک رسته می‌دهد که آن را رسته‌ی جبرهای لی سادکی می‌نامیم.

تعریف ۱-۴۵ (همبافت مور) برای جبر لی سادکی L، همبافت مور[۳۰] آن عبارت است از همبافت زیر

$$M(L): \quad \ldots \to M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \to \ldots \to M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \to 0$$

که در آن

$$M_0 = L_0, \quad M_n = \bigcap_{0 \leq i < n} ker(\partial_i), \quad d_n = \partial_n|_{M_n}$$

تعریف ۱-۴۶ (گروه‌های هموتوپی یک جبر لی سادکی) n-امین گروه هموتوپی یک جبر لی سادکی مانند L که آن را با $\pi_n(L)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از n-امین گروه همولوژی همبافت مور وابسته به آن جبر لی یعنی $M(L)$ که برابر است با $kerd_n/imd_{n+1}$.

گزاره ۱-۴۷ هر دنباله‌ی دقیق کوتاه از جبرهای لی مانند

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

دنباله‌ی دقیق بلند زیر از گروه‌های هموتوپی را به ما می‌دهد

$$\ldots \to \pi_{n+1}(C) \to \pi_n(A) \to \pi_n(B) \to \pi_n(C) \to \ldots \to \ldots \pi_0(C) \to 0$$

تعریف ۱-۴۸ (همولوژی و کوهمولوژی آبلی جبرهای لی) اگر L یک جبر لی روی حلقه‌ی یکدار Λ باشد با در نظر گرفتن Λ به عنوان یک L^e-مدول بدیهی مدول‌های همولوژی و کوهمولوژی L به ترتیب با

---
[۳۰] Moore complex

ضرایب در L-مدول B و L-مدول A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_n(L,B) = Tor_n^L(B,\Lambda)$$
$$H^n(L,A) = Ext_L^n(\Lambda,A)$$

که البته Λ به عنوان یک L-مدول بدیهی در نظر گرفته شده است. دقت شود که در اینجا منظور از Tor_n^L همان $Tor_n^{L^e}$ و منظور از Ext_L^n هم $Ext_{L^e}^n$ است و L^e یا همان جبر پوششی جهانی L به عنوان یک حلقه در نظر گرفته می‌شود.

گزاره ۱-۴۹ (فرمول هوپف) اگر $R \hookrightarrow F \twoheadrightarrow L$ یک نمایش آزاد جبر لی L باشد آنگاه

$$H_2(L) \cong [F,F] \cap R/[F,R]$$

که منظور از $H_2(L)$ همان همولوژی آبلی مرتبه دوم L با ضرایب در Λ است در حالی که Λ را یک L-مدول بدیهی در نظر گرفته‌ایم.

گزاره ۱-۵۰ (ضربگر شور) $H_2(L)$ را ضربگر شور[۳۱] جبر لی L می‌نامیم و با $M(L)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱-۵۱ (تغییر حلقه) اگر $\gamma : \Lambda \to \Lambda'$ یک همریختی حلقه‌ها و M یک Λ-مدول باشد آنگاه با در نظر گرفتن Λ' به عنوان یک Λ-مدول راست با استفاده از γ، $N = \Lambda' \otimes_\Lambda M$ یک Λ'-مدول است.

گزاره ۱-۵۲ (لم پنج) [۳۲] نمودار جابجایی زیر از جبرهای لی و همریختی‌های جبرهای لی را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccccccccc}
L_1 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L_3 & \longrightarrow & L_4 & \longrightarrow & L_5 \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_3} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_4} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_5} \\
M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5
\end{array}$$

داریم

۱) اگر α_1 بروریختی و α_2 و α_4 تکریختی باشند آنگاه α_3 تکریختی است.

۲) اگر α_5 تکریختی و α_2 و α_4 بروریختی باشند آنگاه α_3 بروریختی است.

گزاره ۱-۵۳ اگر L یک جبر لی روی میدان Λ و I یک ایدآل آن باشد آنگاه L^e به عنوان I-مدول آزاد است.

---
۳۱ Schur multiplier
۳۲ five lemma

فصل ۲

حاصلضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی

۲-۱ تعاریف و روابط

در این نوشتار Λ همواره یک حلقه‌ی جابجایی یکدار در نظر گرفته شده است.

تعریف ۲-۱-۱ اگر M و P دو جبر لی باشند، منظور از عمل P روی M یک نگاشت Λ-دوخطی

$$P \times M \to M, \quad (p, m) \mapsto {}^{p}m$$

است که در خواص زیر برای هر $p, p' \in P$ و هر $m, m' \in M$ صدق می‌کند

$$\begin{aligned} {}^{[p,p']}m &= {}^{p}({}^{p'}m) - {}^{p'}({}^{p}m), \\ {}^{p}[m, m'] &= [{}^{p}m, m'] + [m, {}^{p}m']. \end{aligned}$$

برای مثال اگر P زیرجبری از Q و M ایدآلی از Q باشد، ضرب لی در Q عملی از P روی M به‌دست می دهد. همچنین اگر به ازای هر $p \in P$ و $m \in M$ داشته باشیم $^{p}m = 0$ آنگاه می‌گوییم P به طور بدیهی روی M عمل می‌کند. اکنون فرض می کنیم که دو جبر لی M و N روی یکدیگر عمل می‌کنند.

تعریف ۲-۱-۲ برای هر جبر لی مانند Q، نگاشتی Λ-دوخطی چون $h : M \times N \to Q$ را جفت‌سازی لی[1] نامیم هرگاه دارای خواص زیر برای هر $m, m' \in M$ و هر $n, n' \in N$ باشد

$$\begin{aligned} h([m, m'], n) &= h(m, {}^{m'}n) - h(m', {}^{m}n), \\ h(m, [n, n']) &= h({}^{n'}m, n) - h({}^{n}m, n'), \\ h({}^{n}m, {}^{m'}n') &= -[h(m, n), h(m', n')]. \end{aligned}$$

مثال ۲-۱-۳ اگر M و N دو ایدآل از یک جبر لی باشند آنگاه نگاشت $h : M \times N \to M \cap N$ با ضابطه‌ی $h(m, n) = [m, n]$ یک جفت‌سازی لی است.

اثبات.

(۱)

$$\begin{aligned} h(m, {}^{m'}n) - h(m', {}^{m}n) &= [m, {}^{m'}n] - [m', {}^{m}n] \\ &= [m, [m', n]] - [m', [m, n]] \\ &= [m, [m', n]] + [m', [n, m]] \\ &= -[n, [m, m']] \\ &= [[m, m'], n] \\ &= h([m, m'], n). \end{aligned}$$

[1] Lie pairing