بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان :

میانگین پذیری کونز جبرهای باناخ دوگان و جبرهای نیم گروهی وزن دار

استاد راهنما:
دکتر محمد ابوالقاسمی

نگارش:
مهیا گراوندی

اسفند ۱۳۹۰

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نام دانشجو:
مهیا گراوندی

تحت عنوان :

میانگین پذیری کونز جبرهای باناخ دوگان و جبرهای نیم گروهی وزن دار

در تاریخ   توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه   به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر محمد ابوالقاسمی   با مرتبه‌ی علمی   امضاء:

استاد داور داخل گروه   با مرتبه‌ی علمی   امضاء:

استاد داور خارج گروه   با مرتبه‌ی علمی   امضاء:

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد ابوالقاسمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

مهیا گراوندی

اسفند ۱۳۹۰

تقدیم به

استاد مهربانم

چکیده

ابتدا مفهوم میانگین پذیری برای جبرهای باناخ توسط جانسون مطرح شد سپس بر اساس اینکه جبر باناخ دوگان باشد و تغییر توپولوژی روی آن به توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف ستاره این مفهوم به مفهوم میانگین پذیر کونز روی این جبرهای باناخ تغییر پیدا کرد. هدف از این پایان نامه مطالعه و شناخت مفهوم میانگین پذیری کونز جبرهای باناخ دوگان می باشد، سپس به عنوان نمونه میانگین پذیری کونز جبرهای نیم گروهی وزن دار مورد مطالعه قرار می گیرد . از آنجا که میانگین پذیری کونز یک جبر باناخ وقتی خوشتعریف و با معنی است که آن جبر باناخ یک جبر باناخ دوگان باشد ، شرایطی روی نیم گروه مورد نظر قرار می دهیم که جبر نیم گروهی وزن دار یک جبر باناخ دوگان شود. از آنجا که ریاضیات در علوم مهندسی کاااربرد فراوانی دارد مطالعه آنالیز هارمونیک به ویژه مفهوم انواع میانگین پذیری در شناخت آنالیز فوریه و کاربرد آن در علوم مهندسی هوا و فضا کمک شایانی می کند.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک را که برای اثبات قضیه‌ها در فصل‌های بعدی نیاز داریم ، بیان می‌کنیم .

۱-۱ پیش نیازهایی از آنالیز تابعی

تعریف ۱-۱-۱. (نیم‌نرم)

فرض کنیم X یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ و $\mathscr{A}$ یک جبر روی $\mathbb{F}$ باشد. یک نیم نرم روی X نگاشت P از X به $\mathbb{R}$ است به‌طوری‌که برای هر $x,y \in X$ وهر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم

۱. $P(x) \geq 0$

۲. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

۳. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

یک نرم روی X ،نیم نرم P روی X است به‌طوری‌که

$$P(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

یک نرم جبری یک نرم روی $\mathscr{A}$ است به‌طوری‌که

$$P(xy) \leq p(x)p(y) \qquad (x,y \in \mathscr{A})$$

تعریف ۱-۱-۲. (فضای خطی نرم‌دار)

فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرم دار نامیم اگر به ازای هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی به نام نرم x (که با $\|x\|$ نمایش می‌دهیم) چنان مربوط شده باشد به‌طوری‌که:

۱. به ازای هر x و y در X ، $\qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲. اگر $x \in X$ وα اسکالر باشد آن گاه $\qquad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

۳. $\|x\| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب نماید.

هر فضای باناخ یک فضای خطی نرم دار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش کامل باشد به گفته دیگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و $s \in S$ همچنین

$$s^{-1}F = \{t \in S : \quad st \in F\} \qquad \big(F\,s^{-1} = \{t \in S : \quad ts \in F\}\big)$$

S حذفی چپ(راست) گوییم هرگاه $s^{-1}F$ برای هر $s \in S$ و هر زیر مجموعه متناهی F از S ، متناهی باشد.

تعریف ۱-۱-۴. نگاشت T از فضای برداری X به فضای برداری Y را یک نگاشت خطی یا عملگر خطی می‌نامیم هر گاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$$

یک تابعک خطی روی فضای برداری X یک عملگر خطی از X بر میدان $\mathbb{F}$ است.

تعریف ۱-۱-۵. گیریم X و Y دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند ، فضای خطی و نرم‌دار همه نگاشت‌های خطی از X به Y با جمع و ضرب اسکالر و نرم تعریف شده را با نماد $L(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

حال عملگر خطی T را از X به Y در نظر می‌گیریم گوییم T کراندار است هرگاه عددی ثابت مانند $M \geq 0$ موجود باشد به‌طوریکه برای هر $x \in X$ ،

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|$$

و عبارتست از:

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

البته برای نگاشت کراندار T نرم یکنواخت را با نماد $\|T\|_\infty$ نمایش می‌دهیم و بصورت

$$\|T\|_\infty = sup\{\|T(x)\| : x \in X\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۶. برای هر فضای خطی نرم دار X و Y، یک یکریختی خطی طولپا از X به روی Y یک نگاشت خطی T از X به روی Y است به طوری که

$$\|T(x)\| = \|x\| \qquad \forall x \in X$$

تعریف ۱-۱-۷. **(دوگان یک فضا)**

گیریم $\mathscr{A}$ یک فضای باناخ باشد و $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ آن‌گاه $L(\mathscr{A},\mathbb{F})$ را دوگان فضای $\mathscr{A}$ گوییم و با $\mathscr{A}^*$ نمایش می‌دهیم ($L(\mathscr{A},\mathbb{F})$ فضای همه نگاشت های خطی و پیوسته از $\mathscr{A}$ به $\mathbb{F}$ است) و به طریق مشابه فضای دوگان دوم $\mathscr{A}^{**}$ که $\mathscr{A}^{**}=L(\mathscr{A}^*,\mathbb{F})$ را دوگان دوم فضای $\mathscr{A}$ می‌نامیم.

توپولوژی تعریف شده بر روی $\mathscr{A}^*$ را توپولوژی ضعیف یا w- توپولوژی می‌نامیم و توپولوژی تعریف شده بر روی $\mathscr{A}^{**}$ را w^*- توپولوژی می‌نامیم که در ادامه این توپولوژی‌ها معرفی خواهند شد.

حال فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار و X^* دوگان X و $X^{**}=(X^*)^*$ دوگان دوم X باشد آن‌گاه:

۱. منظور از w -توپولوژی روی X کوچکترین توپولوژی روی X است که تحت آن هر $f\in X^*$ پیوسته است .
این توپولوژی را نماد $\sigma(X,X^*)$ نمایش می‌دهیم .

همگرایی تور (x_α) به x در توپولوژی $\sigma(X,X^*)$ را همگرایی ضعیف می‌نامیم و با یکی از نمادهای $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ یا $x=w-\lim\limits_{\alpha}(x_\alpha)$ نمایش می‌دهیم .

۲. نگاشت $\phi: X\longrightarrow X^{**}$ را با با ضابطه $x\longrightarrow \hat{x}$ تعریف می‌کنیم که در آن $\hat{x}(f)=f(x)$ برای هر $f\in x^*$ ، ϕ یک نگاشت خطی و طولپاست .
X را انعکاسی می‌نامیم هر گاه ϕ پوشا باشد.

منظور از w^* - توپولوژی روی X^* کوچکترین توپولوژی روی X^* است که خانواده $\phi(x)$ با این توپولوژی پیوسته هستند . برای نمایش این توپولوژی از نماد $\sigma(X^*,X)$ استفاده می‌کنیم .

در w^*- توپولوژی ،همگرایی تور $\{f_\alpha\}$به f را w^* -همگرایی می‌گوییم و داریم :

$$f_\alpha \xrightarrow{w^*} f \Longleftrightarrow f_\alpha(x)\longrightarrow f(x) \qquad \forall x\in X$$

تعریف ۱-۱-۸. **(فضای فشرده موضعی)**

فضای توپولوژیک X فشرده موضعی نامیده می‌شود اگر هر نقطه آن دارای یک همسایگی با بستار فشرده باشد .
واضح است که هر فضای فشرده به طور موضعی فشرده است.

مثال ۱-۱-۹. $\mathbb{R}^n$ یک فضای هاسدورف و فشرده موضعی است.

قضیه ۱-۱-۱۰. (*قضیه آلاقلو* [۱])

اگر X فضای نرم‌دار باشد آن گاه دایره یکه از X^* ، w^*-فشرده است .

برهان. رجوع شود به [۱۵] ■

قضیه ۱-۱-۱۱. (*کراین*[۲])

پوشش محدب بسته از مجموعه فشرده ضعیف از یک فضای باناخ ، فشرده ضعیف است.

برهان. رجوع شود به [۱۵]

■

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض کنیم G گروه فشرده موضعی باشد ، μ را یک اندازه رادون روی G می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعه فشرده مانندK ، $\mu(K) < \infty$ ، برای هر مجموعه بورل مانند E

$$\mu(E) = \sup\{\mu(k) : \quad \text{مجموعه بسته است } k \quad , k \subseteq E\}$$

و برای هر مجموعه بورل E ،

$$\mu(E) = \inf\{\mu(O) : \quad \text{مجموعه باز است } O \quad , E \subseteq O\}$$

فضای تمام اندازه‌های رادون روی G رابا $\mathcal{M}(G)$ نمایش می‌دهیم .

۱-۲ پیش نیازهایی از آنالیز هارمونیک

نیم‌گروه‌های S و T مفروضند و نگاشت $\theta : S \longrightarrow T$ هم‌ریختی است هرگاه

$$\theta(s_1 s_2) = \theta(s_1)\theta(s_2) \qquad \forall s_1, s_2 \in S$$

هم‌ریختی یک به یک و پوشا یک‌ریختی نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۱. (جبر)

فضای برداری $\mathscr{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. نسبت به جمع و ضرب برداری یک حلقه باشد ،

---

[۱] Alaoglu's theorem

[۲] Krein-Smulian

۲. برای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ وهر $x, y \in \mathscr{A}$ $\qquad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

مثال ۱-۲-۲. فرض کنیم X یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ باشد $L(X, X)$ با ضرب تعریف شده

$$(ST)(x) = S(Tx) \quad (x \in X)$$

یک جبر است که با نماد $L(X)$ نیز نشان می‌دهیم .

تعریف ۱-۲-۳. (C^* **- جبر**)

فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک جبر باناخ باشد

۱. نگاشت $* : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ را یک برگشت می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in \mathscr{A}$ و $t \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$(a^*)^* = a$$

$$(a+b)^* = a^* + b^*$$

$$(ta)^* = \bar{t}a^*$$

$$(ab)^* = b^*a^*$$

۲. جبر نرم‌دار $\mathscr{A}$ یک $*$-جبر نرم‌دار است هرگاه مجهز به یک برگشت پیوسته $*$ با شرط $\|a^*\| = \|a\|$ برای هر $a \in \mathscr{A}$ باشد.

۳. $*$-جبر باناخ $\mathscr{A}$ یک C^*-جبر است هرگاه برای هر $a \in \mathscr{A}$ ، $\|a^*a\| = \|a\|^۲$

مثال ۱-۲-۴. اگر X فضای هاسدورف فشرده موضعی باشد آن‌گاه $L^\infty(X)$ یک C^*-جبر خواهد بود.

تعریف ۱-۲-۵. **(ایده‌ال‌های یک جبر)**

زیر جبر I از جبر $\mathscr{A}$ را یک ایده‌ال راست (چپ) می‌نامیم هرگاه $I\mathscr{A} \subset I$ $(\mathscr{A}I \subset I)$.

تعریف ۱-۲-۶. (**جبر باناخ نرم‌دار**)

جبر $\mathscr{A}$ نرم‌دار است هرگاه دارای یک نرم باشد به گونه‌ای که برای هر $x,y \in \mathscr{A}$ ، $c \geq ۰$ وجود داشته باشد که

$$\|xy\| \leqslant c\|x\|\|y\|$$

در این حالت $\|.\|$ را یک نرم جبری می‌نامیم .
جبر نرم‌دار $\mathscr{A}$ یک جبر باناخ است هرگاه به عنوان یک فضای خطی نرم‌دار کامل باشد.

تعریف ۱-۲-۷. (**جبر باناخ یکدار**)

اگر جبر باناخ $\mathscr{A}$ دارای عضو همانی باشد ،$\mathscr{A}$ را جبر باناخ یکدار می‌نامیم.

مثال ۱-۲-۸. گیریم E یک مجموعه ،X یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ ، α عضوی از $\mathbb{F}$ و f و g نگاشت‌هایی از E به X باشند، $f+g$ و αf نگاشت‌هایی ازE به X هستند که با دستور زیر تعریف می‌شوند

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \qquad\qquad (\alpha f)(s) = \alpha f(s)$$

اگر X یک جبر باشد ضرب نقطه‌ای را با دستور زیر تعریف می‌کنیم :

$$(fg)(s) = f(s) + g(s) \qquad (s \in E)$$

تعریف ۱-۲-۹. (**گروه توپولوژیک**)

گیریم (G,τ) یک فضای توپولوژیک باشد (G یک گروه و τ توپولوژی روی آن باشد)، G را یک گروه توپولوژیک گوییم هرگاه G هاسدورف باشد و نگاشت‌های

$$: G \to G \qquad\qquad : G \times G \to G$$

$$x \to x^{-۱} \qquad\qquad (x,y) \to xy$$

پیوسته باشند.

تعریف ۱-۲-۱۰. (**فضای دوخطی و نرم روی آن**)

فضاهای نرم‌دار X وY وZ را روی میدان $\mathbb{F}$ در نظر می‌گیریم، نگاشت $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ را دو خطی گوییم هرگاه

۱. برای هر $y \in Y$ نگاشت $\phi(x,y) \quad x \longrightarrow$ خطی باشد،

۲. برای هر $x \in X$ نگاشت $\phi(x,y) \quad y \longrightarrow$ خطی باشد.

اگر $Z = \mathbb{F}$ ، ϕ را یک تابعک دوخطی یا فرم دوخطی می‌نامیم . نگاشت دوخطی

$$\phi : X \times Y \longrightarrow Z$$

را کراندار گوییم هرگاه $M \geq ۰$ ای اشد به‌طوریکه

$$\|\phi(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$$

نرم ϕ عبارتست از

$$\|\phi\| = sup\{\|\phi(x,y)\| : \quad \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱\}$$

مجموعه نگاشت‌های دوخطی از $X \times Y$ به Z را با نماد $BL(X,Y,Z)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۲-۱۱. **(همانی تقریبی)**
فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک جبر نرم‌دار با نرم $\|.\|$ باشد

۱. همانی تقریبی چپ (راست) $\mathscr{A}$ توری مانند (e_α) در $\mathscr{A}$ است که برای هر $\mathscr{A}$

$$\lim_{\alpha}(e_\alpha.a) = a \quad (\lim_{\alpha}(a.e_\alpha) = a)$$

۲. همانی تقریبی $\mathscr{A}$ توری مانند (e_α) در $\mathscr{A}$ است که همانی تقریبی چپ و راست باشد .
همانی تقریبی (e_α) کراندار است اگر

$$sup\|e_\alpha\| < \infty$$

۳. همانی تقریبی چپ (راست) ضعیف $\mathscr{A}$ توری مانند (e_α) در $\mathscr{A}$ است که برای هر $a\varepsilon\mathscr{A}$ ،

$$w - \lim_{\alpha}(e_\alpha.a) = a \quad (w - \lim_{\alpha}(a.e_\alpha) = a)$$

تعریف ۱-۲-۱۲. فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و E فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد می‌گوییم E یک $\mathscr{A}$-مدول چپ است هرگاه نگاشت دوخطی که

$$:\mathscr{A} \times E \longrightarrow E$$

$$(a,x) \longmapsto a.x$$

موجود باشد به‌طوری‌که

$$a.(b.x) = (a.b).x \qquad (a, b \in \mathscr{A}, x \in E)$$

به همین ترتیب E را یک $\mathscr{A}$-مدول راست می‌گوییم هرگاه نگاشت دوخطی

$$\begin{aligned} &: E \times \mathscr{A} \longrightarrow E \\ &(x, a) \longmapsto x.a \end{aligned}$$

موجود باشد به‌طوری‌که

$$(x.a).b = x.(a.b) \qquad (a, b \in \mathscr{A}, x \in E)$$

فضای برداری E را یک $\mathscr{A}$ -مدول دو طرفه یا به طور خلاصه $\mathscr{A}$-مدول گوییم هرگاه هم $\mathscr{A}$-مدول راست و هم $\mathscr{A}$-مدول چپ باشد.

فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک جبر باناخ باشد، فضای باناخ E را که یک $\mathscr{A}$-مدول چپ (راست) است یک باناخ $\mathscr{A}$-مدول چپ(راست) می‌نامیم هرگاه نگاشت دوخطی

$$\begin{aligned} &: \mathscr{A} \times E \longrightarrow E \\ &(a, x) \longmapsto a.x \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} &: E \times \mathscr{A} \longrightarrow E \\ &(x, a) \longmapsto x.a \end{aligned} \right)$$

پیوسته باشد یا $k > 0$ یی موجود باشد که برای هر $a \in \mathscr{A}$ و $x \in E$

$$\|a.x\| \leqslant k\|a\|\|x\| \qquad (\|x.a\| \leqslant k\|x\|\|a\|)$$

حال اگر E هم باناخ $\mathscr{A}$-مدول چپ و هم راست باشد گوییم E یک باناخ $\mathscr{A}$-مدول دو طرفه یا به اختصار یک باناخ $\mathscr{A}$-دومدول است.

تعریف ۱-۲-۱۳. (R-هم‌ریختی)

فرض کنیم M و N دو R-مدول باشند. تابع $\varphi : M \to N$ را R -هم‌ریختی می‌نامیم هرگاه

۱. برای هر $x, y \in M$ ،

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

۲. برای هر $x \in M$ وهر $r \in R$ ،

$$\varphi(rx) = r\varphi(x)$$

تعریف ۱-۲-۱۴. (دنباله‌های دقیق کوتاه شکافته شده)

فرض کنیم $M_0, \dots, M_n$ $(n \geqslant 2)$ R-مدول‌هایی دلخواه باشند .در این صورت دنباله

$$M_0 \xrightarrow{\varphi_1} M_1 \xrightarrow{\varphi_2} M_2 \to \dots \to M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} M_n$$

را، که دنباله‌ای از R-همریختی‌های $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ است، دنباله دقیق می‌نامیم هرگاه برای هر $2 \leqslant i \leqslant n$

$$\operatorname{Im} \varphi_{i-1} = Ker\varphi_i$$

فرض کنیم M ، N و K ، R-مدول‌های دلخواه باشند در این صورت اگر دنباله

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} K \to 0$$

دقیق باشد ، آن را دنباله دقیق کوتاه می‌گوییم.
دنباله دقیق کوتاه بالا شکافته شده است اگر در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند:

۱. R-همریختی‌ای مانند $\varphi' : N \to M$ موجود باشد که

$$\varphi'\varphi = I_M$$

۲. دنباله دقیق بالا با دنباله دقیق کوتاه زیر یکریخت باشد

$$0 \to M \xrightarrow{\lambda_1} M \coprod K \xrightarrow{p_2} K \to 0$$

۳. R-همریختی‌ای مانند $\psi' : K \to N$ موجود باشد که

$$\psi\psi' = I_K$$

تعریف ۱-۲-۱۵. (ضرب‌های آرنز[1])

فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک جبر باناخ باشد روی $\mathscr{A}^{**}$ دو ضرب زیر را تعریف می‌کنیم:
به ازای هر $F, G \in \mathscr{A}^{**}, f \in \mathscr{A}^*, a, b\varepsilon\mathscr{A}$

۱. $\langle F\Box G, f\rangle = \langle F, G.f\rangle$ که در آن

$$\langle G.f, a\rangle = \langle G, f.a\rangle \qquad \langle f.a, b\rangle = \langle f, a.b\rangle$$

[1] Arens products

۲. $\langle F\Diamond G, f\rangle = \langle G, f.F\rangle$ که در آن

$$\langle f.G, a\rangle = \langle G, a.f\rangle \qquad \langle a.f, b\rangle = \langle f, b.a\rangle$$

آن‌گاه ضرب $F\Box G$ و $F\Diamond G$ را به ترتیب ضرب اول آرنز و ضرب دوم آرنز می‌نامیم.

وقتی $F\Box G = F\Diamond G$، آن‌گاه $\mathscr{A}$ **منظم آرنز** است.

تعریف ۱-۲-۱۶. (ضرب تانسوری فضاها[۱])

۱. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ روی میدان $\mathbb{F}$ و X^* و Y^* به ترتیب فضاهای دوگان آن‌ها باشند ، برای $x \in X$ و $y \in Y$ ، $x\otimes y$ را به عنوان عضوی از $BL(X^*, Y^*, \mathbb{F})$ درنظر می‌گیریم. $BL(X^*, Y^*, \mathbb{F})$ فضای تمام نگاشت‌های دوخطی کراندار از $X^* \times Y^*$ به توی $\mathbb{F}$ می‌باشد که به ازای هر f متعلق به X^* و هر g متعلق به Y^* به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(x\otimes y)(f, g) := f(x)g(y)$$

حاصل‌ضرب تانسوری X و Y را با $X\otimes Y$ نمایش می‌دهیم و آن‌را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X\otimes Y = LS\{x\otimes y : \quad x \in X, y \in Y\}$$

یعنی $X\otimes Y$ زیر فضای خطی تولید شده در $BL(X^*, Y^*, \mathbb{F})$ به وسیله اعضای $x\otimes y$ است که x متعلق به X و y متعلق به Y می‌باشد.

۲. نرم تانسوری تصویری روی $X\otimes Y$ را که با P نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(u) = inf\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i, x_i \in X, y_i \in Y\}$$

توجه کنیم که P یک نرم ضربی روی $X\otimes Y$ است یعنی

$$P(x\otimes y) = \|x\|\|y\| \qquad (x \in X, y \in Y)$$

۳. منظور از حاصل‌ضرب تانسوری تصویری X و Y که با $X\hat{\otimes} Y$ نمایش داده می‌شود کامل شده‌ی $X\otimes Y$ با نرم تصویری در $BL(X^*, Y^*, \mathbb{F})$ است.

گزاره ۱-۲-۱۷. *$X\hat{\otimes} Y$ با ضرب و نرم P یک جبر باناخ است.*

---

[۱] Tensor product