

به نام خدای بخشنده مهربان

۱۱۵۹۴



دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک (ذرات بنیادی)

بررسی نیروی بین سالیتون های توپولوژیک

توسط

فرامرز رحمانی

استاد راهنما:

دکتر عزیزالله عزیزی

آبان ماه ۱۳۸۷

۱۱۵۲۹۳

استاد اطلاعات درک می بین
نسبت در آن

۱۳۸۸ / ۲ / ۲۳

به نام خدا

بررسی نیروی بین سالیتون های توپولوژیک

به وسیله ی:

فرامرز رحمانی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی
لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته :

فیزیک

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه عالی

دکتر عزیز الله عزیزی، استادیار بخش فیزیک (رئیس کمیته).....

دکتر نعمت الله ریاضی، استادیار بخش فیزیک.....

دکتر سید محمد زبرجد، استادیار بخش فیزیک.....

آبان ماه ۱۳۸۷

تقدیم به:

خانواده و همسر مهربانم

سپاسگزاری

از دکتر عزیزی به خاطر زحمات فراوان

چکیده

بررسی نیروی بین سالیتون های توپولوژیک

توسط:

فرامرز رحمانی

هدف ما در این پایان نامه بررسی نیروی بین سالیتون های سیستم ساین گوردون می باشد. در مطالعه سالیتون های توپولوژیک پی می بریم که یک نیروی داخلی جاذبه یا دافعه بین این سالیتون ها وجود دارد. این نیرو بر اساس مطالعات انجام گرفته و مشاهدات حاصل از محاسبات عددی، به عواملی چون سرعت سالیتون ها و فاصله بین آنها و علامت بار توپولوژیکی آنها بستگی دارد. در بعضی کتاب ها ثابت شده است که در فواصل دور سالیتون های دارای علامت بار توپولوژیکی یکسان، همدیگر را می رانند و آنهایی که نا همنامند، یگدیگر را می ربایند. در این پایان نامه نشان داده ایم که این اتفاق در فواصل دور می افتد و در همه فواصل و سرعت ها معتبر نیست. با توجه به اینکه سالیتون ها اجسام نقطه ای نیستند (گسترده اند)، این نیرو نباید شکل ساده ای داشته باشد. برای رسیدن به یک رابطه سرراست مجبور شدیم از تقریب خاصی استفاده کنیم. در این پایان نامه برای رسیدن به رابطه نیرو به دور از مشکلات ریاضی حاد، با سالیتون مانند یک ذره برخورد کردیم اما در ابتدا میزان درستی رفتار ذره ای را آزمودیم و هنگامی که به درستی آن تا حد قابل قبولی پی بردیم، بررسی نیرو از این طریق را ادامه دادیم.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	۱- مقدمه.....
۴	۲- سالیتون‌ها.....
۴	۲-۱ امواج غیر خطی.....
۶	۲-۲ نظریه میدانهای کلاسیک.....
۱۰	۲-۳ برخی امواج سالیتاری در دو بعد.....
۱۸	۲-۴ روش بوگومولنی برای بدست آوردن انرژی کینک.....
۱۹	۲-۵ شاخص‌های توپولوژیکی.....
۲۲	۳- سالیتون‌های سیستم ساین گوردون.....
۲۲	۳-۱ معرفی سیستم.....
۲۸	۳-۲ روش جداسازی متغیرها در حل معادله ساین گوردون.....
۲۸	۳-۲-۱ شرح اولیه.....
۳۰	۳-۲-۲ جواب تک سالیتونی.....
۳۰	۳-۲-۳ جواب کینک - کینک.....
۳۱	۳-۲-۴ جواب کینک - آنتی کینک نامقید.....
۳۲	۳-۲-۵ جواب کینک - آنتی کینک مقید (تپنده).....

۳۳	۴- بر همکنش بین سالیتون‌ها و بررسی نیروها
۳۳	۴-۱ توضیحات مقدماتی
۳۸	۴-۲ بررسی نیروی برهمکنشی کینک- کینک
۴۵	۴-۳ بررسی نیروی بر هم کنشی کینک- آنتی کینک
۵۳	۴-۴ بررسی نیروی بین کینک آنتی کینک مقید(تپنده)
۶۱	۵- نتیجه‌گیری
۶۳	منابع

فهرست جدولها

صفحه	عنوان
۳۷	۱-۴ تفاوت سرعت قله و دو نقطه مجاور در برخورد کینک- آنتی کینک با سرعت اولیه صفر..
۳۸	۲-۴ تفاوت سرعت قله و دو نقطه مجاور در برخورد کینک- آنتی کینک با سرعت اولیه $0/5$

فهرست شکلها

صفحه	عنوان
۱۳	۱-۲ پتانسیل با یک کمینه، جواب سالیتونى نمى دهد.....
۱۳	۲-۲ پتانسیلی که دارای سه کمینه است.....
۱۶	۳-۲ جواب کینک نظریه ϕ^4
۱۶	۴-۲ چگالی انرژی کینک نظریه ϕ^4
۲۵	۱-۳ سالیتون سیستم ساین گوردون.....
۲۶	۲-۳ برهمنهی کینک - آنتی کینک سیستم ساین- گوردون.....
۲۷	۳-۳ برهمنهی کینک - کینک ساین گوردون.....
۳۲	۴-۳ شکل یک تپنده با زمان تغییر می کند.....
۳۵	۱-۴ دافعه بین دو کینک دور از هم با سرعت های اولیه صفر.....
۳۵	۲-۴ جاذبه بین کینک - آنتی کینک دور از هم با سرعت های اولیه صفر.....
۳۷	۳-۴ مکان نقطه عطف و نقطه مجاورش در برخورد کینک- کینک.....
۳۹	۴-۴ چگالی انرژی کینک ساین- گوردون که با سرعت ثابت پیش می رود.....
۴۰	۵-۴ منحنی مکان قله سالیتون در برخورد آهسته با سرعت ثابت پیش می رود.....
۴۱	۶-۴ منحنی سرعت سالیتون در برخورد آهسته کینک ها.....
۴۱	۷-۴ نمودار شتاب بر حسب زمان در برخورد کم انرژی کینک ها.....
۴۲	۸-۴ نیروی دافعه بین دو کینک آهسته بر حسب زمان.....
۴۲	۹-۴ منحنی نیرو بر حسب مکان بین کینک های آهسته.....

- ۴-۱۰ نمودار مکان قله سالیتون در برخورد سریع با سرعت اولیه ۰/۶ ۴۳
- ۴-۱۱ نمودار سرعت در برخورد سالیتون سریع سرعت اولیه ۰/۶ ۴۴
- ۴-۱۲ نمودار شتاب بر حسب زمان در برخورد پزانرژی کینکها ۴۴
- ۴-۱۳ نمودار نیروی بین دو سالیتون سریع بر حسب زمان ۴۵
- ۴-۱۴ نمودار نیروی بین دو سالیتون سریع بر حسب فاصله قله تا مبدأ ۴۶
- ۴-۱۵ نمودار مکان سالیتون در برخورد کینک- آنتی کینک با سرعت اولیه صفر ۴۷
- ۴-۱۶ نمودار سرعت سالیتون در برخورد کینک - آنتی کینک با سرعت اولیه صفر ۴۸
- ۴-۱۷ نیرو بر حسب زمان برای کینک - آنتی کینک با سرعت اولیه صفر ۴۸
- ۴-۱۸ نیرو بر حسب مکان برای کینک- آنتی کینک با سرعت اولیه صفر ۴۹
- ۴-۱۹ انرژی پتانسیل سالیتون در برخورد کینک- آنتی کینک با سرعت اولیه صفر ۵۰
- ۴-۲۰ نمودار نیرو بر حسب مکان در کینک - آنتی کینک با سرعت اولیه ۰/۲ ۵۱
- ۴-۲۱ مکان سالیتون در کینک - آنتی کینک سریع با سرعت اولیه ۰/۹ ۵۲
- ۴-۲۲ نمودار سرعت سالیتون در کینک- آنتی کینک سریع ۵۲
- ۴-۲۳ شتاب بر حسب زمان در کینک- آنتی کینک سریع ۵۳
- ۴-۲۴ شتاب بر حسب مکان در کینک- آنتی کینک سریع ۵۴
- ۴-۲۵ نیروی دافعه بر حسب زمان در کینک - آنتی کینک سریع ۵۴
- ۴-۲۶ نیروی دافعه بر حسب مکان در کینک - آنتی کینک سریع ۵۵
- ۴-۲۷ نمودار مکان برای تپنده آهسته با پارامتر ۰/۲ ۵۶
- ۴-۲۸ نمودار سرعت سالیتون در تپنده آهسته ۵۶
- ۴-۲۹ نمودار نیرو و بر حسب زمان در تپنده آهسته ۵۷
- ۴-۳۰ نمودار نیرو بر حسب مکان در تپنده آهسته ۵۸
- ۴-۳۱ نمودار مکان سالیتون در تپنده سریع با سرعت اولیه ۰/۹۹ ۵۸

۳۲-۴ نمودار سرت تپنده سریع بر حسب زمان ۵۹

۳۳-۴ نمودار نیروی بر حسب زمان در تپنده سریع ۶۰

۳۴-۴ نمودار نیروی بر حسب مکان در تپنده سریع ۶۰

فصل ۱

مقدمه

سالیتون‌ها جواب کلاسیک معادله موج غیرخطی هستند که علیرغم حضور در محیط‌های غیر خطی و پاشنده^۱، بدون تغییر در شکل و سرعت، حرکت می‌کنند و حتی گاهی پس از برخورد نیز شکل و سرعت اولیه‌شان نیز حفظ می‌شود. بحث سالیتون‌ها به طور دقیقتر در حوزه مباحث میدان‌ها چه کلاسیکی و یا کوانتومی قرار می‌گیرد. گوناگونی سالیتون‌ها در واقع به پتانسیل‌های میدان‌های ایجادکننده آن سالیتون‌ها برمی‌گردد [۱ و ۵ و ۶]. سالیتون‌ها کاربردهای فراوانی در فیزیک ماده چگال و اپتیک دارند. همچنین در فیزیک نظری و ذرات بنیادی نیز حایز اهمیت می‌باشند.

سالیتون‌ها موجوداتی هستند که رفتار و ویژگی‌های خاصی دارند. به عنوان مثال دارای انرژی محدود و چگالی انرژی جایگزیده هستند. یک سالیتون تنها، با سرعتی یکنواخت بدون هیچگونه تغییرشکلی در فضا پیش می‌رود. در برخورد بین دو سالیتون شکل و سرعت هرکدام از آنها پس از برخورد تغییر نمی‌کند و تنها تغییر در فاز امواج رخ می‌دهد که نشان از برهمکنش

^۱ dispersive

بین آنها دارد. در حالی که در امواج خطی که با آنها بیشتر آشنا هستیم، امواج پس از برهم‌نهی بدون اثری بر همدیگر از هم جدا می‌شوند.

براساس مطالعات انجام شده و مشاهدات حاصل از محاسبات عددی به این نتیجه رسیده ایم که سالیتون‌های توپولوژیک در حین برهم‌کنش، نیرویی که به فاصله، سرعت و بار توپولوژیکی آنها بستگی دارد، به هم وارد می‌کنند و این برای ما انگیزه‌ای شده است که بتوانیم این نیرو را بررسی کرده و روابطی برای آن هرچند کلی نباشد، بدست آوریم. در راه رسیدن به هدف اصلی یعنی نیروی بین سالیتون‌ها، سینماتیک حرکت آنها یعنی مکان، سرعت و شتاب سالیتون‌های برهم‌کنش‌کننده را نیز بررسی می‌کنیم.

سالیتون‌ها با وجود اینکه امواجی غیر خطی هستند، اما در حین برخورد رفتار ذره‌ای از خود نشان می‌دهند. یعنی در حین برخورد، انرژی و تکانه با یکدیگر تبادل می‌کنند. به نظر می‌رسد غیر خطی بودن با رفتار ذره‌ای در ارتباط است. تغییرات تکانه نسبت به زمان می‌تواند یکی از راه‌های محاسبه نیروی در حین برخورد باشد. البته محاسبه انرژی و تکانه برای سالیتون‌ها به سادگی محاسبه این کمیت‌ها برای ذرات نیست. بلکه به میدان تولیدکننده این موجودات ربط پیدا می‌کند. بررسی نیروی بین سالیتون‌ها با توجه به ماهیت غیر خطی بودن معادلات، جواب‌های پیچیده آنها، کار ساده‌ای نیست و در بسیاری از جاها برای بدست آوردن رابطه‌ای سراسر است، مجبوریم از تقریب‌های زیادی استفاده کنیم.

اصولاً معادلات غیر خطی جواب‌های دقیق و رفتار قابل پیش‌بینی ندارند. مثلاً هنگامی که دو سالیتون دور از هم باشند، مانند دو موج خطی به سادگی با هم جمع می‌شوند و حاصل جمع نیز جواب معادله می‌باشد [۵].

در واقع در فواصل دور حاصل جمع، همان برهم‌نهی دم‌هایشان است اما هرچه به هم نزدیکتر می‌شوند، به علت آشکارتر شدن ماهیت غیر خطی امواج، حاصل جمع دو موج، الزاماً جواب معادله غیر خطی نیست.

فصل دوم را با معرفی امواج غیرخطی که دارای جواب منزوی هستند، آغاز می کنیم. معادلات ریاضی مربوط به سالیتون ها به خصوص سالیتون های ساین گوردون که تمرکز اصلی ما بر روی آنهاست، را بیان می کنیم. تعاریف لازم را انجام داده و موضوع را تشریح می کنیم. در مورد جواب های دو سالیتونی (برهمکنشی) صحبت کرده اما روش بدست آوردن آنها را در فصل سوم بررسی می کنیم.

در فصل سوم، سیستم ساین گوردون را با تفصیل بیشتر بررسی کرده و جواب های دو سالیتونی را با استفاده از روش جداسازی متغیرها، بدست می آوریم. در واقع اینها جواب های برهمکنشی هستند، که می خواهیم نیروی بین آنها را بررسی کنیم.

در فصل چهارم متن اصلی مربوط به کاری که دنبال آن هستیم را بیان کرده و روش بررسی موضوع را ارائه می دهیم. روابط لازم را بدست آورده و نتایج حاصل را بیان می کنیم. فصل پنجم مربوط به نتیجه گیری از کارهای انجام شده در این پایان نامه می باشد.

فصل ۲

سالیتون ها

۱-۲ امواج غیر خطی

نام امواج سالیتونی و سالیتون ها به جواب های ویژه معادلات غیرخطی ابرمی گردد. ساده ترین معادله موج نسبیته را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned}\square\phi &= \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi \\ &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t) = 0\end{aligned}\quad (1-2)$$

که $\phi(x,t)$ یک میدان اسکالر حقیقی، در $(1+1)$ بعد است و c سرعت نور می باشد. این معادله خطی و غیر پاشنده می باشد.

می توان یک سری امواج هم فرکانس را به گونه ای جمع کرد که یک موج جایگزیده^۲ را

non-linear^۱
localized^۲

تشکیل دهند و با سرعت ثابت c پیش بروند، بدون اینکه تغییری در شکل بسته موج حاصل شود. این در واقع از این حقیقت ناشی می شود که امواج تخت $\cos(kx \pm ct)$ و $\sin(kx \pm ct)$ با $\omega = kc$ یک مجموعه کامل از جواب های معادله (۲-۱) را تشکیل می دهند.

هر تابع خوشرفتار $f(x \pm ct)$ را می توان به صورت معادله زیر بسط داد.

$$f(x - ct) = \int dk [a_1(k) \cos(kx - \omega t) + a_2(k) \sin(kx - \omega t)] \quad (2-2)$$

چون تمام مولفه های موج تخت با سرعت یکسان $c = \frac{\omega}{k}$ پیش می روند و هیچکدام از دیگری سبقت نمی گیرد، بنابراین شکل $f(x - ct)$ در تمام زمانها ثابت می ماند.

در معادلات خطی، حاصل جمع n جواب از یک معادله باز هم یک جواب معادله موج اصلی است. مثلا اگر دو جواب داشته باشیم که در $(t \rightarrow -\infty)$ دور از هم باشند، و در زمان t جمع شوند، حاصل جمع نیز جواب معادله است؛ سپس در $(t \rightarrow \infty)$ بدون اینکه اثری بر هم گذاشته باشند، کاملا از هم جدا شده اند.

افزودن یک جزاضافی به معادله (۲-۱) ویژگی های فوق را هر چند معادله خطی بماند، برهم می زند. معادله کلاین گوردون^۲ را در دو بعد در نظر بگیریم:

$$(\square + m^2 c^2) \phi(x, t) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 c^2 \right) \phi(x, t) = 0 \quad (3-2)$$

این معادله هنوز خطی است و امواج تخت $\cos(kx - \omega t)$ و $\sin(kx - \omega t)$ هنوز یک مجموعه کامل از جوابها را تشکیل می دهند. باقرار دادن یکی از جواب ها در این معادله، نتیجه می گیریم که $\omega^2 = k^2 c^2 + m^2 c^2$ بنابراین امواج باطول موجهای مختلف، با سرعت های مختلف $\frac{\omega(k)}{k}$ حرکت می کنند و موج دچار پراکندگی می شود.

یک جز غیر خطی ساده را به معادله (۲-۱) می افزاییم. خواهیم داشت

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi^3 = 0 \quad (4-2)$$

^۲ Klein-Gordon

می توان با محاسبات تقریبی یا عددی، خود را متقاعد کرد که یک پهنه موج دلخواه که جواب این معادله است، با گذر زمان پهن خواهد شد و شکل اولیه خود را حفظ نخواهد کرد. آنچه در مورد سالیتون ها برای ما جالب است این حقیقت می باشد که با توجه به اینکه جواب های امواج غیرخطی هستند، با گذشت زمان شکل و سرعت آنها تغییر نمی کند.

از این پس با مفهوم چگالی انرژی این جواب ها سروکار خواهیم داشت تا خود میدانها قبل از اینکه وارد بحث امواج غیرخطی و سالیتون ها شویم، بهتراست اطلاعاتی در مورد نظریه میدانها کسب کنیم، تا ابزار بهتری برای بررسی قضیه، داشته باشیم [۱ و ۷].

۲-۲ نظریه میدانهای کلاسیک

ما یک سیستم میدان با مولفه های $\phi_r(x)$ داریم که $r = 1, \dots, N$ و شاخص r ، ممکن است مولفه های همان میدان را برچسب بزند یا مربوط به میدان های مستقل مختلفی باشد.

ما خود را به آن نظریه هایی محدود می کنیم که می توانند از اصل کمترین کنش، استخراج شوند. چگالی لاگرانژی زیر را در نظر می گیریم:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \quad (5-2)$$

که در آن $\phi_{r,\alpha} = \partial_\alpha \phi_r = \partial \phi_r / \partial x^\alpha$. ارتباط بین لاگرانژی سیستم و چگالی لاگرانژی آن به صورت $L(t) = \int \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) d^4x$ می باشد. ما انتگرال کنش $S(\Omega)$ را برای ناحیه دلخواه Ω از پیوستار چهار بعدی تعریف می کنیم.

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) d^4x \quad (6-2)$$

برای یک ناحیه دلخواه Ω و ردش میدان را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta \phi_r(x) \quad (7-2)$$

که در آن $\delta \phi_r(x) = (\partial \phi_r / \partial x^\alpha) \delta x^\alpha$ و این و ردش بر روی سطح $\Gamma(\Omega)$ که ناحیه Ω را احاطه

کرده است، صفر می شود.

$$\delta\phi_r(x) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma(\Omega) \quad (8-2)$$

برای ناحیه دلخواه Ω و وردش های (۲-۷) و (۲-۸)، کنش (۲-۶) دارای یک مقدار پایسته است یعنی:

$$\delta S(\Omega) = 0 \quad (9-2)$$

پس از انجام محاسبات، به معادلات اویلر لاگرانژ می رسم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \right) = 0, \quad r = 1, \dots, N \quad (10-2)$$

این هارامعادلات حرکت میدان می گویند. هامیلتونی چنین سیستم پیوسته ای به صورت زیر است:

$$H = \int \mathcal{H}(x) d^3x \quad (11-2)$$

وچگالی هامیلتونی به فرم معادله زیر است

$$\mathcal{H}(x) = \pi_r(x) \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial t} - \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \quad (12-2)$$

بطوریکه $\pi_r(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}_r$

یکی از کمیات مهم در نظریه میدانها تانسور انرژی-تنگانه است که به صورت رابطه

(۲-۱۳) تعریف می شود:

$$\tau^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\beta} - \mathcal{L} g^{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \quad (13-2)$$

بطوریکه

$$\tau^{00} = \mathcal{H}(x) \quad \tau^{0i} = \pi_r(x) \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14-2)$$

مولفه i ام تکانه میدان p^i به صورت زیر تعریف می شود:

$$p^i = \int \tau^{0i} d^3x = \int d^3x \pi_r(x) \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x_i} \quad (15-2)$$

بنابر این می توان τ^{0i} را به عنوان چگالی تکانه میدان در جهت i ام، قلمداد کرد [۳].

اکنون که اطلاعاتی راجع به نظریه میدان های کلاسیک، کسب کرده ایم، دوباره به بحث امواج غیر خطی و سالیتون هابرمی گردیم و آنها را با دید نظریه میدان، بررسی می کنیم. ما خود را به آن دسته از معادلات میدان محدود می کنیم که، چگالی انرژی $\varepsilon(\vec{x}, t)$ آنها، تابعی از میدان های $\phi_i(x, t)$ باشد؛ و انتگرال فضایی آن که همان انرژی کل و پایسته است، به صورت تابعی $E[\phi_i]^4$ می باشد. از آنجایی که سیستم های فیزیکی، از یک کمینه انرژی دارند، می توان بدون از دست دادن کلیت، انرژی حداقل را برابر با صفر بگیریم.

از این پس صفت « جایگزیده » را برای آن دسته از جواب های معادلات میدان در نظر می گیریم که چگالی انرژی آنها $\varepsilon(x, t)$ ، در هر زمان محدود t ، در فضا جایگزیده باشد. یعنی در یک بازه مکانی محدود، مقدار محدودی داشته باشد و در سایر نقاط، با سرعتی مناسب به صفر میل کند تا انتگرال فضایی آن مقدار محدود داشته باشد (انتگرال پذیر باشد). به عنوان مثال انرژی مرتبط با معادله (۲-۴) عبارتست از:

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \phi^4 \right] \quad (16-2)$$

که بوسیله $\phi(x, t) = 0$ ، کمینه شده است. جواب های جایگزیده این سیستم باید به گونه ای باشد که وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ آنگاه در هر زمان دلخواه t ، $\phi(x, t) = 0$. همچنین مشتقات $(\partial\phi/\partial x)$ و $(\partial\phi/\partial t)$ ، در این حد باید صفر شوند تا انرژی محدود، داشته باشیم. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \phi(\phi^2 - 1) = 0 \quad (17-2)$$

functional ^۲