به نام خدای بخشندهٔ مهربان

دانشکدهٔ علوم پایه

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ فیزیک (ذرات بنیادی)

بررسی نیروی بین سالیتون های توپولوژیک

توسط

فرامرز رحمانی

استاد راهنما:

دکترعزیز الله عزیزی

آبان ماه ۱۳۸۷

به نام خدا

بررسی نیروی بین سالیتون های توپولوژیک

به وسیله ی:

فرامرز رحمانی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته :

فیزیک

ازدانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه عالی

دکتر عزیز الله عزیزی، استادیار بخش فیزیک (رئیس کمیته)..

دکتر نعمت الله ریاضی، استاد بخش فیزیک..

دکتر سید محمد زبرجد، استادیار بخش فیزیک..

آبان ماه ۱۳۸۷

تقدیم به:

خانواده و همسر مهربانم

سپاسگزاری

از دکتر عزیزی به خاطر زحمات فراوان

چکیده

بررسی نیروی بین سالیتون های توپولوژیک

توسط:

فرامرز رحمانی

هدف ما در این پایان نامه بررسی نیروی بین سالیتون های سیستم ساین گوردون می باشد. در مطالعه سالیتون های توپولوژیک پی می بریم که یک نیروی داخلی جاذبه یا دافعه بین این سالیتون ها وجود دارد. این نیرو بر اساس مطالعات انجام گرفته و مشاهدات حاصل از محاسبات عددی، به عواملی چون سرعت سالیتون ها و فاصله بین آنها و علامت بار توپولوژیکی آنها بستگی دارد. در بعضی کتاب ها ثا بت شده است که در فواصل دور سالیتون های دارای علامت بار توپولوژیکی یکسان، همدیگر را می رانند و آنهایی که نا همنامند، یگدیگر را می ربایند. در این پایان نامه نشان داده ایم که این اتفاق در فواصل دور می افتد و در همه فواصل و سرعت ها معتبر نیست. با توجه به اینکه سالیتون ها ا جسام نقطه ای نیستند (گسترده اند)، این نیرو نباید شکل ساده ای داشته باشد. برای رسیدن به یک رابطه سرراست مجبور شدیم از تقریب خاصی استفاده کنیم. در این پایان نامه برای رسیدن به رابطه نیرو به دور از مشکلات ریاضی حاد، با سالیتون مانند یک ذره برخورد کردیم اما در ابتدا میزان درستی رفتارذره ای را آزمودیم و هنگامی که به درستی آن تا حد قابل قبولی پی بردیم، بررسی نیرو ازاین طریق را ادامه دادیم.

فهرست مطالب

فهرست جدولها

فهرست شکلها

عنوان صفحه

فصل ۱

مقدمه

سالیتون ها جواب کلاسیک معادله موج غیرخطی هستند که علیرغم حضور در محیط های غیر خطی و پاشنده[1]، بدون تغییر در شکل و سرعت، حرکت می کنند و حتی گاهی پس از برخورد نیز شکل و سرعت اولیه شان نیز حفظ می شود. بحث سالیتون هابه طور دقیقتر در حوزه مباحث میدان ها چه کلاسیکی و یا کوانتومی قرار می گیرد. گوناگونی سالیتون ها در واقع به پتانسیل های میدان های ایجاد کننده آن سالیتون ها برمی گردد [۱ و ۵ و ٦]. سالیتون ها کاربردهای فراوانی در فیزیک ماده چگال و اپتیک دارند.همچنین در فیزیک نظری و ذرات بنیادی نیز حایز اهمیت می باشند.

سالیتون ها موجوداتی هستند که رفتار و ویژگی های خاصی دارند.به عنوان مثال دارای انرژی محدود و چگالی انرژی جایگزیده هستند. یک سالیتون تنها، با سرعتی یکنواخت بدون هیچگونه تغییرشکلی در فضا پیش می رود. در برخورد بین دو سالیتون شکل و سرعت هرکدام از آنها پس از برخورد تغییر نمی کند و تنها تغییر در فازامواج رخ می دهد که نشان از برهمکنش

[1] dispersive

بین آنها دارد. در حالی که در امواج خطی که با آنها بیشتر آشنا هستیم، امواج پس از برهمنهی بدون اثری بر همدیگراز هم جدا می شوند.

براساس مطالعات انجام شده و مشاهدات حاصل از محاسبات عددی به این نتیجه رسیده ایم که سالیتون های توپولوژیک در حین بر همکنش، نیرویی که به فاصله، سرعت و بار توپولوژیکی آنها بستگی دارد، به هم وارد می کنند واین برای ما انگیزه‌ای شده است که بتوانیم این نیرو را بررسی کرده و روابطی برای آن هرچند کلی نباشد، بدست آوریم. در راه رسیدن به هدف اصلی یعنی نیروی بین سالیتون ها، سینماتیک حرکت آنهایعنی مکان، سرعت و شتاب سالیتون های برهمکنش کننده را نیز بررسی می کنیم.

سالیتون هابا وجود اینکه امواجی غیر خطی هستند، اما در حین برخورد رفتار ذره‌ای از خود نشان می دهند. یعنی درحین برخورد، انرژی و تکانه با یکدیگر تبادل می کنند. به نظر می رسد غیر خطی بودن با رفتار ذره‌ای در ارتباط است. تغییرات تکانه نسبت به زمان می تواند یکی از راههای محاسبه نیروی در حین برخورد باشد. البته محاسبه انرژی وتکانه برای سالیتون ها به سادگی محاسبه این کمیت ها برای ذرات نیست.بلکه به میدان تولید کننده این موجودات ربط پیدا می کند.بررسی نیروی بین سالیتون هابا توجه به ماهیت غیر خطی بودن معادلات،وجواب های پیچیده آنها،کار ساده‌ای نیست و در بسیاری از جاها برای بدست آوردن رابطه‌ای سرراست، مجبوریم از تقریب های زیادی استفاده کنیم.

اصولا معادلات غیر خطی جواب های دقیق و رفتار قابل پیش بینی ندارند. مثلا هنگامی که دو سالیتون دور از هم باشند، مانند دو موج خطی به سادگی با هم جمع می شوند و حاصل جمع نیز جواب معادله می باشد[۵].

در واقع در فواصل دور حاصل جمع، همان برهمنهی دم هایشان است اماهرچه به هم نزدیکتر می شوند، به علت آشکارتر شدن ماهیت غیر خطی امواج، حاصلجمع دو موج، الزاما جواب معادله غیرخطی نیست.

فصل دوم رابامعرفی امواج غیرخطیی که دارای جواب منزوی[۲] هستند، آغاز می کنیم. معادلات ریاضی مربوط به سالیتون ها به خصوص سالیتون های ساین گوردون که تمرکز اصلی ما برروی آنهااست، را بیان می کنیم. تعاریف لازم را انجام داده وموضوع را تشریح می کنیم.در مورد جواب های دوسالیتونی (برهمکنشی) صحبت کرده‌اما روش بدست آوردن آنها را درفصل سوم بررسی می کنیم.

درفصل سوم، سیستم ساین گوردون را با تفصیل بیشتر بررسی کرده و جواب های دو سالیتونی را با ا ستفاده از روش جداسازی متغیرها، بدست می‌آوریم . در واقع اینها جواب های برهمکنشی هستند، که می خواهیم نیروی بین آنها را بررسی کنیم.

در فصل چهارم متن اصلی مربوط به کاری که دنبال آن هستیم را بیان کرده و روش بررسی موضوع را ا رایه می دهیم. روابط لازم را بدست آورده و نتایج حاصل را بیان می کنیم.

فصل پنجم مربوط به نتیجه گیری از کارهای انجام شده در این پایان نامه می باشد.

[۲] solitary

فصل ۲

سالیتون ها

۲—۱ امواج غیر خطی

نام امواج سالیتونی و سالیتون هابه جواب های ویژه معادلات غیرخطی[۱] برمی گردد.ساده ترین معادله موج نسبیتی را می توان به صورت زیر درنظر گرفت.

$$\begin{aligned}\Box\phi &= \partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi \\ &= \left(\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} - \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right)\phi(x,t) = 0 \qquad (۱-۲)\end{aligned}$$

که $\phi(x,t)$، یک میدان اسکالر حقیقی، در(۱ + ۱) بعد است و c سرعت نور می باشد. این معادله خطی و غیر پاشنده می باشد.

می توان یک سری امواج هم فرکانس را به گونه‌ای جمع کرد که یک موج جایگزیده[۲] را

[۱] non-linear
[۲] localized

تشکیل دهند و با سرعت ثابت c پیش بروند، بدون اینکه تغییری در شکل بسته موج حاصل شود. این در واقع از این حقیقت ناشی می شود که امواج تخت $\cos(kx \pm ct)$ و $\sin(kx \pm ct)$ با $\omega = kc$ یک مجموعه کامل از جواب های معادله (۱−۲) را تشکیل می دهند.

هر تابع خوشرفتار $f(x \pm ct)$ را می توان به صورت معادله زیر بسط داد.

$$f(x-ct) = \int dk[a_1(k)\cos(kx-\omega t) + a_2(k)\sin(kx-\omega t)] \qquad (۲-۲)$$

چون تمام مولفه های موج تخت با سرعت یکسان $c = \frac{\omega}{k}$ پیش می روند و هیچکدام ازدیگری سبقت نمی گیرد، بنابر این شکل $f(x-ct)$ در تمام زمانها ثابت می ماند.

در معادلات خطی، حاصل جمع n جواب از یک معادله باز هم یک جواب معادله موج اصلی است. مثلا اگر دو جواب داشته باشیم که در $(t \to -\infty)$ دور از هم باشند، و در زمان t جمع شوند، حاصل جمع نیز جواب معادله‌است؛ سپس در $(t \to \infty)$ بدون اینکه اثری بر هم گذاشته باشند، کاملا از هم جدا شده‌اند.

افزودن یک جزاضافی به معادله (۱−۲) ویژگی های فوق را هر چند معادله خطی بماند، برهم می زند. معادله کلاین گوردون[۳] را در دو بعد درنظر بگیریم :

$$(\Box + m^2c^2)\phi(x,t) = (\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2c^2)\phi(x,t) = 0 \qquad (۳-۲)$$

این معادله هنوز خطی است و امواج تخت $\cos(kx-\omega t)$ و $\sin(kx-\omega t)$ هنوز یک مجموعه کامل از جوابها را تشکیل می دهند. باقرار دادن یکی از جواب ها در این معادله، نتیجه می گیریم که $\omega^2 = k^2c^2 + m^2c^2$ بنابراین امواج باطول موجهای مختلف، باسرعت های مختلف $\frac{\omega(k)}{k}$ حرکت می کنند و موج دچار پراکندگی می شود.

یک جزء غیر خطی ساده را به معادله (۱−۲) می افزاییم. خواهیم داشت

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \phi^3 = 0 \qquad (۴-۲)$$

---

[۳] Klein-Gordon

می توان بامحاسبات تقریبی یا عددی، خود را متقاعد کرد که یک بسته موج دلخواه که جواب این معادله است، باگذر زمان پهن خواهد شد و شکل اولیه خود را حفظ نخواهد کرد. آنچه در مورد سالیتون ها برای ما جالب است این حقیقت می باشد که با توجه به اینکه جواب های امواج غیرخطی هستند، باگذشت زمان شکل و سرعت آنها تغییر نمی کند.

از این پس با مفهوم چگالی انرژی این جواب ها سروکارخواهیم داشت تا خود میدانها قبل از اینکه وارد بحث امواج غیرخطی و سالیتون ها شویم، بهتراست اطلاعاتی درمورد نظریه میدانها کسب کنیم، تاابزاربهتری برای بررسی قضیه، داشته باشیم [۱و ۷].

۲-۲ نظریه میدانهای کلاسیک

ما یک سیستم میدان بامولفه های $\phi_r(x)$ داریم که $r = ۱,\ldots,N$ و شاخص r، ممکن است مولفه‌های همان میدان رابرچسب بزند یا مربوط به میدان های مستقل مختلفی باشد.

ماخود را به آن نظریه‌هایی محدود می کنیم که می توانندازاصل کمترین کنش،استخراج شوند. چگالی لاگرانژی زیر رادرنظر می گیریم:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \qquad (۲-۵)$$

که در آن $\phi_{r,\alpha} = \partial_\alpha \phi_r = \partial\phi_r/\partial x^\alpha$. ارتباط بین لاگرانژی سیستم وچگالی لاگرانژی آن به صورت $L(t) = \int \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) d^۳x$ می باشد. ما انتگرال کنش $S(\Omega)$ را برای ناحیه دلخواه Ω از پیوستار چهار بعدی تعریف می کنیم.

$$S(\Omega) = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) d^۴x \qquad (۲-۶)$$

برای یک ناحیه دلخواه Ω وردش میدان را به صورت زیردر نظر می گیریم.

$$\phi_r(x) \to \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \qquad (۲-۷)$$

که درآن $\delta\phi_r(x) = (\partial\phi_r/\partial x^\alpha)\,\delta x^\alpha$ و این وردش بر روی سطح $\Gamma(\Omega)$ که ناحیه Ω را احاطه

کرده است، صفر می شود.

$$\delta\phi_r(x) = \circ \qquad on \qquad \Gamma(\Omega) \tag{۸—۲}$$

برای ناحیه دلخواه Ω و وردش های (۷—۲) و (۸—۲)، کنش (۶—۲) دارای یک مقدار پایسته است یعنی :

$$\delta S(\Omega) = \circ \tag{۹—۲}$$

پس از انجام محاسبات، به معادلات اویلر لاگرانژ می رسیم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\right) = \circ, \qquad r = ۱\ldots, N \tag{۱۰—۲}$$

این هارامعادلات حرکت میدان می گویند. هامیلتونی چنین سیستم پیوسته ای به صورت زیراست:

$$H = \int \mathcal{H}(x) d^۳x \tag{۱۱—۲}$$

وچگالی هامیلتونی به فرم معادله زیراست

$$\mathcal{H}(x) = \pi_r(x)\frac{\partial \phi_r(x)}{\partial t} - \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \tag{۱۲—۲}$$

بطوریکه $\pi_r(x) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$

یکی ازکمیات مهم در نظریه میدانها تانسور انرژی ـتکانه است که به صورت رابطه (۱۳—۲) تعریف می شود:

$$\tau^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\frac{\partial \phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L}g^{\alpha\beta} \qquad \alpha, \beta = \circ, ۱, ۲, ۳ \tag{۱۳—۲}$$

بطوریکه

$$\tau^{\circ\circ} = \mathcal{H}(x) \qquad \tau^{\circ i} = \pi_r(x)\frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x_i}, \qquad i = ۱, ۲, ۳ \tag{۱۴—۲}$$

مولفه i ام تکانه میدان p^i به صورت زیر تعریف می شود:

$$p^i = \int \tau^{\circ i} d^{\text{٣}}x = \int d^{\text{٣}}x \; \pi_r(x) \, \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x_i} \qquad (\text{١٥—٢})$$

بنابر این می توان $\tau^{\circ i}$ رابه عنوان چگالی تکانه میدان در جهت i ام، قلمداد کرد[٣].

اکنون که اطلاعاتی راجع به نظریه میدان های کلاسیک، کسب کرده‌ایم، دوباره به بحث امواج غیر خطی وسالیتون هابرمی گردیم وآنها را با دید نظریه میدان، بررسی می کنیم.
ما خودرا به آن دسته ازمعادلات میدان محدود می کنیم که، چگالی انرژی $\varepsilon(\vec{x},t)$ آنها، تابعی از میدان های $\phi_i(x,t)$ باشد؛ وانتگرال فضایی آن که همان انرژی کل وپایسته است، به صورت تابعی[۴] $E[\phi_i]$، می باشد. از آنجایی که سیستم های فیزیکی،از یک کمینه انرژی دارند، می توان بدون از دست دادن کلیت ، انرژی حداقل را برابر با صفر بگیریم.

از این پس صفت « جایگزیده» رابرای آن دسته از جواب های معادلات میدان درنظر می گیریم که چگالی انرژی آنها$\varepsilon(x,t)$، در هر زمان محدود t، در فضا جایگزیده باشد. یعنی در یک بازه مکانی محدود، مقدار محدودی داشته باشد و در سایر نقاط، باسرعتی مناسب به صفر میل کند تا انتگرال فضایی آن مقدار محدود داشته باشد(انتگرال پذیرباشد). به عنوان مثال انرژی مرتبط با معادله (۴—٢)عبارتست از:

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\text{١}}{\text{٢}c^{\text{٢}}} (\frac{\partial \phi}{\partial t})^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} (\frac{\partial \phi}{\partial x})^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{۴}} \phi^{\text{۴}} \right] \qquad (\text{١٦—٢})$$

که بوسیله $\phi(x,t) = \circ$،کمینه شده است. جواب های جایگزیده این سیستم باید به گونه ای باشد که وقتی $x \to \pm\infty$ آنگاه در هر زمان دلخواهt، $\phi(x,t) = \circ$. همچنین مشتقات $(\partial\phi/\partial x)$ و $(\partial\phi/\partial t)$، دراین حد باید صفر شوند تا انرژی محدود، داشته باشیم. معادله زیررا در نظر بگیرید:

$$\frac{\text{١}}{c^{\text{٢}}} \frac{\partial^{\text{٢}} \phi}{\partial t^{\text{٢}}} - \frac{\partial^{\text{٢}} \phi}{\partial x^{\text{٢}}} - \phi(\phi^{\text{٢}} - \text{١}) = \circ \qquad (\text{١٧—٢})$$

[۴] functional