دانشگاه سیستان و بلوچستان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

نشاندن نیم گروه های دودوری به توی نیم گروه های توپولوژی

نگارش
موسی جمشیدی

استاد راهنما
غلامرضا رضایی

دی ۹۱

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم آن دو فرشته ای که از خواسته هایشـان گذشـتند، سـختی هـا را بـه جـان خریدند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده ام برسم.

همسرم که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

و تقدیم به گل نازم نفیسه که کودکی گمشده ام را در چهره معصومش پیدا کردم.

سپاسگزاری

به نام خالق انسان

به نام او که واژه حق را در دهان انسان قرار داد و اسما را بر او باز گفت

به نام انسان که اشرف مخلوقات و جانشین خدا بر روی زمین شناخته شد. و سلام و درود بر محمّد و خاندان پاک او ، طاهران معصوم، آنان که وجودمان وامدار وجودشان است.

در آغاز وظیفه ی خود می دانم از راهنمایی ها و زحمات اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی و جناب آقای دکترجمال زاده در به ثمر رسیدن این پایان نامه قدر دانی نمایم، همچنین از دوستان گرانمایه ام آقایان بهنام جیریایی، جواد بخشی پور، مهدی جهاندیده، قهرمان رحیمی دوست، مجید خیراللهی و محمد سپاهی که مرا صمیمانه و مشتاقانه همراهی نموده اند قدردانی کرده و در نهایت از همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند سپاسگزارم.

چکیده:

در این پایان نامه، ابتدا خواص جبری و توپولوژیکی نیم گروه های توپولوژی که شامل یک کپی از نیم گروه های دودوری $C(p,q)$ باشد را مطالعه می کنیم و اثبات می کنیم که یک نیم گروه توپولوژی S با مجذور فشرده نما شامل هیچ کپی چگال $C(p,q)$ نمی باشد. سپس نیم گروه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ که توسیع نیم گروه توپولوژی دودوری می باشد را بررسی می نماییم.

کلمات کلیدی: نیم گروه توپولوژی، نیم گروه نیم توپولوژی، نیم گروه دودوری، نشاندن، توسیع، فشرده سازی نیم گروه.

فهرست مطالب

مقدمه

گروه های توپولوژی مجرد برای اولین بار توسط اشریر [۲] در سال ۱۹۲۶ معرفی گردید و در سالهای پس از آن مطالعه روی آنها گسترش یافت. به موازات مطالعه روی گروه های توپولوژی، مطالعه روی نیم گروه های توپولوژی در سال ۱۹۲۶ توسط بور[۳] کلید زده شد و مطالعات در این زمینه گسترش یافت. تا این که در سال ۱۹۵۳ نیم گروه دودوری $C(p,q)$ برای اولین بارتوسط لی آپین[۴] منتشر شد، در حالی که کلیفرد [۵] و پرستون [۶] ادعا کردند که بطور مستقل به روی نیم گروه دودوری با ریس [۷] در سال ۱۹۴۳ و قبل از آن کار کرده اند اما انتشار نداده اند.
نیم‌گروه توپولوژی دودوری اهمیت زیادی در نظریه جبری و توپولوژی دارا می‌باشد.
برای شناختن ساختار جبری و توپولوژیکی یک نیم‌گروه توپولوژی، وجود یا عدم وجود یک نیم‌گروه دودوری در آن اهمیت فراوانی دارد. به عنوان نمونه قضیه معروف اندرسون [۸] نشان می‌دهد که یک نیم‌گروه ساده با یک خودتوان اما بدون یک کپی از نیم‌گروه دودوری، کاملا ساده می‌باشد.
همچنین برتمن [۹] و وست [۱۰] اثبات کرده اند که نیم گروه دودوری $C(p,q)$ به عنوان نیم گروه نیم توپولوژیکی تنها، توپولوژی گسسته را می پذیرد. در این پایان نامه سعی بر این شده است که با الحاق یک نیم گروه دودوری $C(p,q)$ به یک نیم گروه توپولوژی و مطالعه خواص آن که به صورت کلی مطالعه نشده است را بررسی نمایم.

---

[۲] Schreirer

[۳] Boher

[۴] Lyapin

[۵] Clifford

[۶] Preston

[۷] Rees

[۸] Andersen

[۹] Bertman

[۱۰] West

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشد. ما در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز را بیان می کنیم. در فصل دوم نیم گروه ها و نیم گروه های توپولوژی را بررسی می کنیم و همچنین در پایان نیم گروه دودوری را معرفی می کنیم. در فصل سوم خواص جبری و توپولوژیکی نیم گروه های توپولوژی شامل نیم گروه دودوری $C(p,q)$ را می آوریم و در فصل چهارم بستار نیم گروه دودوری $C(p,q)$ در نیم گروه های توپولوژی را بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم و تعاریف اساسی فضاهای توپولوژی را بیان می کنیم و مطالبی در مورد خانواده های بطور موضعی متناهی، اصول جداسازی و پیوستگی را می آوریم و در ادامه فضاهای فشرده و فشرده سازی فضای توپولوژی می آوریم. همچنین لازم به ذکر است که مفاهیم توپولوژیکی در این فصل برگرفته از کتاب توپولوژی عمومی انگلکینگ [۱] [۹] می باشد.

۲.۱ فضاهای توپولوژی ، مجموعه های باز، بسته و چگال

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. گردایه τ از زیر مجموعه های X را یک توپولوژی روی X گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(الف) $\emptyset, X \in \tau$؛

(ب) τ تحت اشتراک متناهی بسته باشد. یعنی اگر $A_1, A_2, ...A_n$ ، n عضو از τ باشند، آنگاه:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau;$$

(ج) τ تحت اجتماع بسته باشد. یعنی اگر $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک گردایه از اعضای τباشند، آنگاه:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau.$$

اعضای τ را مجموعه های باز و زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژی گویند.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه و τ_d گردایه همه زیر مجموعه های آن باشد. به وضوح τ_d در سه شرط تعریف ۱.۲.۱ صدق می کند و لذا (X, τ_d) تشکیل یک فضای توپولوژی می دهد که آن را فضای گسسته می نامند.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنید τ گردایه همه زیر مجموعه های X که متمم آنها متناهی است، به همراه مجموعه تهی باشد. آنگاه τ یک توپولوژی بر X است که به آن توپولوژی متمم - متناهی می گویند.

تعریف ۴.۲.۱. خانواده $\beta \subset \tau$ را یک پایه برای فضای توپولوژی X می نامند، هرگاه هر زیر مجموعه ناتهی از X را بتوان به صورت اجتماعی از اعضای β نوشت. به عبارت دیگر خانواده β را یک پایه برای فضای توپولوژی X گویند، هرگاه $\beta \subset \tau$ و برای هر $x \in X$ و هر همسایگی از x مانند V ، $U \in \beta$ موجود باشد بطوریکه $x \in U \subseteq V$.

[۱] Engelking

تعریف ۵.۲.۱. خانواده $\beta(x)$ از همسایگی های شامل x را یک پایه برای فضای توپولوژی X در نقطه x می نامند، هرگاه برای هر همسایگی V از x، $U(x) \in \beta(x)$ موجود باشد بطوریکه $x \in U \subseteq V$.
به وضوح اگر $\beta(x)$ یک پایه برای فضای توپولوژی X در نقطه x باشد، آنگاه $\{U_x\}_{x\in\beta(x)}$ یک پایه برای فضای توپولوژی X است.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد. $F \subseteq X$ را در X بسته گویند، هرگاه $X \setminus F$ در X باز باشد. به عبارت دیگر $F \subseteq X$ را در X بسته گویند، هرگاه $X \setminus F \in \tau$ باشد.

گزاره ۷.۲.۱. [۹]. فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت:

(الف) X و $\emptyset$ در X بسته اند؛

(ب) اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته در X، بسته است؛

(ج) اشتراک هر خانواده دلخواه از مجموعه‌های بسته در X، بسته است.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A \subseteq X$ باشد و C_A خانواده همه مجموعه‌های بسته شامل A باشد. $\cap C_A$ را بستار A نامند و آن را با $\overline{A}$ نمایش می دهند.
به وضوح $A \subseteq X$ بسته است اگر و تنها اگر $A = \overline{A}$.

گزاره ۹.۲.۱. [۹]. فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A, B \subseteq X$ باشد. در این صورت:

(الف) $\emptyset = \overline{\emptyset}$؛

(ب) $A \subseteq \overline{A}$؛

(ج) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$؛

(د) اگر $B \subseteq A$، آنگاه $\overline{B} \subseteq \overline{A}$؛

(ه) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد و $A \subseteq X$ باشد. اجتماع همه مجموعه های باز مشمول در A را درون A نامیده و با $Int(A)$ نمایش می دهند. به عبارت دیگر درون A بزرگترین مجموعه باز مشمول در A است.
به وضوح $A \subseteq X$ باز است، اگر و تنها اگر $Int(A) = A$.

گزاره ۱۱.۲.۱. [۹]. فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A, B \subseteq X$ باشد. در این صورت:

(الف) $Int(X) = X$؛

(ب) $Int(A) \subseteq A$؛

(ج) $Int(Int(A)) = Int(A)$؛

(د) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. نقطه $x \in X$ یک نقطه حدی $A \subseteq X$ گویند، هرگاه $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.
مجموعه همه نقاط حدی A را مشتق A گویند و آن را با A^d نمایش می دهند و نقاط مجموعه $A \setminus A^d$ را نقاط منفرد مجموعه A گویند.

گزاره ۱۳.۲.۱. [۹]. نقطه x در فضای توپولوژی X منفرد است اگر و فقط اگر یک همسایگی مانند U از x در X موجود باشد بطوریکه $U \cap X = \{x\}$.

گزاره ۱۴.۲.۱. [۹]. مجموعه مشتق دارای خواص زیر می باشد.

(الف) $\overline{A} = A \cup A^d$؛

(ب) اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $A^d \subseteq B^d$؛

(ج) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$؛

(د) $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha^d \subseteq (\cup_{\alpha \in I} A_\alpha)^d$.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد.

(الف) $Y \subseteq X$ را در X چگال گویند، هرگاه $\overline{Y} = X$؛

(ب) $Y \subseteq X$ را در X هم‌چگال گویند، هرگاه $X - Y$ در X چگال باشد.

(ج) $Y \subseteq X$ را در X هیچ جا چگال گویند، هرگاه $\overline{Y}$ در X هم‌چگال باشد.

گزاره ۱۶.۲.۱. [۹]. فرض کنید X یک فضای توپولوژی بوده و $Y \subseteq X$ هیچ‌جا چگال در X باشد. آنگاه $Int(\overline{Y}) = \emptyset$.

گزاره ۱۷.۲.۱. [۹]. اجتماع متناهی از مجموعه های هیچ‌جا چگال، هیچ‌جا چگال است.

۳.۱ اصول شمارایی و اصول جداسازی

در این بخش اصول شمارایی، پنج اصل جداسازی $T_۰, T_۱, T_۲, T_۳, T_۴$ و همچنین فضای تیخونوف[۲] را معرفی می کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. فضای X را شمارای نوع اول گویند، هرگاه هر نقطه آن یک پایه شمارا داشته باشد.

تعریف ۲.۳.۱. فضای X را شمارای نوع دوم گویند، هرگاه دارای یک پایه شمارا باشد.

تعریف ۳.۳.۱. فضای توپولوژی X را یک فضای $T_۰$ گویند، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز آن، حداقل یک مجموعه باز موجود باشد بطوریکه یکی و تنها یکی از آن ها را شامل شود.

تعریف ۴.۳.۱. فضای توپولوژی X را یک فضای $T_۱$ گویند، هرگاه برای هر یک از دو نقطه متمایز آن، یک مجموعه باز موجود باشد بطوریکه این مجموعه باز شامل آن نقطه بوده و شامل دیگری نباشد.

تعریف ۵.۳.۱. فضای توپولوژی X را یک فضای $T_۲$ یا هاسدرف [۳] گویند، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز آن مانند y, x مجموعه های باز U و V موجود باشند، بطوریکه

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \emptyset$$

قضیه ۶.۳.۱. [۹]. حد در فضاهای هاسدرف، منحصر به فرد است.

تعریف ۷.۳.۱. فضای توپولوژی X را یک فضای $T_۳$ یا منظم گویند، هرگاه X یک فضای $T_۱$ باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه بسته مانند $F \subseteq X$ در X که شامل x نباشد، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند بطوریکه

$$x \in U, \quad F \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

تعریف ۸.۳.۱. فضای توپولوژی X را یک فضای $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ یا تیخونوف گویند، هرگاه X یک فضای $T_۱$ باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه بسته $F \subseteq X$ در X که شامل نباشد، تابع پیوسته ای مانند $f : X \longrightarrow [۰, ۱]$ موجود باشد بطوریکه:

$$f(x) = ۰, \qquad f(F) = ۱$$

تعریف ۹.۳.۱. فضای توپولوژی (X, τ) را یک فضای $T_۴$ یا نرمال گویند، هرگاه X یک فضای $T_۱$ بوده و برای هر مجموعه بسته جداازهم E و F در آن، مجموعه باز U و V موجود باشند بطوریکه:

$$F \subseteq U, \quad E \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

[۲] Tychonoff space

[۳] Hausdorff space

قضیه ۱۰.۳.۱. [۹]. یک فضای منظم که دارای شمارایی نوع دوم باشد یک فضای نرمال می باشد.

۴.۱ تورها

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید A یک مجموعه ناتهی باشد بطوریکه یک رابطه دوتایی مانند" $\geq$ " تعریف شده برای عناصر A وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) برای هر $a \in A$، $a \geq a$ (انعکاسی)؛

(ب) برای هر $a, b, c \in A$ اگر $a \geq b$ و $b \geq c$، آنگاه $a \geq c$ (متعدی)؛

(ج) اگر $a, b \in A$ آنگاه $c \in A$ وجود دارد بطوریکه $c \geq a$ و $c \geq b$. آنگاه $(A, \geq)$ را یک مجموعه جهت دار شده می گویند.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. یک تور در X، تابعی مانند f از یک مجموعه جهت دار شده مانند A به توی X است.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید $(E, \geq)$ و $(D, \geq)$ دو مجموعه جهت دار شده باشند. تور $\{y_\alpha\}_{\alpha \in E}$ را زیر توری از تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ است، هرگاه تابعی مانند $k : E \longrightarrow D$ وجود داشته باشد که

(الف) برای هر $\alpha \in E$، $y_\alpha = x_{k_\alpha}$ که در آن $k(\alpha) = k_\alpha$؛

(ب) برای هر $\beta \in D$ عنصر $\alpha \in E$ وجود دارد بطوریکه اگر $\gamma \geq \alpha$ در E، آنگاه $k_\gamma \geq \beta$ درD باشد.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید A زیر مجموعه ای از فضای توپولوژیکی X باشد تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ را نهایتا در A گویند، هرگاه $\beta \in D$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $\alpha \geq \beta$، $x_\alpha \in A$.

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ را در X همگرا به p گویند، هرگاه $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ نهایتا در هر همسایگی از p باشد.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنید A زیر مجموعه ای از فضای توپولوژیکی X باشد و ξ یک مجموعه جهت دار، تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \xi}$ را مکررا در A گویند، هرگاه برای هر $\beta \in \xi, \alpha \in \xi$ وجود داشته باشد بطوریکه $\alpha \geq \beta$ و $x_\alpha \in A$.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنید $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ توری در فضای X باشد. نقطه p را نقطه حدی تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ گویند، هرگاه $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ مکررا در هر همسایگی از p باشد.

قضیه ۸.۴.۱. [۹]. فرض کنید A زیر مجموعه ای از فضای توپولوژیکی X باشد، آنگاه $p \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر توری در A همگرا به p وجود داشته باشد.

قضیه ۹.۴.۱. [۹]. فرض کنید $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ توری در فضای توپولوژی X باشد. نقطه p نقطه حدی $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ است اگر و تنها اگر زیر توری مانند $\{y_\beta\}_{\beta\in E}$ از $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ همگرا به p وجود داشته باشد.

قضیه ۱۰.۴.۱. [۹]. فضای توپولوژی X هاسدرف است اگر و تنها اگر هر تور در X حداکثر به یک نقطه از X همگرا باشد.

قضیه ۱۱.۴.۱. [۹]. فرض کنید X و Y دو فضا باشند و $f : X \longrightarrow Y$ در $x \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر تور همگرا به x مانند $\{x_\alpha\}$، تور $\{f(x_\alpha)\}$ به $f(x)$ همگرا باشد.

۵.۱ فضاهای فشرده

در این قسمت با مفاهیم فشردگی، فشرده شمارایی، فشرده نمایی، فشرده دنباله‌ای و فشرده موضعی آشنا می شویم.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه ای از زیر مجموعه های فضای توپولوژی X باشد.
این گردایه را یک پوشش برای X می نامند، هرگاه $X = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$.
این پوشش را یک پوشش باز(بسته) نامند، هرگاه همه A_αها باز(بسته) باشند.
در صورتی که همه A_αها هم باز و هم بسته باشند، آنگاه این پوشش را یک پوشش باز - بسته نامند.

تعریف ۲.۵.۱. فضای توپولوژی X را یک فضای فشرده نامند، هرگاه X هاسدورف بوده و هر پوشش باز آن یک زیر پوشش متناهی داشته باشد.

تعریف ۳.۵.۱. فضای X قابل نشاندن در یک فضای توپولوژی Y می باشد، هرگاه یک یکریختی از X به زیر فضای Y موجود باشد.

قضیه ۴.۵.۱. [۹]. هر زیر مجموعه بسته از یک فضای توپولوژی فشرده، فشرده است.

قضیه ۵.۵.۱. [۹]. فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) X فشرده است؛

(ب) هر تور در X نقطه حدی دارد؛

(ج) هر تور در X زیر توری همگرا دارد.

قضیه ۶.۵.۱. [۹]. فضای توپولوژی X یک فضای تیخونوف است اگر و تنها اگر قابل نشاندن در یک فضای فشرده باشد.

قضیه ۷.۵.۱. [۹]. فرض کنید $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای توپولوژی فشرده X به فضای توپولوژی Y باشد. آنگاه $f(X)$ در Y فشرده است.

تعریف ۸.۵.۱. نگاشت پیوسته $f:X\longrightarrow Y$ یک همسانریخت است، هرگاه نگاشت f یک یکریختی و معکوس آن پیوسته باشد.

قضیه ۹.۵.۱. [۹]. هر نگاشت پیوسته یک به یک از فضای توپولوژی فشرده X به روی فضای توپولوژی Y یک همسانریخت است.

تعریف ۱۰.۵.۱. فضای توپولوژی X را فشرده شمارا گویند، هرگاه X یک فضای هاسدرف و هر پوشش باز شمارا از X دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

تعریف ۱۱.۵.۱. یک گردایه $\{A_s\}_{s\in S}$ از زیر مجموعه های یک فضای توپولوژی X بطور موضعی متناهی است، هرگاه برای هر نقطه $x\in X$ یک همسایگی U وجود داشته باشد به طوری که مجموعه $\{s\in S: U\cap A_s\neq\emptyset\}$ متناهی باشد.

تعریف ۱۲.۵.۱. فضای توپولوژی X را فضای لیندلوف [۴] گویند، هرگاه هر پوشش باز X دارای یک زیر پوشش شمارا باشد.

قضیه ۱۳.۵.۱. [۹]. فضای توپولوژی X فشرده است اگر و تنها اگر X یک فضای فشرده شمارا، با خاصیت لیندلوف باشد.

قضیه ۱۴.۵.۱. [۹]. هر زیر فضای بسته از یک فضای فشرده شمارا، فشرده شمارا است.

قضیه ۱۵.۵.۱. [۹]. فرض کنید $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای توپولوژی فشرده شمارای X به فضای هاسدرف Y باشد. آنگاه Y یک فضای فشرده شمارا است.

قضیه ۱۶.۵.۱. [۹]. هر تابع پیوسته حقیقی مقدار روی یک فضای فشرده شمارا، بسته و کراندار است.

قضیه ۱۷.۵.۱. [۹]. حاصلضرب دکارتی یک فضای فشرده شمارا در یک فضای فشرده، فشرده شمارا است.

---

[۴] Lindeloff space

قضیه ۱.۵.۱۸. [۹]. برای هر فضای توپولوژی هاسدرف X شرایط زیر معادلند:

(الف) X فشرده شمارا است؛

(ب) هر خانواده شمارا از زیر مجموعه های بسته در X که دارای خاصیت اشتراک متناهی باشد، اشتراک ناتهی داشته باشد؛

(ج) برای هر دنباله نزولی $F_1 \subset F_2 ...$ از زیر مجموعه های بسته ناتهی از X، $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ ناتهی باشد.

قضیه ۱.۵.۱۹. [۹]. برای هر فضای توپولوژی هاسدرف X شرایط زیر معادلند:

(الف) X فشرده شمارا است.

(ب) هر خانواده بطور موضعی متناهی از زیر مجموعه‌های ناتهی از X متناهی است.

(ج) هر خانواده بطور موضعی متناهی از زیر مجموعه‌های تک نقطه ای از X متناهی است.

(د) هر زیر مجموعه نامتناهی از X دارای یک نقطه حدی است.

(ه) هر زیر مجموعه شمارای نامتناهی از X دارای یک نقطه حدی است.

تعریف ۱.۵.۲۰. فضای توپولوژی X را فشرده نما گویند، هرگاه هر خانواده موضعاً متناهی از زیر مجموعه‌های ناتهی باز X، متناهی باشد.

تعریف ۱.۵.۲۱. فضای توپولوژی X بطور باز تجزیه پذیر گویند، هرگاه هر نگاشت پیوسته $f : X \longrightarrow Y$ که Y یک فضای متری پذیر است را بتوان بصورت ترکیب نگاشت پیوسته و باز $P : X \longrightarrow K$ و نگاشت پیوسته $g : K \longrightarrow Y$ که K یک فضای تفکیک پذیر می باشد، نوشت.

قضیه ۱.۵.۲۲. [۹]. فضای توپولوژی تیخونوف X فشرده‌نما است اگر و فقط اگر هر تابع حقیقی مقدار پیوسته روی X، کراندار باشد.

قضیه ۱.۵.۲۳. [۹]. هر فضای تیخونوف فشرده شمارا، فشرده نما است.

قضیه ۱.۵.۲۴. [۹]. هر فضای نرمال فشرده‌نما، فشرده شمارا است.

قضیه ۱.۵.۲۵. [۹]. فرض کنید $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای فشرده نمای X به فضای تیخونوف Y باشد. آنگاه Y نیز فشرده‌نما است.

قضیه ۲۶.۵.۱. [۹]. فضای توپولوژی X را فشرده دنباله‌ای گویند. هرگاه هر تور در X یک زیر تور همگرا در X داشته باشد.

قضیه ۲۷.۵.۱. [۹]. هر فضای فشرده دنباله‌ای، فشرده شمارا است.

قضیه ۲۸.۵.۱. [۹]. فرض کنید $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای فشرده دنباله ای X بروی فضای هاسدرف Y باشد. آنگاه Y نیز فشرده دنباله‌ای است.

قضیه ۲۹.۵.۱. [۹]. هر زیر مجموعه بسته از یک فضای فشرده دنباله‌ای، فشرده دنباله‌ای است.

قضیه ۳۰.۵.۱. [۹]. حاصلضرب دکارتی دو فضای فشرده دنباله‌ای، فشرده دنباله‌ای است.

تعریف ۳۱.۵.۱. فضای توپولوژی X را بطور موضعی فشرده گویند، هرگاه برای هر $x\in X$، یک همسایگی از x مانند U در X موجود باشد بطوریکه $\overline{U}$ در X فشرده باشد.

۶.۱ فشرده‌سازی

تعریف ۱.۶.۱. زوج (Y,c) را که Y یک فضای توپولوژی فشرده و c یک نگاشت همسانریخت باشد بطوریکه $\overline{c(X)}=Y$، را فشرده‌سازی فضای توپولوژی X می نامند.
اگر فضای توپولوژی X قابل نشاندن در یک فضای توپولوژی فشرده مانند Y باشد، بدین معنی که یک نگاشت همسانریخت مانند $f:X\longrightarrow M$ به روی زیر فضای $M=f(X)$ از Y موجود باشد، آنگاه بنابر قضیه ۴.۵.۱ M فشرده است، لذا می توان زوج $(\overline{f(X)},if)$ که $i:M\longrightarrow\overline{M}$ نگاشت نشاندن از M به $\overline{M}$ است را فشرده‌سازی فضای توپولوژی X در نظر گرفت.
بنابراین هر فضای توپولوژی که قابل نشاندن در یک فضای توپولوژی فشرده باشد، یک فشرده‌سازی دارد.
این حقیقت و قضیه ۶.۵.۱ قضیه زیر را نتیجه می دهد:

قضیه ۲.۶.۱. [۹]. فضای توپولوژی X فشرده‌سازی دارد اگر وتنها اگر X یک فضای توپولوژی تیخونوف باشد.

قضیه ۳.۶.۱. [۹]. فرض کنید (X,c) یک فشرده‌سازی از فضای توپولوژی X باشد. مجموعه $cX \setminus c(X)$ را باقیمانده فشرده سازی cX می نامند.

مثال ۴.۶.۱. با فرض X یک فضای فشرده، به وضوح باقیمانده فشرده‌سازی برابر مجموعه تهی می‌باشد.

تعریف ۵.۶.۱. فرض کنید $C(X)$ مجموعه همه فشرده‌سازی های فضای توپولوژی X باشد. می توان یک ترتیب جزئی مانند $\leq$ روی $C(X)$ به صورت زیر قرار داد:
$c_1(X) \leq c_2(X)$ اگر وفقط اگر نگاشت پیوسته $f : c_1X \longrightarrow c_2X$ موجود باشد بطوریکه:

$$fc_1 = c_2.$$

تعریف ۶.۶.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\leq$ یک ترتیب جزئی روی X باشد. عنصر x از ترتیب جزئی $\leq$ روی مجموعه X را مینیمال نامند، هرگاه برای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$x = y \Rightarrow y \leq x$$

تعریف ۷.۶.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\leq$ یک ترتیب جزئی روی X باشد. عنصر x از ترتیب جزئی $\leq$ روی مجموعه X را ماکزیمال نامند، هرگاه برای هر$y \in X$ داشته باشیم:

$$x = y \Leftarrow x \leq y$$

نتیجه ۸.۶.۱. [۹]. برای هر فضای توپولوژی تیخونوف X بزرگترین عنصر ماکزیمال نسبت به ترتیب جزئی $\leq$ در $C(X)$ موجود است.

تعریف ۹.۶.۱. عنصر ماکزیمال $C(X)$ را فشرده‌سازی استون چخ [۵]فضای X می‌نامند و آنرا با $\beta(X)$ نمایش می دهند.

حال این سوال پیش می آید که آیا هر زیر خانواده ناتهی از $C(X)$ بزرگترین کران پایین دارد؟
یعنی آیا می توان یک عنصر مینیمال برای $C(X)$ یافت؟ به عبارت دیگر آیا می توان کوچکترین فشرده‌سازی برای X پیدا کرد؟
قضیه زیر بیان می کند که اگر فضای توپولوژی X فشرده موضعی باشد، ولی فشرده نباشد، آنگاه $C(X)$ حاوی عنصر مینیمال است.

[۵] Cech - ston compactifaction

قضیه ۱۰.۶.۱. [۹]. هر فضای توپولوژی موضعاً فشرده، غیرفشرده یک فشرده‌سازی دارد که باقیمانده آن تک نقطه ای است. این فشرده‌سازی عنصر مینیمال $C(X)$ است.

عنصر مینیمال $C(X)$ را فشرده‌سازی تک نقطه ای الکساندرف [۶] می‌نامند و آنرا با ωX نمایش می‌دهند.

مثال ۱۱.۶.۱. دایره S^1 فشرده‌سازی الکساندرف از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می باشد.

[۶] Alexandroff campactifaction