



تقدیر و تشکر

باساس بی کران به درگاه یگانه طرح هستی، کمال تشکر و قدردانی خود را از استاد محترم جناب آقای دکتر شہرام طالبی ابراز می دارم کہ بارہ نامانی

دقیق و عالمانہ خود در طول اجرای پروژه راہ را برای این جانب ہموار نموده و بر روند اجرای ہرچہ بہتر کار نظارت داشتہ اند.

مجتمع فنی مهندسی
گروه مهندسی مکانیک

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

مهندسی مکانیک - تبدیل انرژی

کاربرد روش شبکه بولتزمن در تحلیل جریان سیال و انتقال گرما در مقیاس های کوچک

استاد راهنما: دکتر شهرام طالبی

استاد مشاور: دکتر محمد سفید

نگارش: سید امین نبوی زاده

خرداد ماه ۱۳۹۰

چکیده

روش شبکه بولتزمن (*LBM*) یک روش محاسباتی است که توانایی مدل‌سازی جریان سیال و انتقال حرارت را دارد. تحلیل میدان جریان با مرزهای پیچیده، دستورات ساده برنامه‌نویسی و شرایط آسان برای پردازش موازی از مزیت‌های این روش است.

هدف این پایان‌نامه، توسعه و بازنویسی یک کد کامپیوتری به زبان فرترن است که بتواند جریان سیال همراه با انتقال حرارت را در ابعاد بزرگ و ریز مقیاس تحلیل کند. (کد موجود قبلی فقط جریان سیال بدون انتقال حرارت را تحلیل می‌کرد). جریان آرام دوبعدی و تراکم‌ناپذیر و سیال نیوتونی و تک‌فاز است. در تحلیل جریان در ابعاد ریزمقیاس (جریان لغزشی) از شرط مستقیم و طیفی برای سرعت و شرط مستقیم و *DSBC* برای دما استفاده شده است. از شرط زو-هی سرعت ثابت و شرط دمای معکوس لغزشی برای شرط عدم لغزش روی دیواره‌ها و برای مرزهای ورودی و خروجی از شرط زو-هی سرعت ثابت و فشار ثابت استفاده شده است. از شبکه D_2Q_9 در همه تحلیل‌های سیالاتی و حرارتی استفاده شده است.

بعد از تدوین کد مورد نظر مسائل زیر تحلیل شده‌اند: (۱) هدایت گرما در جسم جامد با مرزهای پیچیده (۲) جریان پتانسیل روی اجسام با شکل پیچیده (۳) جریان و انتقال حرارت بین دو صفحه موازی در ابعاد بزرگ و ریز (۴) جریان جابه‌جایی طبیعی در یک محفظه با و بدون جسم داخلی با مرز پیچیده در ابعاد بزرگ و ریز

در تمام موارد، نتایج با داده‌های تحلیلی و عددی موجود مقایسه شده است که در همه موارد دقت و توانایی کد تهیه شده به اثبات رسیده شده است.

فهرست

فصل اول.....	۱
اصول اولیه روش شبکه بولتزمن.....	۱
۱-۱. مقدمه.....	۱
۲-۱. تئوری و اصول اولیه شبکه بولتزمن.....	۱
۳-۱. مدل سازی پایه شبکه بولتزمن.....	۳
فصل دوم.....	۹
شبکه بولتزمن حرارتی.....	۹
۱-۲. مقدمه.....	۹
۲-۲. مدل سازی پایه شبکه بولتزمن حرارتی.....	۱۰
۳-۲. نحوه اعمال شرایط مرزی.....	۱۴
۲-۳-۱. شرط مرزی عدم لغزش.....	۱۵
۲-۳-۲. روش لغزش آزاد.....	۱۷
۲-۳-۳. روش سرعت و دمای معکوس لغزشی.....	۱۷
۲-۳-۴. روش زو هی.....	۲۰
۲-۳-۵. روش برون یاب.....	۲۲
۲-۳-۶. روش بقا جرم برای جریان توسعه یافته.....	۲۳
۲-۳-۷. مرزهای خمیده.....	۲۴
۲-۳-۸. شرط مرزی توسعه یافتگی.....	۲۶

۲۶	۴-۲. روش حل
۲۷	۵-۲. توسعه شبکه بولتزن برای جریانهای ریز مقیاس
۳۰	۶-۲. نحوه اعمال شرایط مرزی برای جریانهای ریز مقیاس
۳۰	۱-۶-۲. روش طیفی
۳۰	۲-۶-۲. روش برهم کنش گاز و سطح جامد
۳۳	فصل سوم
۳۳	مروری بر تحقیقات گذشته
۳۳	۱-۳. جریان جابه‌جایی طبیعی داخل حفره
۴۴	۲-۳. جریانهای داخلی
۴۷	۳-۳. تداخل بین جامد و سیال
۴۹	۴-۳. جریانهای ریز مقیاس
۴۹	۱-۴-۳. جریان کوئت در میکرو کانال‌ها
۵۰	۲-۴-۳. جریان پوازیه در میکرو کانال‌ها
۵۲	۳-۴-۳. جریان جابه‌جایی طبیعی در رژیم لغزشی
۵۷	فصل چهارم
۵۷	نحوه اعمال شبکه بولتزن
۵۸	۱-۴. انتقال متغیرها در جریان سیال غیر قابل تراکم
۵۹	۲-۴. گسسته سازی از فضای بدون بعد به شبکه بولتزن
۶۰	۳-۴. نحوه مدل کردن مقدار نیرو
۶۲	۴-۴. پیدا کردن نیروی شناوری در ناحیه لغزشی
۶۲	۵-۴. نحوه اعمال نیرو در معادلات شبکه بولتزن

۶۴ نحوه مدل کردن مقدار تولید حرارت داخلی
۶۵ فصل پنجم
۶۵ نتایج
۷۷ ۵-۱-۵. هدایت با تولید حرارت داخلی
۷۹ ۵-۲. جریان پتانسیل
۸۱ ۵-۳. جریان پوازیه
۸۶ ۵-۴-۱. جریان جابه‌جایی طبیعی درون یک حفره
۹۳ ۵-۴-۲. جریان جابه‌جایی طبیعی درون یک حفره محتوی یک استوانه
۱۰۰ ۵-۴-۳. جریان جابه‌جایی طبیعی درون یک حفره جسمی با شکل پیچیده
۱۰۹ ۵-۵. جریانهای ریز مقیاس
۱۱۰ ۵-۵-۱. جریان در داخل میکروکانال
۱۱۵ ۵-۵-۲. جریان جابه‌جایی طبیعی در ابعاد ریز مقیاس
۱۲۱ فصل ششم
۱۲۱ جمع‌بندی و پیشنهادها
۱۲۵ مراجع

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱) شبکه بولتزمن D_2Q_9 ۴
- شکل (۱-۲): شرط مرزی بازگشت به عقب کامل ۱۵
- شکل (۲-۲): روش لغزش اصطکاکی [۲۳] ۱۷
- شکل (۳-۲): لایه‌های مربوط به طرح برون یاب ۲۲
- شکل (۴-۲) نمایی از یک مرز خمیده ۲۴
- شکل (۱-۳): مسأله بررسی شده توسط ژئو و همکاران [۱۴] ۳۴
- شکل (۲-۳): خطوط جریان برای اعداد رایلی 10^3 و 10^4 و 10^5 و 10^6 [۱۴] ۳۴
- شکل (۳-۳): خطوط همدمای برای اعداد رایلی 10^3 و 10^4 و 10^5 و 10^6 [۱۴] ۳۵
- شکل (۴-۳): دمای بدون بعد در طول کانال در رینولدزهای مختلف [۳۶] ۳۸
- شکل (۵-۳): دمای بدون بعد در طول کانال در پیرانتلهای مختلف [۳۶] ۳۹
- شکل (۶-۳): خطوط همدمای در اعداد رایلی مختلف و $R/L=0.1$ [۳۷] ۳۹
- شکل (۷-۳): خطوط جریان در اعداد رایلی مختلف و $R/L=0.1$ [۳۷] ۴۰
- شکل (۸-۳): خطوط همدمای در اعداد رایلی مختلف و $R/L=0.2$ [۳۷] ۴۰
- شکل (۹-۳): خطوط جریان در اعداد رایلی مختلف و $R/L=0.2$ [۳۷] ۴۰
- شکل (۱۰-۳) خطوط همدمای و جریان برای رایلی 10^3 [۳۸] ۴۱
- شکل (۱۱-۳): مسأله جابه‌جایی طبیعی درون حفره [۴۰] ۴۲
- شکل (۱۲-۳): خطوط جریان در حالت $Ra=10^6$ و $\Delta T^* = 0$ در مکانهای مختلف استوانه [۴۰] ۴۲
- شکل (۱۳-۳): خطوط همدمای در حالت $Ra=10^6$ و $\Delta T^* = 0$ در مکانهای مختلف استوانه [۴۰] ۴۳
- شکل (۱۴-۳): خطوط جریان در حالت $Ra=10^6$ و $\Delta T^* = 50$ در مکانهای مختلف استوانه ۴۳
- [۴۰] ۴۳
- شکل (۱۵-۳): خطوط جریان در حالت $Ra=10^6$ و $\Delta T^* = 50$ در مکانهای مختلف استوانه ۴۳
- [۴۰] ۴۳

- شکل (۳-۱۶) توزیع دما در $x^* = 1, x^* = 0.75$ خط پر جواب تحلیلی می‌باشد [۴۳]..... ۴۵
- شکل (۳-۱۷) توزیع دما در راستای کانال برای عدد رینولدز ۷۶.۸ برای دو عدد برینکام ۰/۹ و ۲/۹۳ [۴۳]..... ۴۶
- شکل (۳-۱۸): مسأله تداخل بین جامد و سیال [۱۱]..... ۴۸
- شکل (۳-۱۹) توزیع دما در $(x/L = 1/16, 1/8, 1/4, 1/2)$ برای نسبت ضریب هدایت ۱ و ۱۰ [۱۱]..... ۴۸
- شکل (۳-۲۰) تغییر دما در نقطه $X/H=0.5$ و $Y/H=0.5$ نسبت به تعداد گره‌ها توسط دو روش حجم محدود و شبکه بولتزمن [۱۱]..... ۴۹
- شکل (۳-۲۱) سرعت و دمای بدون بعد در اعداد نادسن مختلف [۱۳]..... ۵۰
- شکل (۳-۲۲) سرعت و دمای بدون بعد در مقاطع مختلف کانال [۱۳]..... ۵۱
- شکل (۳-۲۳) اثرات نادسن ورودی بر روی ضریب اصطکاک و عدد ناسلت در رینولدز ۰/۰۱ [۱۳]..... ۵۱
- شکل (۳-۲۴) تغییر ضریب $C_f \cdot Re$ و ناسلت در خروجی برای نادسن ورودی ۰/۰۱۵ مقایسه با نتایج مونت کارلو (ضربدر) [۱۳]..... ۵۱
- شکل (۳-۲۵) تأثیر عدد رینولدز بر روی ضریب اصطکاک و ضریب ناسلت [۱۳]..... ۵۲
- شکل (۳-۲۶): خطوط هم دما (راست) و جریان (چپ) در نسبت منظرهای مختلف در نادسن ۰/۰۱ [۴۴]..... ۵۳
- شکل (۵-۱) نمایی از مسأله مطرح شده..... ۶۶
- شکل (۵-۲) خطوط هم دما برای تعداد گره ۱۰۰ در ۱۰۰..... ۶۷
- شکل (۵-۳) دمای بدون بعد در $X^* = 0.5$ ۶۸
- شکل (۵-۴) دمای بدون بعد در $Y^* = 0.5$ ۶۸
- شکل (۵-۵) اثرات زمان آسودگی بر روی تعداد تکرارها..... ۶۹
- شکل (۵-۶) تعریف مسأله..... ۷۰
- شکل (۵-۷) خطوط هم دما برای نسبت‌های مختلف R/w ۷۱
- شکل (۵-۸): مسأله در ابعاد بدون بعد..... ۷۲

- شکل (۵-۹) خطوط هم دما برای نسبت شعاعهای مختلف ۷۴
- شکل (۵-۱۰) مقایسه بین نتایج تحلیلی و جوابهای حاصل از شبکه بولتزمن ۷۵
- شکل (۵-۱۱) توزیع دما برای حالات مختلف ۷۶
- شکل (۵-۱۲) توزیع دما دائم: برای تولید حرارت داخلی بدون بعد 0.4 و $Fo=0.05$ ۷۸
- شکل (۵-۱۳) توزیع دما دائم: برای تولید حرارت داخلی بدون بعد 0.2 و $Fo=0.05$ ۷۸
- شکل (۵-۱۴) توزیع دما دائم: برای تولید حرارت داخلی بدون بعد 0.4 و $Fo=0.1$ ۷۸
- شکل (۵-۱۵) تابع جریان حاصل بر روی نیم دایره ۷۹
- شکل (۵-۱۶) تابع جریان بر روی شکل پیچیده ۸۰
- شکل (۵-۱۷) نمایی از جریان پوازیه در ابعاد بدون بعد ۸۱
- شکل (۵-۱۸) سرعت خط مرکزی برای تعداد مختلف گره ۸۲
- شکل (۵-۱۹) توزیع فشار بدون بعد در طول کانال ۸۳
- شکل (۵-۲۰) توزیع سرعت در مقطع خروجی ۸۳
- شکل (۵-۲۱) $C_f Re$ در طول کانال در تعداد گرههای مختلف ۸۴
- شکل (۵-۲۲): تغییرات ناسلت در طول کانال برای تعداد گره 300×50 ۸۵
- شکل (۵-۲۳) توزیع دمای بدون بعد در راستای کانال ۸۵
- شکل (۵-۲۴) نمایی از مسأله حل شده ۸۶
- شکل (۵-۲۵) خطوط همدمای برای جریان طبیعی درون یک حفره مربعی در رایلیهای مختلف ... ۸۷
- شکل (۵-۲۶) خطوط همدمای برای جریان طبیعی درون یک حفره مربعی در رایلیهای مختلف ۸۸
- شکل (۵-۲۷) توزیع مؤلفه x سرعت در جریان درون یک حفره مربعی ۸۹
- شکل (۵-۲۸) توزیع مؤلفه y سرعت در جریان درون یک حفره مربعی ۹۰
- کار حاضر ۹۲
- نتایج حاصل از مرجع [۱۶] ۹۲
- شکل (۵-۲۹) توزیع دما در مقطع $x/L=0.5$ ۹۲
- شکل (۵-۳۰) نمایی از مسأله حل شده ۹۳

- شکل (۳۱-۵) خطوط همدمما در نسبت $r/w=0.2$ در رایلیهای مختلف ۹۴
- شکل (۳۲-۵) خطوط جریان در نسبت $r/w=0.2$ در رایلیهای مختلف ۹۵
- شکل (۳۳-۵) خطوط همدمما در نسبت $r/w=0.3$ در رایلیهای مختلف ۹۶
- شکل (۳۴-۵) خطوط جریان در نسبت $r/w=0.3$ در رایلیهای مختلف ۹۷
- شکل (۳۵-۵) خطوط همدمما در نسبت $r/w=0.4$ در رایلیهای مختلف ۹۸
- شکل (۳۶-۵) خطوط جریان در نسبت $r/w=0.4$ در رایلیهای مختلف ۹۹
- شکل (۳۷-۵) نمایی از مسأله مطرح شده ۱۰۰
- شکل (۳۸-۵) تأثیر تعداد موجها بر خطوط همدمما در $A=0.1, r_0=0.2, \theta_0=0^\circ$ ۱۰۱
- شکل (۳۹-۵) تأثیر تعداد موجها بر خطوط جریان در $A=0.1, r_0=0.2, \theta_0=0^\circ$ ۱۰۲
- شکل (۴۰-۵) تأثیر تعداد موجها بر روی عدد ناسلت موضعی ۱۰۳
- شکل (۴۱-۵) اثر دامنه موج بر خطوط همدمما در $n=4, r_0=0.2, \theta_0=0^\circ$ ۱۰۴
- شکل (۴۲-۵) اثر دامنه موج بر خطوط جریان در $n=4, r_0=0.2, \theta_0=0^\circ$ ۱۰۵
- شکل (۴۳-۵) ناسلت موضعی در A های مختلف ۱۰۶
- شکل (۴۴-۵) اثر زاویه قرارگیری بر خطوط همدمما در $A=0.1, n=4, r_0=0.2$ ۱۰۷
- شکل (۴۵-۵) اثر زاویه قرارگیری بر خطوط جریان در $A=0.1, n=4, r_0=0.2$ ۱۰۸
- شکل (۴۶-۵) ناسلت موضعی در زوایای چرخش مختلف ۱۰۹
- شکل (۴۷-۵) توزیع سرعت در مقاطع مختلف میکروکانال ۱۱۰
- شکل (۴۸-۵) توزیع سرعت در مقاطع مختلف میکروکانال ۱۱۱
- شکل (۴۹-۵) ضرایب اصطکاک در طول میکروکانال در عدد رینولدز 0.1 برای سه نادسن
مخلف ۱۱۲
- شکل (۵۰-۵) عدد ناسلت در طول کانال در عدد رینولدز 0.1 برای سه نادسن مخلف ۱۱۲
- شکل (۵۱-۵) ضرایب اصطکاک و ناسلت در طول کانال در عدد رینولدز 0.1 برای تعداد گره
 100×50 ۱۱۳

شکل (۵-۵۲) ضرایب اصطکاک و ناسلت در طول کانال در عدد رینولدز ۰/۰۱ برای تعداد گره	۱۰۰۰×۵۰
۱۱۳.....	
شکل (۵-۵۳) مقایسه ضرایب اصطکاک و ناسلت در خروجی با مراجع [۱۳] و [۵۳].....	۱۱۳
شکل (۵-۵۴) مقایسه ضرایب اصطکاک و ناسلت در خروجی با مراجع [۱۳] و [۵۳].....	۱۱۴
شکل (۵-۵۵) ضرایب اصطکاک در طول کانال در عدد نادسن ۰/۰۱ برای چهار رینولد مختلف	۱۱۴
شکل (۵-۵۶) عدد ناسلت در طول کانال در عدد نادسن ۰/۰۱ برای چهار رینولد مختلف	۱۱۵
شکل (۵-۵۷) نمایی از مساله بررسی شده	۱۱۶
شکل (۵-۵۸) خطوط همدمما در $AR=0.5$ و $AR=1$ برای رایلی مرجع 10^3 و 10^4 و نادسن برابر	۰/۰۱
۱۱۷.....	
شکل (۵-۵۹) خطوط جریان در $AR=0.5$ و $AR=1$ برای رایلی مرجع 10^3 و 10^4 و نادسن برابر	۰/۰۱
۱۱۸.....	
شکل (۵-۶۰) خطوط همدمما در دو عدد رایلی 10^3 و 10^4	۱۱۹
شکل (۵-۶۱) خطوط جریان در دو عدد رایلی 10^3 و 10^4 و عدد نادسن ۰/۰۱.....	۱۱۹

فهرست جداول

جدول (۱-۳): مقایسه جوابهای حاصل از شبکه بولتزمن با جوابهای حاصل از سایر روشهای عددی [۱۴].....	۳۵
جدول (۲-۳): نشان دادن مستقل بودن نتایج از تعداد گرهها در رایلی 10^4 [۳۳].....	۳۶
جدول (۳-۳): نشان دادن مستقل بودن نتایج از تعداد گرهها در رایلی 10^8 [۳۳].....	۳۶
جدول (۴-۳): مقایسه نتایج در اعداد رایلی مختلف و با روشهای عددی مختلف [۳۳].....	۳۷
جدول (۵-۳): مقایسه نتایج حاصل از دو روش LB و FV در اعداد رایلی مختلف [۳۴].....	۳۷
جدول (۶-۳): مقدار Nu متوسط روی سطح گرم [۳۷].....	۴۱
جدول (۷-۳): نتایج ناسلت متوسط در مکانهای مختلف استوانه [۴۰].....	۴۳
جدول (۸-۳): مقایسه نتایج LBM با نتایج FVM و DQ [۴۱].....	۴۴
جدول (۱-۵): مقایسه جوابهای روش شبکه بولتزمن با جواب تحلیلی.....	۷۱
جدول (۲-۵): مقایسه جوابها به روش شبکه بولتزمن با جواب تحلیلی.....	۷۲
جدول (۳-۵): مقایسه نتایج ضریب شکل تحلیلی و شبکه بولتزمن در نسبت شعاعهای مختلف... ۷۳	۷۳
جدول (۴-۵): ضریب شکل برای حالات مختلف A و n.....	۷۶
جدول (۵-۵): ضریب لیفت و درگ بر روی نیمدایره به شعاع $0/3$	۸۰
جدول (۶-۵): ضریب لیفت و درگ برای حالات مختلف A و n.....	۸۱
جدول (۷-۵): مقایسه نتایج ماکزیمم سرعت افقی v_{max}/V^* در $y/H=0.5$ و ماکزیمم سرعت عمودی u_{max}/V^* در $x/H=0.5$ در رایلی 10^3 . اعداد داخل پرانتز محلی است که این مقادیر ماکزیمم اتفاق میافتد.....	۹۱
جدول (۸-۵): مقایسه نتایج ماکزیمم سرعت افقی v_{max}/V^* در $y/H=0.5$ و ماکزیمم سرعت عمودی u_{max}/V^* در $x/H=0.5$ در رایلی 10^4 . اعداد داخل پرانتز محلی است که این مقادیر ماکزیمم اتفاق میافتد.....	۹۱

- جدول (۹-۵) مقایسه نتایج ماکزیمم سرعت افقی v_{\max}/V^* در $y/H=0.5$ و ماکزیمم سرعت عمودی u_{\max}/V^* در $x/H=0.5$ در رایلی 10^5 . اعداد داخل پرانتز محلی است که این مقادیر ماکزیمم اتفاق میافتد. ۹۱
- جدول (۱۰-۵) مقایسه نتایج ماکزیمم سرعت افقی v_{\max}/V^* در $y/H=0.5$ و ماکزیمم سرعت عمودی u_{\max}/V^* در $x/H=0.5$ در رایلی 10^6 . اعداد داخل پرانتز محلی است که این مقادیر ماکزیمم اتفاق میافتد. ۹۱
- جدول (۱۱-۵): مقایسه نتایج ضرایب ناسلت متوسط کلی با نتایج حاصل از کار کیم [۳۸] ۱۰۰
- جدول (۱۲-۵): تغییرات ناسلت متوسط برای حالات مختلف n ۱۰۴
- جدول (۱۳-۵): تغییرات ناسلت متوسط برای حالات مختلف A ۱۰۶
- جدول (۱۴-۵): تغییرات ناسلت متوسط برای حالات مختلف چرخش ۱۰۹
- جدول (۱۵-۵) مقادیر ناسلت متوسط کلی در رژیم پیوسته و لغزشی ۱۲۰

فصل اول

اصول اولیه روش شبکه بولتزمن

۱-۱. مقدمه

روش شبکه بولتزمن روشی است که در طی دهه‌های گذشته، به عنوان جانشین سایر روش‌های عددی استفاده شده است [۱]. شبکه بولتزمن از شبکه گاز مشتق شده است. بر خلاف سایر روش‌های متداول عددی، روش شبکه بولتزمن که از تئوری انرژی جنبشی^۱ مشتق شده است، ذرات سیال را با معرفی کردن توابع توزیع مدل می‌کند [۲]. سپس بین متغیرهای میکروسکوپی و متغیرهای متوسط گیری ماکروسکوپی مثل دما و فشار ارتباط برقرار می‌کند. در این فصل مروری سریع بر نحوه شکل‌گیری شبکه بولتزمن از معادلات بولتزمن صورت می‌پذیرد.

۱-۲. تئوری و اصول اولیه شبکه بولتزمن

تئوری انرژی جنبشی، شاخه‌ای از فیزیک آماری است که با فرآیندهای ناپایدار و ارتباط آن با تعادل ترمودینامیکی بحث می‌کند. در این تئوری فرض می‌شود که سیالات از تعدادی بسیار زیادی ذره ساخته شده که حرکت همه این ذرات از قانون دوم نیوتن تبعیت می‌کند. حل مستقیم و مشخص کردن سرعت تک تک ذرات، که هر کدام درجات آزادی بی‌نهایت دارند، کار مشکلی است.

از طرف دیگر معمولاً کمیت‌های متوسط گیری شده آماری، مثل فشار و دما مهم هستند و احتیاجی به دانستن نحوه حرکت تک تک ذرات نیست.

یکی از فرض‌های اولیه تئوری انرژی جنبشی این است که همه اطلاعات برای مشخص کردن جریان سیال در تابع توزیع $f(r, \zeta, t)$ ذخیره می‌شود که r مشخص کننده فاصله نقطه از مبدأ مختصات، ζ مشخص کننده سرعت میکروسکوپی و t مشخص کننده زمان می‌باشد. $f(r, \zeta, r)d\zeta$ مشخص کننده تعداد ذراتی است که سرعتشان در محدوده ζ و $\zeta + d\zeta$ است. بر طبق این تعریف می‌توان تعداد ذرات را طبق رابطه (۱-۱) به دست آورد.

$$n = \int f(r, \zeta, t) d\zeta \quad (1-1)$$

اگر هیچ گونه برخوردی بین ذرات در زمان t و $t+dt$ صورت نگیرد، می‌توان رابطه (۲-۱) را به دست آورد [۳].

$$f(r+dr, \zeta+adt, t+dt) dr d\zeta = f(r, \zeta, t) dr d\zeta \quad (2-1)$$

که در این رابطه a مشخص کننده شتاب بر اثر نیروی خارجی می‌باشد. با بسط تیلور دادن رابطه بالا به رابطه (۳-۱) می‌رسیم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \zeta \frac{\partial f}{\partial r} + a \frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0 \quad (3-1)$$

که می‌توان آن را به صورت رابطه (۴-۱) نیز نوشت [۳].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\zeta} \cdot \vec{\nabla}_r f + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_\zeta f = 0 \quad (4-1)$$

که در آن دو جمله اول رابطه بر اثر حرکت ذرات به وجود می‌آید و جمله $\vec{F} \cdot \vec{\nabla}_\zeta f$ بر اثر نیروی خارجی به وجود می‌یابد. وقتی برخورد بین ذرات وجود دارد در سمت راست رابطه (۴-۱) باید اثرات حاصل از برخورد هم در نظر گرفته شود.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\zeta} \cdot \vec{\nabla}_r f + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_\zeta f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \quad (5-1)$$

سخت‌ترین قسمت این رابطه پیدا کردن عبارتی برای جمله برخورد است. باتانگار^۱ و همکاران [۴] با فرض خطی بودن اپراتور برخورد به رابطه (۶-۱) رسیدند که به این رابطه، معادله‌ی بولتزمن با تقریب باتانگار گروس کروک^۲ (BGK) گفته می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\zeta} \cdot \vec{\nabla}_r f + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_\zeta f = -\frac{1}{\tau_v} (f - f^{eq}) \quad (۶-۱)$$

که τ_v زمان آسودگی بدون بعد است و f^{eq} تابع توزیع تعادلی قبل از برخورد است. در بیشتر اوقات پیدا کردن جواب تحلیلی برای معادله بولتزمن کار مشکلی است. اما برای حالت گاز تک اتمی تک-فاز، و با صرف نظر کردن از نیروی خارجی معادله بولتزمن دارای جواب تحلیلی است که به حل آن تابع توزیع ماکسولی گفته می‌شود که به صورت رابطه (۷-۱) است [۳].

$$f^{eq} = \frac{n}{(2\pi R_g T)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\zeta - u)}{2R_g T}\right) \quad (۷-۱)$$

که D نشان‌دهنده بعد و R_g ثابت جهانی گازها و T دما است.

۳-۱. مدل سازی پایه شبکه بولتزمن

نشان داده شده است که معادلات شبکه بولتزمن BGK از گسسته سازی معادلات بولتزمن BGK در فضای مکان و زمان و فاز حاصل می‌شود [۳]. در فضای گسسته سرعت، سرعت میکروسکوپی ζ به مؤلفه‌های $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ گسسته می‌شود، که هرکدام مؤلفه‌های سرعت در جهت‌های مختلف شبکه هستند. همچنین توابع توزیع به صورت $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ گسسته سازی می‌شود. بنابراین معادلات گسسته شبکه بولتزمن به صورت رابطه (۸-۱) می‌شود.

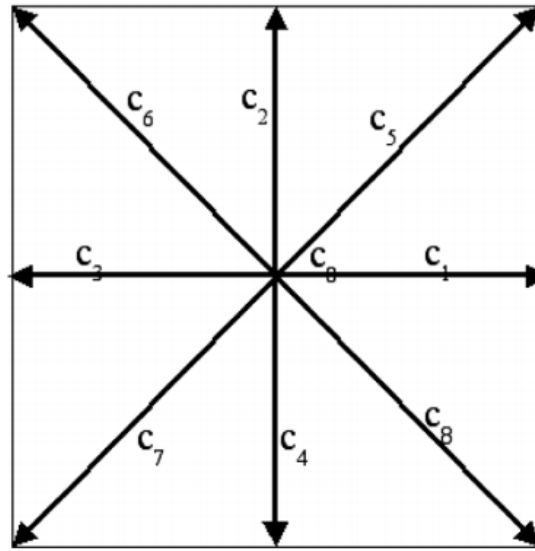
$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + e_\alpha \cdot \nabla f_\alpha = -\frac{1}{\tau_v} (f - f_\alpha^{eq}) + F_\alpha \quad (۸-۱)$$

¹ Bhatnagar

² Bhatnagar-Gross-Krook

که در آن نشان‌دهنده حالت تعادلی تابع توزیع گسسته شده و $F_\alpha = (\mathbf{a} \cdot \nabla_\zeta f)_\alpha$ جمله گسسته شده نیرو می‌باشد. هم‌چنین در این رابطه τ_v نشان‌دهنده زمان آسایش می‌باشد که در ادامه درباره آن توضیح داده می‌شود.

روش پایه شبکه بولتزمن توسط کیان^۱ و همکاران [۵] به صورت $D_D Q_M$ (تعداد ابعاد مکان را مشخص می‌کند و M نشان‌دهنده تعداد سرعت‌های گسسته است) معرفی شد. یکی از شبکه‌های استاندارد برای مسائل دو بعدی شبکه $D_2 Q_9$ است که در شکل (۱-۱) این شبکه آورده شده است.



شکل (۱-۱) شبکه بولتزمن $D_2 Q_9$

ملاحظه می‌شود که در این شبکه، هر گره می‌تواند از هشت مسیر مختلف (لینک) با گره‌های مجاورش ارتباط برقرار کند. احتمال حضور ذره در مرکز هر گره با f_0 و در لینک‌های مختلف با f_1 تا f_8 نشان داده می‌شود. در این مدل، سرعت ذراتی که در مسیرهای عمودی و افقی حرکت می‌کنند برابر با c و سرعت ذراتی که در مسیرهای قطری در حرکت هستند برابر با $\sqrt{2}c$ در نظر گرفته می‌شود. ذره مقیم در مرکز هر گره، ساکن و سرعت صفر دارد.

با گسسته سازی رابطه (۸-۱) نسبت به زمان می‌توان به رابطه (۹-۱) رسید [۶].

$$f_\alpha(r + e_\alpha t, t + \delta t) - f_\alpha(r, t) = -\frac{1}{\tau_v} [f_\alpha(r, t) - f_\alpha^{eq}(r, t)] + F \delta t \quad (9-1)$$

با وجودی که گسسته سازی در فضای مکان و زمان از مرتبه یک می باشد، اما دقت شبکه بولتزنم از مرتبه دو در مکان و زمان است [۳]. در معادلات معمول شبکه بولتزنم گسسته سازی مکان و زمان با هم ارتباط دارند زیرا اندازه شبکه طوری انتخاب می شود که $\delta x = c\delta t$ که δx و δt به ترتیب گام مکانی و گام زمانی شبکه هستند. در حالت کلی سرعت صوت در شبکه به صورت رابطه (۱۰-۱) تعریف می شود [۷].

$$c_s^2 = \frac{1}{D} c^2 \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \omega_{\alpha} \xrightarrow{D_2Q_9} c_s^2 = \frac{1}{3} c^2 \quad (10-1)$$

الگوریتم شبکه بولتزنم را می توان به دو مرحله مجزا تقسیم نمود: مرحله برخورد^۱ و مرحله جاری شدن^۲. مرحله برخورد از یک زمان بی نهایت کوچک قبل از برخورد شروع شده و تا یک زمان بی نهایت کوچک پس از برخورد را در بر می گیرد. در صورتی که آرایش ذرات بلافاصله قبل از برخورد داده شده باشد، می توان با استفاده از قواعد برخورد، آرایش ذرات بلافاصله پس از برخورد را تعیین نمود. مرحله جاری شدن بلافاصله پس از مرحله برخورد شروع شده و تا رسیدن ذرات مجازی به نزدیکی گره مجاور ادامه پیدا نموده که منجر به تغییر آرایش ذرات در گره های مجاور می گردد.

برای شبکه D_2Q_9 می توان f_{α}^{eq} را به صورت رابطه (۱۱-۱) نوشت [۶].

$$f_{\alpha}^{eq} = \rho \omega_{\alpha} \left(1 + \frac{3(\bar{e}_{\alpha} \cdot \bar{u})}{c^2} + \frac{9(\bar{e}_{\alpha} \cdot \bar{u})^2}{2c^4} - \frac{3|\bar{u}|^2}{2c^2} \right) \quad (11-1)$$

که جهت های e_{α} به صورت زیر تعریف شده اند.

$$\bar{e}_0 = (0, 0) \quad \text{برای } i=0$$

$$\bar{e}_{\alpha} = c \left(\cos \frac{(i-1)\pi}{2}, \sin \frac{(i-1)\pi}{2} \right) \quad \text{برای } i=1, 2, 3, 4$$

$$\bar{e}_{\alpha} = c\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \sin \left(\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad \text{برای } i=5, 6, 7, 8$$

همچنین ضرایب وزنی ω_{α} برای این شبکه به صورت رابطه (۱۲-۱) به دست می آیند.

1 Collision stage
2 Streaming stage

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{4}{9} \\ \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{9} \\ \omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = \frac{1}{36} \end{array} \right. \quad (12-1)$$

می‌توان c را هر عددی در نظر گرفت. عموماً c مساوی یک انتخاب می‌شود. در این صورت رابطه (11-1) به صورت رابطه (13-1) در می‌آید.

$$f_0^{eq} = \frac{4\rho}{9} \left(1 - \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\right)$$

$$f_1^{eq} = \frac{\rho}{9} \left(1 + 3u + \frac{9}{2}u^2 - \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\right)$$

$$f_2^{eq} = \frac{\rho}{9} \left(1 + 3v + \frac{9}{2}v^2 - \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\right)$$

$$f_3^{eq} = \frac{\rho}{9} \left(1 - 3u + \frac{9}{2}u^2 - \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\right)$$

$$f_4^{eq} = \frac{\rho}{9} \left(1 - 3v + \frac{9}{2}v^2 - \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\right)$$

$$f_5^{eq} = \frac{\rho}{36} \left(1 + 3(u+v) + \frac{9}{2}(v^2 + u^2 + 2uv) - \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\right) \quad (13-1)$$

$$f_6^{eq} = \frac{\rho}{36} \left(1 + 3(-u+v) + \frac{9}{2}(v^2 + u^2 - 2uv) - \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\right)$$

$$f_7^{eq} = \frac{\rho}{36} \left(1 - 3(u+v) + \frac{9}{2}(v^2 + u^2 + 2uv) - \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\right)$$

$$f_8^{eq} = \frac{\rho}{36} \left(1 + 3(u-v) + \frac{9}{2}(v^2 + u^2 - 2uv) - \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\right)$$

همچنین ثابت می‌شود که τ_v زمان آسودگی به صورت زیر است [5].

$$\tau_v = \left(3v \frac{\delta t}{\delta x^2} + \frac{1}{2}\right) \quad (14-1)$$