بسم الله الرحمن الرحيم

وبه نستعين

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد مدرسی ریاضی

موضوع

یکنواختی‌های مدور روی فضاهای باناخ

استاد راهنما

جناب آقای دکتر عبدالحمید ریاضی

استاد مشاور

جناب آقای دکتر محمدعلی پورعبداله نژاد

نگارش

محمد موسایی

پاییز ۱۳۷۲

تقدیم به:

پدرم که با سوختن وجودش حیاتم را تضمین نمود...

تقدیم به:

مادرم که محبت در قیاس با او عرق شرم بصورت دارد...

تقدیم به:

برادرم که بهترین روشنگر راهم بود...

به‌نام خدا

سپاس و تقدیر

منت خدای را که خرد از بیان شأنش قاصر و قلم از توان وصفش، عاجز است اوست که بر خلقت مکان قامت افراشت و به آیت کن فیکون آسمان و زمین را آفرید آنگاه به شراب عشق خمیر جان را سرشت و به شاهد علم‌الأنسان ما لم یعلم، به تأدیب او همت گماشت تا بدین نشان از بهایم تمایز یابد.

بر این باور بار دیگر در این وادی شتافتم و جرعه‌ای ناچیز از زلال بی‌کران این دیار نوشیدم، شایدکه بدین نشئت اندکی از عطش وجود را خاموش و غباری از این آئینه را پاک نمایم.

همچنین در این راه به شاگردی اساتیدی گرانمایه مفتخر گردیده و در پرتو هدایت آنها به صراط مقصود راه یافتم، که شرط ادب و حکم شرع ایجاب نمود تا تقدیر قلبی خود را نیز به زبان جاری نمایم.

من لم‌یشکر المخلوق لم‌یشکر الخالق

لذا از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر عبدالحمید ریاضی که راهنمائی این پایان‌نامه را برعهده داشتند و در تمامی مراحل تدوین آن به یاری‌ام شتافتند، نهایت سپاس و تشکر را دارم.

همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمدعلی پورعبداله‌نژاد که منت نهاده و علیرغم مشاورت، راهنمایی این پایان‌نامه را در غیاب جناب آقای دکتر عبدالحمید ریاضی تقبل فرمودند، به لسانی الکن سپاسگزارم.

همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر علی وحیدیان کامیاد که زحمت مطالعه این پایان‌نامه را تقبل نمودند و با شرکت در جلسه‌دفاعیه موجب افتخار اینجانب گردیدند، سپاس فراوان دارم.

همچنین از مدیریت محترم گروه ریاضی جناب آقای دکتر سیدمحمدباقر کاشانی و نیز از معاونت محترم پژوهشی دانشکده علوم‌پایه جناب آقای دکتر محمد حسینی علی‌آبادی که از انجام هرگونه محبتی دریغ نفرموده و نهایت همکاری را در تمامی مراحل تدوین این پایان‌نامه را داشته‌اند نهایت سپاس را دارم.

چکیده

در این رساله برخی از فضاهای باناخی که دارای خاصیت یکنواختی هستند معرفی و مورد بررسی قرار می گیرند. که از جمله می توان به فضاهای باناخ بطور یکنواخت هموار، یکنواخت مدور موضعی (ضعیف)، یکنواخت مدور (UR)، تقریبا" یکنواخت مدور (NUR)، Δ ـ یکنواخت مدور ($\Delta-UR$) و نیز فضاهای باناخی که دارای خاصیت یکنواختی α ($U\alpha$) و یکنواختی k-k (UKK) هستند اشاره نمود. که هریک از فضاهای مذکور دارای خواص جالبی هستند که برخی از این خواص در ذیل آورده شده است.

ـ کره واحد هر فضای یکنواخت مدور موضعی ضعیف، شامل هیچ قطعه خط غیربدیهی نیست.

ـ هر فضای باناخی که فضای دوگان، دوگان آن یکنواخت مدور موضعی ضعیف باشد، انعکاسی است.

ـ یک فضای باناخ بطور یکنواخت هموار است اگر و تنها اگر فضای دوگان آن یک فضای یکنواخت مدور باشد.

ـ هر فضای باناخ یکنواخت مدور، انعکاسی است.

ـ هر زیرمجموعه، بسته، محدب و غیرتهی از یک فضای باناخ یکنواخت مدور، شامل یک عنصر منحصربفرد با نرم کمینه می باشد.

ـ هر فضای باناخ متناهی البعد یک فضای باناخ تقریبا" یکنواخت مدور می باشد.

ـ ارتباط بین فضاهای باناخ (UR)، (NUR)، ($\Delta-UR$)، ($U\alpha$) و (UKK) به شکل زیر می باشد:

$$(UR) \Longleftrightarrow (NUR) \Longleftrightarrow (\Delta-UR) \Longleftrightarrow (U\alpha) \Longleftrightarrow$$ ((UKK) و انعکاسی)

ـ به طریق دیگری ثابت می شود که برای $1 < p < +\infty$ فضاهای باناخ L_p و

ℓ^p ، انعکاسی اند .

هم چنین در این رساله یکنواختی های مدور در فضاهای باناخ تعمیم یافته مورد بررسی قرار گرفته و نتایج جالبی حاصل شده است که برخی از این نتایج در ذیل آورده شده است .

ـ فرض کنید ($\| \ \|$ و Y) یک فضای باناخ با پایه‌ء $\{ e_i \}_{i \in I}$ (اگر I شمارش ناپذیر باشد ، $\{ e_i \}_{i \in I}$ یک پایه‌ء غیرشرطی است) باشد و فرض کنید $\{ X_i \}_{i \in I}$ خانواده‌ای از فضاهای باناخ متناهی البعد باشد . در این صورت اگر Y ، (UKK) باشد آنگاه ($i \in I$ و X_i) Y ، (UKK) است .

ـ فرض کنید $1 \leqslant p < +\infty$ و $\{ X_n : n \in \mathbb{N} \}$ خانواده‌ای از فضاهای باناخ متناهی البعد باشد ، در این صورت (... و $\ell^p(X_1$ ، (UKK) است .

ـ فضای خارج قسمتی هرفضای باناخ ($U\alpha$) نیز ($U\alpha$) است .

ـ فرض کنید $1 \leqslant p < +\infty$ و X_1 و X_2 و ... و X_n فضای باناخ ($U\alpha$) باشند . در این صورت ($\| \ \|_p$ و $X_1 \alpha X_2 \alpha \cdots \alpha X_n$) ، ($U\alpha$) است .

محمد موسایی

پاییز ۱۳۷۲

فهرست مطالب

+++++++++++

مقدمه

این رساله با موضوع "یکنواختی های مدور روی فضاهای باناخ" در چهار فصل تهیه و تنظیم گردیده که افراد زیادی در رابطه با این موضوع به تحقیق و پژوهش پرداخته اند که از آن جمله می‌توان به افراد ذیل اشاره نمود.

Rolewicz, Huff, Clarkson به ترتیب فضاهای باناخ یکنواخت مدور (Uniform Rotundity) در سال ۱۹۳۶، فضاهای باناخ تقریبا "یکنواخت مدور (Nearly Uniform Rotundity) در سال ۱۹۸۰ و فضاهای باناخ Δ ـ یکنواخت مدور (Δ - Uniform Rotundity) در سال ۱۹۸۷ را مورد مطالعه و بررسی قرار داده اند. و نیز [illegible] V. Montesion و R. J. Torregrosa در سال ۱۹۹۲، برخی از خواص یکنواختی های مدور را روی فضاهای باناخ تعمیم یافته، مورد تحقیق و پژوهش قرار داده اند.

همانطورکه ذکر شد این رساله در چهار فصل تنظیم گردیده که مطالب به تفکیک فصول عبارتند از:

فصل اول ــ مروری بر آنالیز تابعی

فصل دوم ــ در این فصل فضاهای باناخ یکنواخت مدور (UR) موضع " یکنواخت مدور و نیز فضاهای باناخ هموار و بسیار هموار معرفی میگردند و همچنین ارتباط بین آنها و قضایای مربوط به آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل سوم ــ در این فصل فضاهای باناخ تقریبا "یکنواخت مدور (NUR) فضاهای باناخ Δ ــ یکنواخت مدور (Δ - UR) و نیز فضاهای باناخ (UKK) معرفی میگردند و نیز قضایایی در ارتباط با فضاهای باناخ مذکور بیان و ثابت می‌شوند. همچنین ثابت می‌شود که ارتباط بین فضاهای باناخ مذکور و فضای باناخ به شکل زیر می‌باشد.

$$(UR) \Longrightarrow (NUR) = (\Delta\text{-}UR) = (U\alpha) = ((UKK) + \text{انعکاسی})$$

فصل چهارم ــ در این فصل برخی از خواص یکنواختی های مدور، روی فضاهای باناخ تعمیم یافته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل اول

تعاریف و مقدمات

۱ــ۱ــفضا های نرمدار ، فضا های باناخ وعملگرهای خطی

۱ــ۱ــ۱ تعریف

فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان F $(F = \mathbb{C}$ یا $F = \mathbb{R})$ باشد

تابع $P : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک شبه‌فرم‌نا میم‌هرگاه :

الف ــ برای‌هر $x, y \in X$ داشته‌باشیم

$$P(x+y) \leq P(x) + P(y)$$

ب ــ برای هر $x \in X$ وهر $\alpha \in F$ داشته‌باشیم

$$P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$$

۱ــ۱ــ۲ــ تعریف :

فرض کنید P یک شبه‌نرم‌روی فضای خطی X باشد ،درا ین صورت P را یک نرم‌می‌نا میم‌هرگاه‌داشته‌باشیم :

$$P(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

اگر P یک نرم‌روی فضای خطی X باشد ،آنرا به $\| \ \|$ نمایش می‌دهیم‌ودا ریم :

الف ــ برای هر $x \in X$ ، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

ب : (نا مساوی مثلث)

$$\forall x, y \in X : \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ج :

$$\forall x \in X, \forall \alpha \in F : \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

۱ــ۱ــ۳ــ تعریف :

فرض کنید X یک فضای خطی باشدو $\| \ \|$ یک نرم‌روی X باشد ،درا یــن صورت X را یک فضای نرمدا رمی‌نا میم‌وبه $(X, \| \ \|)$ نمایش می‌دهیم‌ویا بــــه طورمختصرگوئیم X یک فضای نرمدا راست .

لازم

تبصره : فرض کنید X یک فضای خطی نرمدا ربا $\| \ \|$ باشددرا ین صـــــــــورت

تابع $d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ که با ضابطهٔ

$$\forall x,y\in X \quad : d(x,y)=\|x-y\|$$

تعریف می‌شود، یک متریک روی X است. بنابراین هرفضای نرمدار یک فضای متریک نیز می‌باشد، d را متریک تولیدشده بوسیله نرم می‌نامیم.

قرارداد: فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد مجموعه های

$$B_1^\circ(X)=\{x\in X: \|x\|<1\} \quad \text{و} \quad B_1(X)=\{x\in X: \|x\|\leqslant 1\}$$

را به ترتیب گوی های بسته وباز یکه می‌نامیم وهمچنین $S(X)=\{x\in X: \|x\|=1\}$ را کره واحد می‌نامیم.

۱-۱-۴- تعریف :

فرض کنید X یک فضای نرمدار و d متریک تولیدشده بوسیله نرم باشد. دراین صورت X را یک فضای باناخ[1] می‌نامیم هرگاه (X, d) یک فضای تام باشد.

۱-۱-۵- تعریف

فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای درفضای نرمدار X باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ را در X همگرا به s $(s\in X)$ گوئیم هرگاه دنباله $s_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$، به s همگرا باشد و می‌نویسیم $s=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ را همگرای مطلق می‌نامیم هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty$.

۱-۱-۶- قضیه :

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، X یک فضای باناخ است اگر و تنها اگر هرسری همگرای مطلق، همگرا باشد.

---

1. Banach

۱-۱-۷- مثال :

الف- اگر (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد و $1 \leq p < +\infty$ ، $L_p(X)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$L_p(X) = \{ f : X \longrightarrow F : \int_X |f|^p d\mu < +\infty \text{ و } f \text{ اندازه‌پذیر} \}$$

برای هر $f \in L_p(X)$ قرار می‌دهیم

$$\|f\| = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

دراین صورت $L_p(X)$ با جمع وضرب اسکالر معمولی و $\| \;\; \|$ یک فضای خطی نرمدار می‌باشد و با توجه به (۱-۱-۶) $L_p(X)$ یک فضای باناخ می‌باشد .

ب- اگر در (الف) $X = \mathbb{N}$ و $S = P(\mathbb{N})$ و μ را اندازه شمارشی انتخاب کنیم آنگاه $L_p(\mathbb{N})$ به ℓ^p یعنی فضای تمام دنباله‌های $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ با جمع وضرب اسکالر معمول دنباله‌ها و با نرم $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ تبدیل می‌شود و بعنوان حالت خاصی از مثال (الف) ، ℓ^p نیز یک فضای باناخ می‌باشد .

۱-۱-۸- مثال :

الف- اگر (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد $L_\infty(X)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L_\infty(X) = \{ f : X \longrightarrow F : \text{نسبت به اندازه } \mu \text{ تقریباً همه جا کراندار باشد } f \}$$

و

$$\forall f \in L_\infty(X) \quad \|f\|_\infty = \inf \{ M > 0 : \mu\{t : |f(t)| > M\} = 0 \}$$

دراین صورت $L_\infty(X)$ باجمع وضرب اسکالر معمولی و $\| \;\; \|_\infty$ یک فضای باناخ می‌باشد .

ب ــ اگردرمثال (الف) $X = \mathbb{N}$ و $S=P(\mathbb{N})$ و μ اندازه‌شمارشی‌درنظر بگیریم آنگاه $L_\infty(\mathbb{N})$ تبدیل به ℓ^∞ می‌شود ،بنابراین

$$\ell^\infty = \{ x = \{x_1, \dots\} : \quad \|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < +\infty \}$$

همراه‌با جمع وضرب اسکالرمولفه‌وار و $\| \ \|$ یک فضای باناخ‌می‌باشد .

۱ــ۱ــ۹ــ تعریف

فرض‌کنید (X, d) یک فضای متریک باشد ، X را تفکیک پذیرگوئیم هرگاه‌زیرمجموعه‌ای شمارش پذیراز X مانند A موجودباشدبطوری که $\overline{A} = X$.

۱ــ۱ــ۱۰ــ تعریف :

فرض‌کنید X یک فضای نرمدارباشدو $A \subseteq X$ ، دراین صورت A را کراندارگوئیم‌هرگاه :

$$\exists M > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad : \|x\| \leqslant M$$

۱ــ۱ــ۱۱ــ قضیه :

برای $1 \leqslant p < +\infty$ ، ℓ^p تفکیک پذیراست.

برهان :

$x = \{x_1, x_2, \dots\} \in \ell^p$ راگویانامیم هرگاه اگر $F = \mathbb{R}$ آنگاه‌هر x_n گویاباشدواگر $F = \mathbb{C}$ آنگاه‌قسمتهای حقیقی‌وموهومی هر x_n گویاباشند

همچنین $x = \{x_1, x_2, \dots\} \in \ell^p$ رامتناهی گوئیم‌هرگاه‌مجموعه $\{n : x_n \neq 0\}$

متناهی باشد

فرض کنید $A = \{ x \in \ell^p :$ گویا ومتناهی است $x \}$

چون مجموعه‌اعداد گویا شمارش‌پذیر است بنابراین A شمارش‌پذیرمی‌باشد .

حال ثابت می‌کنیم $\bar{A} = \ell^p$.

فرض کنید ε داده‌شده‌باشد و $x = \{x_1, x_2, \dots\} \in \ell^p$ دلخواه‌باشد. بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$$

پس $N_0 \in \mathbb{N}$ ای موجوداست بطوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > N_0 \implies \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

$y = \{y_1, y_2, \dots\}$ را بصورت زیراختیار می‌کنیم

اگر $n > N_0$ قرار می‌دهیم $y_n = 0$.

اگر $1 \leqslant n \leqslant N_0$ ، y_n راطوری انتخاب کنیم‌که :

$$|y_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{(2N_0)^{1/p}} .$$

دراین صورت داریم :

$$\|x-y\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p = \sum_{n=1}^{N_0} |x_n - y_n|^p + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$$

$$= \sum_{n=1}^{N_0} |x_n - y_n|^p + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |x_n|^p < N_0 \frac{\varepsilon^p}{2N_0} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

بنابراین

$\|x-y\| < \varepsilon$ یعنی $\bar{A} = \ell^p$.

۱-۱-۱۲ – قضیه :

فرض کنید X و Y دوفضای نرمداربا شندو $T: X \longrightarrow Y$

یک عملگرخطی باشددراین صورت‌گزاره‌های‌زیربا هم‌معادلند :

الف – T پیوسته‌است .

ب – T دریک نقطه‌پیوسته‌است .

ج ـ T درصفرپیوسته است

د ـ اگر $B_1(X)$ در X بسته باشد آنگاه $T(B_1(X))$ در Y کراندار است

هـ ـ $k>0$ ای موجود باشد بطوری که برای هر $x\in X$ ، $\|Tx\|\leqslant k\|x\|$.

برهان . مراجعه کنید به (۱) .

۱ـ۱ـ۱۳ـ تعریف :

فرض کنید X و Y دوفضای نرمدار باشند و $T:X\longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد ، دراین صورت T را کراندار گوئیم هرگاه $K>0$ ای موجود باشد بطوری که :

$$\forall x\in X \;:\; \|Tx\|\leqslant K\|x\|$$

۱ـ۱ـ۱۴ـ نتیجه :

اگر X و Y دوفضای نرمدار باشند و $T:X\longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد ، دراین صورت T کراندار است اگروتنها اگر T پیوسته باشد

۱ـ۱ـ۱۵ـ تعریف :

فرض می‌کنیم X و Y دوفضای نرمدار و $T:X\longrightarrow Y$ یک عملگرخطی کراندار باشد ، نرم T را به‌صورت $\|T\|=\sup\{\|Tx\|:\|x\|\leqslant 1\}$ تعریف می‌کنیم .

۱ـ۱ـ۱۶ـ قضیه :

فرض کنید X و Y دوفضای نرمدار و $T:X\longrightarrow Y$ یک عملگر