دانشگاه پیام نور مشهد

پایان‌نامه

جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ ریاضی محض

عنوان:

اختلال عملگرهای با برد بسته

استاد راهنما:

دکتر صدیقه شادکام تربتی

استاد مشاور:

دکتر محمد صال مصلحیان

نگارش :

زهره فنودی

پاییز ۱۳۸۹

Payame Noor University

Department of Science

Perturbation of Closed Range Operators

By:

Zohreh Fanoody

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of M.Sc in Pure Mathematics

Supervisor:

Dr. S. Shadkam

Advisor:

Dr. Mohammad Sal Moslehian

2010

تقدیم به

الله که مرا آفرید

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

همسر عزیزم

و استاد گرانقدرم

قدردانی

حمد و سپاس پروردگاری را سزاست که به من توفیق تحصیل عنایت فرمود که اگر پرتو فضل او نبود هرگز موفق به انجام این مهم نمی‌شدم.

سپاس و تقدیر بی‌پایان خود را تقدیم استاد راهنمای بزرگوارم سرکار خانم دکتر صدیقه شادکام تربتی می‌نمایم که بدون نظارت صبورانه ایشان در مراحل مختلف تحقیق و تدوین پایان نامه به انجام رساندن دوره غیرممکن بود و همواره افتخار بهره مندی از راهنماییهای ایشان را داشته ام . همچنین از استاد مشاور گرانقدر آقای دکتر محمد صال مصلحیان‌و خانم دکتر ثریا طالبی داور بزرگوار این پایان نامه سپاسگزارم .دستان پرمهر همه این عزیزان را می‌بوسم و از خداوند بزرگ برایشان سلامت و طول عمر مسألت دارم . ازمادر عزیزم بسیار سپاسگزارم که همیشه مشوق من دراین راه بوده‌اند وهمچنین همسر مهربانم که صبورانه مرا یاری کرده اند.

در نهایت از همه کسانی که به نوعی بر گردن بنده حقی دارند سپاسگزارم.

زهره فنودی — مهر ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

خلاصه

هدف از انجام این رساله مطالعه اختلال عملگرهای با برد بسته است. در ابتدا مفهوم پایداری هایرز ـ الام روی فضاهای خطی و فضاهای نرمدار را معرفی کرده سپس با معرفی عملگر T ـ کراندار ارتباطی بین آنها و پایداری هایرز ـ الام برقرار می کنیم .

پیش گفتار

در سال ۱۹۴۰ الام[۱] (فصل ۵ [۳۹]) برای اولین بار مسأله پایداری معادلات تابعی را مطرح کرد. در واقع الام سؤال خود را به صورت زیر مطرح کرد

« آیا برای هر گروه متریک G، هر ε ـ خودریختی[۲] لزوماً نزدیک به یک خودریختی اکید از G است . »

یک سال بعد هایرز[۳] [۱۵] یک جواب مثبت برای مساله الام در فضاهای باناخ ارائه نمود . در واقع هایرز ثابت کرد که هر نگاشت ε ـ جمعی[۴] روی فضاهای باناخ لزوماً نزدیک به یک نگاشت جمعی است. در سال ۱۹۵۰ آاوکی[۵] [۲] قضیه هایرز را برای نگاشتهای جمع پذیر توسعه داد. در سال ۱۹۷۸ راسیاس[۶] [۳۱] نامعادله تابعی جدیدی را معرفی کرد و موفق به توسیع نتیجه هایرز برای تفاضل کشی بی کران شد و قضیه زیر را برای نگاشتهای خطی ثابت کرد که در حالت $p = ۰$ قضیه هایرز است.

فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ فضای باناخ حقیقی باشند. فرض کنید $f : E_۱ \to E_۲$ یک نگاشت

[۱] S.M.Ulam

[۲] $\varepsilon-$automorphism

[۳] D.H.Hyers

[۴] $\varepsilon-$additive

[۵] T.Aoki

[۶] Th. M. Rassias

باشد به طوری که برای هر $x \in E_1$، تابع $t \mapsto f(tx)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. اگر یک $\theta > 0$ و $p \in [0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in E_1$ ؛

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right),$$

در این صورت یک نگاشت منحصر به فرد خطی مانند $T : E_1 \to E_2$ موجود است به طوری که برای هر $x \in E_1$ ،

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \frac{\theta}{1 - 2^{p-1}}\|x\|^p.$$

این نتیجه پایداری که توسط راسیاس ، در مقاله ۱۹۷۸ [۳۱] ، مطرح و اثبات شده بود ، تأثیر و گسترش آن چنان عمیقی در نظریه معادلات تابعی داشته است که به پدیده پایداری هایرز ـ الام ـ راسیاس شهرت دارد.

در سال ۱۹۹۰ راسیاس در بیست و هفتمین سمپوزیم بین المللی معادلات تابعی [۳۲] پرسید چه وقت قضیه فوق را می‌توان برای حالت $p \geq 1$ ثابت کرد. در سال ۱۹۹۱ گایدا[۷] [۱۲] قضیه راسیاس را برای حالت $p > 1$ ثابت نمود.

گایدا، و مستقل از او راسیاس و شمرل[۸] [[۳۳] قضیهٔ ۲] نشان دادند که درحالت $p = 1$ قضیه فوق برقرار نمی‌باشد. با در نظر گرفتن $\|0\|^p = \infty$ قضیه راسیاس برای حالت $p < 0$ نیز درست است.

در چند دههٔ اخیر مسأله پایداری معادلات تابعی توسط ریاضیدانان زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. این نتایج کاربردهای فراوانی در نظریه اطلاعات، فیزیک، نظریه اقتصاد و هم

---

[۷] Z.Gajda

[۸] P.Šemrl

چنین در علوم اجتماعی دارد، [۹، ۱۰، ۲۰، ۱].

در حدود ۲۰سال قبل مقالاتی در رابطه با نظریه اختلال ارائه گردید. در آن مقالات ریاضیدانان موضوع زیر را مورد بررسی قرار دادند.

« چه وقت یک شئ ریاضی که به طور تقریبی در یک خاصیت صدق می‌کند لزوماً نزدیک به یک شیئی است که دقیقاً در آن خاصیت صدق می‌کند .»

تعدادی از این نتایج در مراجع [۱۹، ۱۸] توصیف شده اند.

مسئله پایداری نگاشتهای یکمتری از جمله مسائل با اهمیت و پیچیده در این حوزه می باشد که توسط ریاضیدانانی مانند راسیاس وشمرل و جونگ[۹] به طور جداگانه مورد مطالعه قرار گرفته است [۳۴، ۳۷، ۱۹].

دکتر مصلحیان و دکتر میرزاوزیری پایداری متعامد معادلات تابعی کشی و درجه دوم از نوع پکسیدر را به روش نقطه ثابت در مقالات [۲۸، ۲۳] اثبات کردند.

مسئله پایداری معادلات تابعی روی جبرهای باناخ نیز مطرح شده است، از جمله کارهایی که اخیرا انجام شده است می توان به مقالات دکتر مصلحیان و دکتر اسحاقی و همکارانشان که در رابطه با پایداری همریختیها و اشتقاقها روی جبرهای باناخ سه تایی است اشاره کرد [۵، ۳].

پایداری معادلات تابعی روی فضاهای نرم دار احتمالی و فضاهای نرم دار تصادفی نیز از جایگاه ویژه ای برخوردار است. اخیرا مقالات متنوعی در این حوزه منتشر شده است که می توان به مقالات دکتر ابراهیمی ویشکی ، دکتر مصلحیان و دکتر واعظ پور و همکارانشان مراجعه کرد[۲۹، ۴] .

این رساله در ۴ فصل نگارش شده است . فصل اول را به بیان مفاهیم اساسی و مقدماتی مورد نیاز در فصل‌های آینده اختصاص داده ایم . فصل دوم پایداری هایرز ـ الام در فضاهای

---

[۹] S.M.Jung

خطی دارای پیمایه را مورد بررسی قرار می دهیم .در فصل سوم ابتدا مفهوم پایداری هایرز ـ الام را برای عملگرهای بسته معرفی می‌نمائیم ، که این مفهوم در سال ۲۰۰۴ توسط میورا[۱۰] و همکارانش تعریف شده است [۱۳]. در واقع آنها ارتباط مناسبی میان پایداری معادلات تابعی و نظریه عملگرها ایجاد نمودند. میورا و همکارانش ثابت کردند اگر T یک عملگر خطی کراندار از فضای باناخ X به توی فضای باناخ Y باشد آنگاه عملگر T دارای پایداری هایرز—الام است اگر و فقط اگر برد عملگر T بسته باشد. دو سال بعد هیراساوا[۱۱] و میورا قضیه فوق را برای عملگرهای بی کران بسته روی فضاهای هیلبرت ثابت کردند .دکتر مصلحیان و دکتر صادقی به کمک این مفهوم اختلال عملگرهای خطی بی کران بسته را روی فضاهای هیلبرت مورد مطالعه قرار داده اند [۲۷] ، که در فصل چهارم که اصلی ترین فصل این پایان نامه است به آن می پردازیم .

مرجع اصلی این رساله سه مقاله زیر می‌باشند.

O. Hatori, K. Kobayashi, T. Miura, H. Takagi and S. E. Takahasi, On the best constant of Heyers-Ulam stability, J. Nonlinear convex Anal. 5 (2004), 387-393.

G. Hirasawa and T. Miura,Hyers-Ulam stability of a closed operators in a Hilbert space. Bull. Korean. Math. Soc. 43(2006), 107-117.

M. S. Moslehian and Gh. Sadeghi, Perturbation of closed range operators, Turkish J. Math. 33, (2009), 134-149.

[۱۰] T.Miura
[۱۱] G.Hirasawa

فصل ۱

پیش نیازها

مقدمه

در این فصل تعاریف، گزاره‌ها، قضایا و نتایجی را که در فصلهای آینده به آنها نیاز داریم، بیان خواهیم کرد و برهان برخی از آنها را که اساسی بوده و در ضمن خیلی طولانی نیست خواهیم آورد. و در بقیهٔ موارد اثبات را به مراجع مورد استفاده ارجاع خواهیم داد.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ **فضای برداری** [۱] روی میدان اسکالر ϕ مجموعه ای است مانند X که عناصرش را بردار نامیده و در آن دو عمل به نامهای **جمع** [۲] و **ضرب اسکالر** [۳] تعریف شده اند که از خواص جبری آشنای زیر برخوردارند:

آ) به هر جفت از بردارهای x و y در X ، برداری مانند $x+y$ چنان نظیر است که $(x+y)=(y+x)$ و $x+(y+z)=(x+y)+z$ ؛ X بردار منحصر به فردی مانند $\circ$ (**بردار صفر یا مبدأ** X) دارد به طوری که به ازای هر x ، $x+\circ=x$ ؛ وبه ازای هر $x \in X$ بردار منحصر به فردی مانند $-x$ چنان نظیر است که $x+(-x)=\circ$ ؛

ب) به هر جفت (α, x) با $\alpha \in \phi$ و $x \in X$ یک بردار مانند αx چنان نظیر است که

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \qquad , \qquad 1x=x$$

و دو قانون پخشپذیری

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \qquad , \qquad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$

برقرار باشند .[۳۵]

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم τ یک توپولوژی بر فضای X باشد به طوری که :

آ) هر نقطهٔ X ، یک مجموعهٔ بسته باشد ؛ و

[۱] vector space
[۲] addition
[۳] scalar multiplication

ب) اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشند .

در این شرایط گوییم τ یک **توپولوژی برداری** بر X است ، و X یک **فضای برداری توپولوژیک** [۴] می باشد . [۳۵]

تعریف ۳.۱.۱ فضای برداری مختلط X را یک **فضای خطی نرمدار** [۵] نامیم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ چنان مربوط شود که

آ) به ازای هر x و y در X ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ؛

ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ ؛

پ) $\|x\| = \circ$ تساوی $x = \circ$ را ایجاب نماید .

که بنابر نامساوی (آ) و تلفیق با (ب) و (پ) نشان می دهد که هر فضای خطی نرمدار را می توان یک فضای متری گرفت ؛ که فاصله x و y مساوی $\|x - y\|$ است .[۳۵]

تعریف ۴.۱.۱ یک نگاشت بین دو فضای برداری ، بویژه دو فضای نرمدار ، را **عملگر** [۶] نامیم [۲۲] .

تعریف ۵.۱.۱ یک نگاشت از فضای نرمدار X به توی میدان اسکالر $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ را **تابعی** [۷] نامیم . به عبارتی دیگر ، تابعی عملگری است که بردش در خط حقیقی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ قرار دارد . [۲۲]

---

[۴] topological vector space

[۵] normed linear space

[۶] operator

[۷] functional

تعاریف ۶.۱.۱ فرض کنیم f یک تابع حقیقی (یا حقیقی وسعت یافته) بر یک فضای توپولوژیک باشد . اگر

$$\{x : f(x) > \alpha\}$$

به ازای هر αی حقیقی باز باشد ، گوییم f **نیمه پیوسته پایینی** [۸] است . واگر

$$\{x : f(x) < \alpha\}$$

به ازای هر αی حقیقی باز باشد ، گوییم f **نیمه پیوسته بالایی** [۹] می باشد . [۳۶]

تعاریف ۷.۱.۱ فرض کنیم S یک فضای توپولوژیک باشد . در این صورت $E \subset S$ را **هیچ جا چگال**[۱۰] نامیم اگر بست $\overline{E}$ درون تهی داشته باشد . که به طور معادل می توان گفت : بستش شامل زیر مجموعه باز غیر تهی از X نباشد .[۳۶]

تعاریف ۸.۱.۱ مجموعه های از **رستهٔ اول**[۱۱] در S مجموعه هایی هستند که اجتماع شمارش پذیری از مجموعه های هیچ جا چگال می باشند . [۳۶]

تعاریف ۹.۱.۱ هر زیر مجموعه S که از رستهٔ اول نباشد از **رستهٔ دوم** [۱۲] **است** .[۳۶]

lower semicontinuous[۸]
upper semicontinuous[۹]
nowhere dense[۱۰]
first category[۱۱]
second category[۱۲]

تعاریف ۱۰.۱.۱ فضای برداری توپولوژیک X با توپولوژی τ ، را $F-$ فضا نامیم اگر توپولوژی τ آن به وسیله یک متر پایای تام مانند d القاء شده باشد .[۳٦]

۲.۱ احکام مقدماتی در مورد فضاهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ هر **فضای باناخ** [۱۳] یک فضای نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیلهٔ نرمش **تام** می باشد .

قضیه ۲.۲.۱ اگر X فضای باناخ و M زیر فضای بسته‌ای از X باشد آنگاه فضای خارج قسمتی $\frac{X}{M}$ باناخ می باشد .

برهان.
ر.ک.[۷] □

قضیه ۳.۲.۱ اگر X فضای نرمدار باشد و M زیر فضای خطی بسته از X ، و N زیر فضایی متناهی البعد از X باشد آنگاه $M+N$ زیر فضای بسته از X است .

برهان.
ر.ک.[۷] □

---
[۱۳] Banach

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید M یک زیر فضای خطی بسته از فضای نرمدار X باشد و فرض کنید $u_\circ \in X$ و $u_\circ \notin M$. آنگاه یک $f \in X^*$ وجود دارد بقسمی که

$$\langle f, u_\circ \rangle = ۱ \qquad , \qquad \langle f, u \rangle = \circ \qquad (\forall u \in M)$$

و

$$\|f\| = \frac{۱}{dist(u_o, M)}.$$

برهان.

ر.ک.[۷] $\square$

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنید M و N زیر فضاهای خطی بسته از فضای باناخ X باشند . اگر $\dim M > \dim N$ باشد آنگاه یک $u \in M$ وجود دارد به طوری که

$$dist(u, N) = \|u\| > \circ.$$

برهان.

ر.ک.[۲۱] $\square$

۳.۱ قضیه نگاشت باز و چند نتیجه از آن

نگاشتهای باز

فرض کنیم f ، S را به توی T بنگارد که در آن S و T دو فضای توپولوژیک می باشند . گوییم

f در نقطهٔ $p \in S$ **باز است** اگر هر وقت V یک همسایگی p باشد ، $f(V)$ شامل همسایگی از $f(p)$ باشد . همچنین گوییم f **باز است** اگر هر وقت U در S باز باشد ، $f(U)$ در T باز باشد . واضح است که f باز است اگر وفقط اگر در هر نقطه از S باز باشد . به خاطر پایایی توپولوژیهای برداری ،نتیجه می شود که هر نگاشت خطی از یک فضای برداری توپولوژیک به توی دیگری باز است اگر وتنها اگر در مبدأ باز باشد .

قضیه ۱.۳.۱ (**قضیه نگاشت باز**) [۱۴] فرض کنیم

آ) X یک $F-$ فضا باشد ؛

ب) Y یک فضای برداری توپولوژیک باشد ؛

پ) $\Lambda : X \longrightarrow Y$ پیوسته و خطی باشد ؛ و

ت) ΛX از رستهٔ دوم در Y باشد .

در این صورت

آ) $\Lambda X = Y$ ؛

ب) Λ یک نگاشت باز است ؛ و

پ) Y یک $F-$ فضامی باشد .

برهان.

ر.ک. [۳۵] □

[۱۴] Open mapping theorem