بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

روابط متقابل بین فشرده‌سازی داده‌ها و آنالیز هارمونیک

توسط

سید رضی علوی‌زاده

استاد راهنما

سید مسعود امینی

اردیبهشت‌ماه ۱۳۸۷

دانشگاه آزاد اسلامی

دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **سیدرضی علوی‌زاده** رشته ریاضی گرایش (محض) تحت عنوان: «**روابط متقابل بین فشرده‌سازی داده‌ها و آنالیز هارمونیک**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر فرشته سعدی	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مینایی	استادیار	
۵- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	

۱۰۳۹۲۵

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند

«کتاب حاضر حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد/~~رساله دکتری~~ نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض است که در سال ۱۳۸۷ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر سید مسعود امینی ، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴- درصورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس ، تادیه کند.

مادهٔ ۵- دانشجو تعهد و قبول می‌کند درصورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تامین نماید.

مادهٔ ۶- اینجانب سید رضی علوی‌زاده دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: سید رضی علوی‌زاده
تاریخ و امضا: ۸۷/۳/۲۶

۱۳۸۷/۱۸/۲۳

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشند.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸۴/۴/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری خواهد بود.

۸۷/۶/۱۷

۱۳۸۷/۵/۲۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که موفقیتهایم مرهون محبتهای بی‌دریغ ایشان است.

قدردانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظهٔ زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.

امتنان و سپاس می‌گزارم تلاشها، زحمات و راهنمایی‌های ارزشمند و بی‌شائبهٔ استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب دکتر سید مسعود امینی را که با جدیت مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق تشویق می‌نمودند.

همچنین از تمامی اساتید گروه ریاضی که از محضرشان بهره‌مند شده‌ام، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

و در خاتمه از تمامی دوستانم که در کنارشان بودم صمیمانه ممنونم.

سید رضی علوی‌زاده

اردیبهشت ۱۳۸۷

چکیده

این پایان‌نامه براساس کارهای انجام شده در مرجع [۷] می‌باشد. در این پایان‌نامه تمرکز بر روی توابع باندمحدود که برای مدله کردن امواج صوتی استفاده می شوند، می‌باشد. از لحاظ ریاضی تابعی را که تبدیل فوریه آن اندازه‌ای برل و دارای محمل فشرده باشد، تابع باندمحدود می‌نامند. با استفاده از این دید ریاضی است که می‌توانیم ابزارهایی از آنالیز هارمونیک را به کار بندیم و به نتایج بهبودیافته‌ای نسبت به روش‌های دیگر برسیم. در ادامهٔ این فرآیند مسئله را به کوانتیزیشن یک—بیتی محدود می‌کنیم و طرح‌های شناخته شده و کارا در این حالت یعنی طرح‌های سیگما—دلتا را معرفی می‌کنیم، و برای تخمین خطای آنها بهبودهایی را ارائه می‌دهیم. در فصل اول مقدمات و پیشنیازهایی را مطرح می‌کنیم که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده خواهیم کرد، در فصل دوم طرح‌های سیگما—دلتای مرتبه اول را معرفی و تخمین پایه آن را محاسبه می‌کنیم، بعلاوه قضیه نمونه‌گیری کلاسیک را برای کلاس توابع باندمحدود اثبات می‌کنیم، در فصل سوم با استفاده از نظریه توزیع یکنواخت و مجموع‌های نمایی بهبودهایی برای تخمین‌های خطای، ارائه شده در فصل دوم ارائه می‌کنیم و بالاخره در فصل آخر بطور مفصل‌تر طرح سیگما—دلتای مرتبه اول را بررسی و خطای میانگین مربعی آن را محاسبه می‌کنیم.

کلید واژه ها: آنالیز هارمونیک، فشرده سازی، کوانتیزیشن، سیگما - دلتا، نمونه گیری

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ تعاریف و پیشنیازها

در این بخش به تعاریف و پیشنیازهای اولیه‌ای که در فصل‌های آینده به کار می‌روند، اشاره می‌کنیم. در تعریف‌های زیر X یکی از فضاهای $\mathbb{Z}$ یا $[0, 1)$ یا $\mathbb{R}$ را نشان می‌دهد.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم $x : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر باشد، برای $1 \leq p < \infty$ تعریف می‌کنیم،

$$\|x\|_{L^p} := \left(\int |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (۱.۱.۱)$$

در این صورت فضای L^p به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$L^p(X) := \{x : X \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|x\|_{L^p} < \infty \text{ و اندازه‌پذیر } x\}, \qquad (۲.۱.۱)$$

ثابت می‌شود که $\|\cdot\|_{L^p}$ نرمی برای L^p می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید x تابع حقیقی مقدار پیوسته‌ای روی فضای X باشد در این صورت محمل x که آن را با $supp(x)$ نشان می‌دهیم عبارت است از کوچکترین مجموعه بسته‌ای که x

خارج از آن صفر است. یعنی،

$$supp(x) := \overline{\{t : x(t) \neq ۰\}}. \qquad (۳.۱.۱)$$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، در این صورت برای $t \in \mathbb{R}$ تغییر کل φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$Var_{\varphi}(t) := \sup\{\sum_{۱}^{n} |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-۱})| : n \in \mathbb{N},\ -\infty < t_۰ < \cdots < t_n = t\}, \qquad (۴.۱.۱)$$

اگر $\lim_{t\longrightarrow\infty} Var_{\varphi}(t)$ متناهی باشد، آنگاه می‌گوییم φ روی $\mathbb{R}$ از تغییر کراندار است و مجموعه توابع از تغییر کراندار را با BV نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱ اگر $\sum_۰^\infty a_k$ سریی از اعداد باشد آنگاه m−امین میانگین چزاروی این سری عبارت است از میانگین $m + ۱$ جمع‌های جزئی ابتدایی آن، یعنی، $(m + ۱)^{-۱} \sum_۰^m S_n$ که $S_n = \sum_۰^n a_k$. اگر دنباله میانگین‌های چزارو به عددی مانند S همگرا شود می‌گوییم سری جمع‌پذیر چزارو به S است.

تعریف ۵.۱.۱ سیگنال یک−بعدی تابعی از زمان مانند $x(t)$ است. اگر متغیر زمان به صورت پیوسته تغییر کند آنگاه $x(t)$ را سیگنال آنالوگ یا سیگنال پیوسته می‌نامیم، و اگر متغیر زمان روی مجموعه‌ای گسسته تغییر کند آنگاه $x(t)$ را سیگنال گسسته یا سیگنال دیجیتال می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱ به تابع مختلطی که روی کل صفحهٔ مختلط تحلیلی است تابع تام می‌گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ برای $۱ < s < \infty$ تابع زتای ریمان به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\zeta(s) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^s}. \qquad (۵.۱.۱)$$

تعریف ۸.۱.۱ اگر $x \in L^2(\mathbb{R})$ آنگاه تبدیل فوریه‌اش $\hat{x}$ تابعی روی $\mathbb{R}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\hat{x}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt, \qquad (6.1.1)$$

به صورت مشابه تبدیل فوریه $x \in L^2(\mathbb{T})$ تابعی روی $\mathbb{Z}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\hat{x}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) e^{-2\pi i n t}\, dt, \qquad (7.1.1)$$

در این صورت برای $t \in \mathbb{T}$ سری

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) e^{2\pi i n t} \qquad (8.1.1)$$

را سری فوریه x می‌نامیم، و $\hat{x}(n)$ را n–امین ضریب فوریه x می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱ به توابعی حقیقی مقدار که روی خط حقیقی تعریف شده‌اند و تبدیل فوریه‌شان محمل فشرده دارد توابع باندمحدود [1] می‌گویند. بعبارت دیگر، برای $\Omega \in \mathbb{R}$، کلاس $\mathcal{B}_\Omega$ از توابع باند محدود بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$\mathcal{B}_\Omega = \{x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{که } \hat{x} \text{ اندازه برل متناهی است}, supp(\hat{x}) \subseteq [-\Omega, \Omega] \} \qquad (9.1.1)$$

که $\hat{x}$ تبدیل فوریه x را نشان می‌دهد. اگر $x \in \mathcal{B}_\Omega$ باشد، آنگاه قرار می‌دهیم،

$$\omega_0 := \max\{|\omega| \mid \omega \in supp(\hat{x})\}$$

در این صورت $f_m = \frac{\omega_0}{2\pi}$ بالاترین فرکانس x نامیده می‌شود.

مثال ۱.۱.۱ [۱۲] بگیریم

$$sinc(t) := \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \qquad t \neq 0$$

[1] Band limited

و $sinc(0) = 1$ در این صورت،

$$\widehat{sinc}(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leq \pi, \\ 0 & |\xi| > \pi. \end{cases} \qquad (10.1.1)$$

تبدیل فوریه sinc است. لذا sinc تابع باندمحدودی است و بالاترین فرکانس آن $\frac{1}{2}$ است.

تعریف ۱۰.۱.۱ به فرایند اندازه‌گیری مقدار سیگنال پیوسته در هر T واحد از زمان (یامکان) نمونه‌گیری[2] می گویند، بعلاوه، T را بازهٔ نمونه‌گیری، و اعداد حاصل را نمونه می نامند.

تعریف ۱۱.۱.۱ به تعداد نمونه‌هایی که در ثانیه (یا هر واحد دیگر) از سیگنال پیوسته، گرفته می‌شوند نرخ نمونه‌گیری[3] یا چگالی نمونه‌گیری می گویند، و معمولا آن را با f_s نمایش می‌دهند. به بیان دیگر $f_s = \frac{1}{T}$. در سیگنالهای دامنه—زمان که T بر حسب ثانیه بیان می‌شود، نرخ نمونه‌گیری را برحسب هرتز، (Hz) اندازه می گیرند.

نکته ۱.۱.۱ در اینجا نرخ نمونه‌گیری را با λ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ اگر $x \in B_\Omega$ باشد، با اعمال شرط، $\lambda > 2f_m = \Omega/\pi$ می‌توان تابع x را بطور دقیق از نمونه‌هایش در نرخ نمونه‌گیری یکنواخت λ، بازسازی کرد. به این کران پایین، یعنی Ω/π، نرخ نایکیست[4] می گوییم.

تعریف ۱۳.۱.۱ به فرایند تخمین یک دامنه پیوسته از مقادیر بوسیله مجموعه‌ای از مقادیر صحیح یا نمادهای گسسته، کوانتیزیشن[5] می گوییم. به نگاشتی مانند Q که فرایند کوانتیزیشن را بر این دامنه اعمال می‌کند کوانتیزر می گوییم. اگر کوانتیزر بطور مستقل بر بردارهای پیاپی اثر کند کوانتیزیشن را بدون حافظه می گوییم.

---

[2] Sampling

[3] Sampling rate

[4] Nyquist rate

[5] Quantization

تعریف ۱۴.۱.۱ مشخصه کلیدی هر کوانتیزر، بُعد آن است که عدد صحیح مثبتی مانند k است. اگر $k = ۱$ باشد، کوانتیزر را کوانتیزر عددی و در غیر این صورت آن را کوانتیزر برداری می‌نامند.

تعریف ۱۵.۱.۱ به انتخابهای گسسته ممکن، برای یک نمونه در دامنه پیوسته، سطوح کوانتیزیشن[۶] می گویند.

تعریف ۱۶.۱.۱ اگر دامنه سیگنال به M کراندار باشد، می‌توان مجموعه سطوح کوانتیزیشن را بصورت $\{-M, M\}$ در نظر گرفت، که در این حالت آن را کوانتیزیشن ۱ −بیتی[۷] می‌نامند.

تعریف ۱۷.۱.۱ [۱۲] عملگر S روی $\ell^۲$ ، عملگر انتقال یا عملگر تاخیر زمانی[۸] نامیده می‌شود اگر،

$$(Sx)(n) = x(n - ۱), \quad x \in \ell^۲ \ ,$$

عملگر T روی $\ell^۲$ ، زمان پایا[۹] نامیده می‌شود اگر،

$$TS = ST \ ,$$

عملگر T روی $\ell^۲$ ، عملگر خطی نامیده می‌شود، اگر برای هر $x \in \ell^۲$ ،

$$(Tx)(\cdot) = \sum x(k)(T\delta_k)(\cdot).$$

تعریف ۱۸.۱.۱ [۱۲] عملگری خطی که زمان پایا باشد، فیلتر[۱۰] نامیده می‌شود.

---

[۶] Quantization level

[۷] 1-Bit Quantization

[۸] Time-delay operator

[۹] Time-invariant

[۱۰] Filter

قضیه ۱.۱.۱ [۱۲] عملگر H، فیلتر است اگر وفقط اگر دنباله‌ای مانند h یافت شود بطوریکه،

$$Hx = h * x, \quad x \in \ell^{2}. \qquad (11.1.1)$$

نکته ۲.۱.۱ با استفاده از قضیه بالا از این به بعد دنباله h را با فیلتر H یکی می گیریم.

تعریف ۱۹.۱.۱ فیلتر مستطیلی [11] یا پنجره مستطیلی از طول λ، فیلتری است که بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$h_{\lambda}(n) = \frac{1}{\lambda}\chi_{[0,1)}(\frac{n}{\lambda}). \qquad (12.1.1)$$

قضیه ۲.۱.۱ (قضیه نمونه‌گیری شنُن [12]) [۱۲] فرض کنید $x \in L^{2}(\mathbb{R})$، و بعلاوه داشته باشیم،

$$\hat{x}(\xi) = 0, \quad |\xi| > \Omega, \quad \Omega > 0,$$

در این صورت برای $\lambda > \Omega/\pi$ داریم،

$$x(t) = \sum_{n} x(\frac{n}{\lambda}) sinc(\lambda t - n) \ . \qquad (13.1.1)$$

قضیه ۳.۱.۱ اگر $x \in L^{1}(\mathbb{R})$ و $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{x}(2\pi n) < \infty$، آنگاه برای $\lambda > 1$ داریم،

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{n} x(\frac{n}{\lambda}) = \sum_{n} \hat{x}(2\pi\lambda n). \qquad (14.1.1)$$

[11] Rectangular filter

[12] Shannon sampling theorem

اثبات : برای $\lambda < 1$ قرار می‌دهیم $y(t) = x(\frac{t}{\lambda})$، در این صورت بوضوح $y \in L^1(\mathbb{R})$ لذا داریم،

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\ \hat{y}(2\pi\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i(2\pi\xi)t}dt,\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\frac{t}{\lambda})e^{-i(2\pi\xi)t}dt,\\ &= \lambda\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i(2\pi\lambda\xi)t}dt,\\ &= \lambda\sqrt{2\pi}\ \hat{x}(2\pi\lambda\xi), \end{aligned} \tag{۱۵.۱.۱}$$

اکنون از این مطالب و فرض مسئله نتیجه می‌شود، $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{y}(2\pi n) < \infty$ حال شرایط قضیه فرمول جمعی پواسن [۵] برای y برقرار است و بنابراین داریم،

$$\sum_n y(n) = \sum_n \hat{y}(2\pi n), \tag{۱۶.۱.۱}$$

درنتیجه با دوباره نویسی رابطه بالا برحسب x داریم،

$$\frac{1}{\lambda}\sum_n x(\frac{n}{\lambda}) = \sum_n \hat{x}(2\pi\lambda n). \tag{۱۷.۱.۱}$$

و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.■

قضیه ۴.۱.۱ (نامساوی برنشتین[۱۳]) [۱۳] اگر $f \in B_\Omega$ آنگاه،

$$||f^{(s)}||_{L^\infty} \leq \Omega^s ||f||_{L^\infty}. \tag{۱۸.۱.۱}$$

تعریف ۲۰.۱.۱ به اعمال فرایندهای نمونه‌گیری، کوانتیزیشن و رمزگذاری بر یک سیگنال آنالوگ (بعنوان مثال بر یک تابع باند محدود) عمل تبدیل آنالوگ به دیجیتال[۱۴] می گویند.

[۱۳] Bernstein's inequality

[۱۴] A/D conversion

فصل ۲

کوانتیزیشن یک بیتی و طرحهای $\Sigma\Delta$

در ابتدا با طرح مسئله نمایش اعداد حقیقی بازهٔ $[0, 1)$ مسئله تخمین توابع باند محدود ثابت را بررسی می‌کنیم، در ادامه طرحهای $\Sigma\Delta$ را معرفی می‌کنیم که الگوریتم‌هایی را برای تولید چنین تخمین‌هایی برای توابع باند محدود دلخواه ارائه می‌دهند، بعلاوه قضیه نمونه گیری کلاسیک را برای فضای تابعی B_π ثابت می‌کنیم. در آخر به بررسی خطای تخمین طرح‌های $\Sigma\Delta$ مرتبه اول و مراتب بالاتر پایدار می‌پردازیم.

۱.۲ نمایش اعداد حقیقی

مسئله نمایش اعداد حقیقی بازهٔ $[0, 1)$ را بوسیله دنباله‌های دودویی در حالت انتقال پایای زیر در نظر بگیرید:

هر $x \in [0, 1)$ به یک دنباله $q := q_x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ تصویر می شود بطوریکه برای دنباله مناسب $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ که فیلتر بازسازی[1] نامیده می شود، داریم

$$q * h = x \qquad (1.1.2)$$

[1] Reconstruction filter

که $*$ عمل کانولوشن بین دنباله‌ها است، بعلاوه‌در نظر می گیریم $x = (\ldots, x, x, \ldots)$.
نرمالسازی طبیعی برای h به معنی برقراری شرط $\sum_n h(n) = ۱$ می باشد، یعنی اینکه، برای هر x، "چگالی" ۱ها در دنباله وابسته q، برابر با x است. این سبب مي شود که اعداد ۰ و ۱ بترتیب نمایشهای منحصربفرد $(\ldots, ۰, ۰, \ldots)$ و $(\ldots, ۱, ۱, \ldots)$ را داشته باشند، اما برای مقدارهای دیگر x تعداد زيادي نمایش وجود دارد. برای مثال $(\ldots, ۱, ۰, ۱, ۰, \ldots)$ و $(\ldots, ۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۰, ۱, ۱, \ldots)$ دو نمایش برای $\frac{۱}{۲}$ می باشند. زیرا درهر دو مورد انتخابهای مناسبی (و در حقیقت به تعداد فراواني) برای فیلتر بازسازی h وجود دارند بطوریکه رابطه (۱.۱.۲) برقرار باشد. برای نمونه، در مورد اول کافیست h را طوری انتخاب کنیم که $\sum_k h(۲k + i) = \frac{۱}{۲}$ برای $i = ۰, ۱$ برقرار باشد، و در مورد دوم کافیست h را طوری انتخاب کنیم که $\sum_k h(۴k + i) = \frac{۱}{۴}$ برای $i = ۰, ۱, ۲, ۳$ برقرار باشد. خواهیم دید که رابطه (۱.۱.۲) دارای جواب است اگروفقط‌اگر x گویا باشد، و جواب q الزاما یک دنباله متناوب است.

دیدگاه دیگر این است که دنباله ای از فیلترهای $(h_\lambda)_{\lambda > ۰}$ پیدا کنیم بطوریکه وقتی $\lambda \longrightarrow \infty$ آنگاه،

$$q * h_\lambda \longrightarrow x \qquad (۲.۱.۲)$$

بطور یکنواخت، یا حداقل نقطه به نقطه برقرار باشد. شرط نرمالسازی می تواند بصورت $\sum h_\lambda(n) \longrightarrow ۱$ وقتی $\lambda \longrightarrow \infty$ ضعیف تر شود.

نکته ۱.۱.۲ اگر دنباله $(h_\lambda)_{\lambda > ۰}$ که در مسئله بالا انتخاب می‌شود به تابعی در $\ell^۱$ همگرا باشد، آنگاه مسئله (۲.۱.۲) به مسئله (۱.۱.۲) تحویل می‌شود.

اثبات : فرض کنیم برای x مورد نظر دنباله q وجود داشته باشد بطوریکه رابطه (۲.۱.۲) برقرار باشد بعلاوه فرض کنیم $(h_\lambda)_{\lambda > ۰}$ در $\ell^۱$ به تابعی مانند h همگرا باشد یعنی، وقتی $\lambda \longrightarrow \infty$ آنگاه $\|h_\lambda - h\|_{\ell^۱} \longrightarrow ۰$، ثابت می‌کنیم $q * h = x$، بعبارت دیگر رابطه (۲.۱.۲) به

(۱.۱.۲) تحویل می‌شود. داریم،

$$\begin{aligned} |q*h-x| &= |q*h-q*h_\lambda+q*h_\lambda-x|, \\ &\le |q*(h-h_\lambda)|+|q*h_\lambda-x|, \\ &= \left|\sum_k q(n-k)(h(k)-h_\lambda(k))\right|+|q*h_\lambda-x|, \\ &\le \sum_k |h(k)-h_\lambda(k)|+|q*h_\lambda-x|, \\ &= \|h-h_\lambda\|_{L^1}+|q*h_\lambda-x|, \end{aligned}$$

حال با میل دادن λ به ∞ آخرین عبارت بالا به صفر میل می‌کند، لذا نتیجه می‌گیریم $q*h=x$ که حکم را نتیجه می‌دهد.■

ایده سوم این است که نمایش دودویی نیز به λ وابسته باشد یعنی وقتی $\lambda \longrightarrow \infty$ رابطه زیر را داشته باشیم،

$$q_\lambda * h_\lambda \longrightarrow x \qquad (۳.۱.۲)$$

مسئله اصلی ما پیداکردن نمایش های مناسبی است که وقتی $\lambda \longrightarrow \infty$، آنگاه رابطه (۲.۱.۲) یا (۳.۱.۲) به سرعت همگرا شود.

۱.۱.۲ مسئله در شرایط خاص

ابتدا با مسئله خاص‌تر (۱.۱.۲) شروع می کنیم. ادعا می کنیم جواب q موجود است اگروفقط‌اگر x گویا باشد. این ادعا بعنوان نتیجه ای ساده از قضیه زگو[۲] خواهد آمد.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید a یک دنباله در ℓ^∞ باشد آنگاه مجموعه طیفی[۳] a، $\sigma(a)$، مجموعه تمام $\xi \in \mathbb{T}$ است بطوریکه $b*a=0$ $(b \in \ell^1)$ ایجاب کند $\hat{b}(\xi)=\sum_n b(n)e^{-in\xi}=0$.

[۲] Szegö

[۳] Spectral set