دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

زیرمدولهای محض مدولهای ضربی

از:

سیده سپینودعظیمی رشتی

استاد راهنما:

دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی

شهریور ۱۳۸۵

فهرست مطالب

پیشگفتار:

هدف ما در این پایان نامه بررسی تعاریف و قضایا در منبع دو است.این پایان نامه در سه فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

در فصل صفر تعاریف و قضایای مورد نیاز برای فصلهای بعد را می آوریم.به دلیل اینکه اکثر قضایای بیان شده در این فصل در کتابهای مختلف آمده اند، ما از اثبات آنها خودداری کرده و برهان آنها را به منابع مربوطه ارجاع می دهیم.همچنین اثبات برخی قضایا که ممکن است برای خواننده مفید باشد را بیان می نماییم.

در بخش اول فصل اول زیر مدولهای محض مدولهای ضربی را معرفی کرده و با استفاده از قضایای مهم و بنیادی خواص آن را بررسی می کنیم.

در بخش دوم فصل اول به بررسی اشتراک ، جمع و ضرب تانسوری زیر مدولهای محض و نتایج مرتبط با آنها می پردازیم.

در بخش سوم فصل اول مفهوم M-رادیکال را معرفی کرده و قضایایی در مورد M-رادیکال زیر مدولهای محض را عنوان خواهیم کرد.

در فصل دوم ابتدا تعریف اثر زیر مدول محض مدول ضربی را می آوریم و سپس به اثبات چند قضیه می پردازیم که در آنها روابط بین زیر مدول محضN و ایده آل$T(N)$ مشخص شده است.

عنوان پایان نامه: زیرمدولهای محض مدولهای ضربی

نام و نام خانوادگی: سیده سپینود عظیمی رشتی

چکیده:

در این پایان نامه به بررسی زیر مدولهای محض مدولهای ضربی می پردازیم.مفهوم زیر مدول خودتوان را معرفی می کنیم و نشان می دهیم زیر مدول یک مدول ضربی با پوچساز محض ،محض است اگر و تنها اگر خودتوان و ضربی باشد.

همچنین دو تعریف برای اثر زیرمدولهای محض مدولهای ضربی ارایه خواهد شد.

کلید واژه: مدول ضربی ، زیرمدول محض ، زیرمدول خودتوان ، مدول تخت ،مدول تصویری ، رادیکال یک مدول ،اثر یک مدول

فصل صفر:

مقدمات

و

مطالب پیش نیاز

مقدمات و مطالب پیش نیاز:

در این فصل برخی مطالب مورد نیاز برای رساله , به صورت تعاریف و قضایا یادآوری می گردند. در سراسر این رساله R یک حلقه یکدار و جابجایی است و همچنین تمام مدولها را به عنوان R – مدول چپ در نظر خواهیم گرفت مگر اینکه خلاف آن تصریح شود.در ضمن اثبات بعضی قضایا که ممکن است برای خوانندە مفید باشد را بیان می کنیم.

۰–۱ تعریف: فرض کنید X زیر مجموعه ای از R–مدول M باشد.در این صورت اشتراک تمام زیر مدولهایی از M که شامل X می باشند را **زیر مدول تولید شده توسط X** می نامیم.اگر X متناهی باشد و مدول N را تولید کند؛N را با مولد متناهی می گوییم.اگر X={m} در این صورت زیر مدول تولید شده توسط X را دوری می نامیم و آنرا با نماد Rm نمایش می دهیم.

۰–۲ تعریف: فرض کنید M یک R–مدول و N زیر مدولی از آن باشد در این صورت مجموعه **(N:M)** را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(N:M)=\{r\in R \mid rM\subseteq N\}$$

اگر $N=0$ آنگاه $ann_R(M)=(0:M)$ را پوچساز M می نامند.

به وضوح معلوم است که (N:M) یک ایده آل R است و $(N:M)=ann_R(M/N)$. بعلاوه پوچساز $m\in M$ برابر $(0:Rm)$ است.

۰–۳ تعریف: R–مدول M ر ا **باوفا** گوییم هرگاه $ann_R M=0$

۰–٤ تعریف: فرض کنید R حلقه ای یکدار و جابجایی باشد.R –مدول M یک **مدول ضربی** نامیده می شود هرگاه برای هر زیر مدول N از M ؛ ایده آل I از R موجود باشد به قسمی که N=IM . بعلاوه به سادگی می توان دید که $N=(N:M)M$.

۰–۵ **تعریف**: فرض کنید R حلقه ای جابجایی و یکدار باشد.ایده آل I از R را **ایده آل ضربی** گوییم هرگاه برای هر ایده آل $A \subseteq I$،ایده آل B از R موجود باشد به قسمی که داشته باشیم $A = IB$.

۰–٦ **قضیه**:اگر I و J ایده آلهای ضربی باشند آنگاه IJ هم یک ایده آل ضربی است.

برهان:[۵،نتیجه قضیه ۲]

۰–۷ **لم**: فرض کنید K و N دو R–مدول باشند.K یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر $N \cap K = (N:K)K$

برهان: [۱۸،لم ۳,۱]

۰–۸ **قضیه** : فرض کنید I،و J و K ایده آلهای حلقه جابجایی R و $I_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ خانواده ناتهی از ایده آلهای R باشند در این صورت:

الف) $((I:J):K) = (I:JK) = ((I:K):J)$

ب) $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda : K)$

ج) $(J : \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (J : I_\lambda)$

برهان: [۲۱.صفحه ۳۰]

۰–۹ **لم**: فرض کنید R یک حلقه و N زیر مدول R–مدول ضربی بامولد متناهی باوفای M باشد.در این صورت:

الف)N یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر (N:M) یک ایده آل ضربی باشد.

ب) N با مولد متناهی است اگر و تنها اگر (N:M) با مولد متناهی باشد.

ج) N باوفاست اگر وتنها اگر (N:M) پوچساز صفر داشته باشد.

برهان:[۱۵،لم ۱,٤]

۰–۱۰ **لم**: فرض کنید R یک حلقه ،M یک R–مدول ضربی و N زیر مدول بامولد متناهی از M باشد.قرار دهید A=ann(N). در این صورت مدول M/AM با مولد متناهی است.

برهان:[۱۵،لم ۱,۵]

۰-۱۱ نتیجه: فرض کنید R یک حلقه باشد.دراین صورت مدول ضربی M بامولدمتناهی است اگر و تنهااگر برای یک زیرمدول بامولدمتناهی N از M داشته باشیم $annN = annM$

۰-۱۲ قضیه:فرض کنید K و L دو زیر مدول R-مدول M باشند.در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) R=(K:L)+(L:K)

ب) برای هر زیر مدول Nاز M $((K+L):N)=(K:N)+(L:N)$

ج) برای هر زیر مدول Nاز M برای هر زیر مدول Nاز M

$$(N:(K\cap L))=(N:K)+(N:L)$$

برهان:[۲۰،گزاره ٤]

۰-۱۳ لم:فرض کنید M یک R-مدول و KوN به ترتیب زیر مدولهای N و M باشند.در این صورت :

$$(K:N)(N:M)\subseteq(K:M)$$

برهان: فرض می کنیم $x\in(K:N)(N:M)$.دراین صورت $x=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ که $a_i\in(K:N)$

و $b_i\in(N:M)$در نتیجه خواهیم داشت $a_iN\subseteq K, b_iM\subseteq N$پس

$$b_iM\subseteq N\Rightarrow a_ib_iM\subseteq a_iN\subseteq K\Rightarrow a_ib_i\in(K:M)$$

در نتیجه $x\in(K:M)$و از این رابطه داریم $(K:N)(N:M)\subseteq(K:M)$.

۰-۱٤ تعریف: فرض کنید R یک حلقه جابجایی و M یک R-مدول باشد .در این صورت M یک R-مدول حذفی است اگر برای هر ایده آل Iو J از R، IM=JM نتیجه دهد $I=J$.

۰-۱۵ قضیه: فرض کنید A وB ایده آلهایی از حلقه R و M یک R-مدول ضربی با مولد متناهی باشد.در این صورت $AM\subseteq BM$ اگر و تنها اگر $A\subseteq B+ann(M)$.

برهان:[۲۰-نتیجه قضیه ۹]

۰-۱٦ نتیجه: مدولهای ضربی باوفا با مولد متناهی ،حذفی هستند .

برهان: از ۰-۱۱نتیجه می شود.

۰–۱۷ تعریف: زیر مدول N از R–مدول M را یک زیرمدول خودتوان گوییم اگر وتنها اگر $N=(N:M)N$.

۰–۱۸ قضیه: فرض کنید M یک R–مدول ضربی با مولد متناهی با وفا باشد.N یک زیر مدول خودتوان از M است اگر و تنها اگر (N:M) یک ایده آل خودتوان از R باشد.

برهان: فرض کنید N یک زیر مدول خودتوان باشد .در این صورت N=(N:M)N.از طرفی چون M یک مدول ضربی است داریم N=(N:M)M.حال اگر به جای N در رابطه اول (N:M)M را قرار دهیم خواهیم داشت $N=(N:M)(N:M)M=(N:M)^2M$.در نتیجه $(N:M)M=(N:M)^2M$.اما از طرفی بنابر نتیجه ۰–١٦ , M یک مدول حذفی است در نتیجه $(N:M)=(N:M)^2$ و (N:M) یک ایده آل خودتوان خواهد بود.

حال فرض می کنیم (N:M) یک ایده آل خودتوان باشد.در این صورت $(N:M)=(N:M)^2$ در نتیجه به وضوح رابطه زیر برقرار است.

$$N=(N:M)M=(N:M)^2M=(N:M)(N:M)M=(N:M)N$$

و بنابراین N یک زیر مدول خودتوان خواهد بود.

۰–۱۹ قضیه و تعریف: فرض کنید R یک حلقه و N یک زیرمدول R–مدول M باشد.

زیر مدول N را **محض** گوییم هرگاه برای هر ایده آل I از R داشته باشیم : $IN=N\cap IM$

در نتیجه اگر N یک زیر مدول محض M باشد گزاره های زیر برقرارند

الف) برای هر $r\in R$ ، $rM\cap N=rN$.

ب) برای هر R–مدول E، دنباله $0\to N\otimes E\to M\otimes E$ دقیق است.

۰–۲۰ تعریف: R–مدول M تخت است هرگاه برای هر دنباله دقیق کوتاه

$0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ دنباله القا شده

$0\to A\otimes_R M\xrightarrow{f\otimes 1_M}B\otimes_R M\xrightarrow{g\otimes 1_M}C\otimes_R M\to 0$ نیز یک دنباله دقیق باشد.

۰–۲۱ قضیه: فرض کنید P یک R–مدول تخت باشد،و K یک زیر مدول از P .دراین صورت P/K تخت است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده آل با مولد متناهی A داشته باشیم:

$$KA = PA \cap K$$

در این صورت رابطه فوق برای هر ایده آل A برقرار است.

برهان:[۹،نتیجه ۱۱-۳۱]

۰-۲۲نتیجه: M یک R-مدول تخت است. اگر M/N تخت باشد آنگاه زیر مدول N در M محض است.

برهان: [۱۶،صفحه ۵٤]

۰-۲۳ نکته: زیر مدولهای محض مدولهای تخت،تخت هستند.

برهان:[۱۳]

۰-۲٤ قضیه: هر جمعوند مستقیم هر R-مدول ، محض است

برهان:[۱٦]

۰-۲۵ قضیه: اگر M یک R-مدول تخت باشد،آنگاه برای هر زیر مدول N از M گزاره های زیر معادلند:

الف) M/N تخت است.

ب) برای هر ایده آل I از R، $IN = N \cap IM$.

ج) برای هر $r \in R$ ، $rM \cap N = rN$

برهان:[۹،نتایج ۱۱-۳۱و۱۱-۳۳]

۰-۲٦ نتیجه: اگر M یک R-مدول تخت باشد آنگاه برای هر زیر مدول N از M گزاره های زیر معادلند:

الف) زیرمدول N از M محض است هرگاه دنباله $0 \to N \otimes E \to M \otimes E$ برای هر R-مدول E دقیق باشد.

ب) زیرمدول N یک زیرمدول محض M است هر گاه برای هر ایده آل I از R داشته باشیم $IN = N \cap IM$..

ج) زیرمدول N در M محض است اگر برای هر $r \in R$ داشته باشیم $rM \cap N = rN$.

۰-۲۷ قضیه: مدولهای ضربی با پوچساز محض ،تخت هستند..

برهان:[۱، نتیجه ۲,۷]

۰–۲۸ نتیجه: اگر M ضربی و annM یک ایده آل محض از R باشد.به خصوص اگر داشته باشیم M یک مدول ضربی باوفاست گزاره های زیر معادلند:

الف) زیرمدول N از M محض است هرگاه دنباله $0 \to N \otimes E \to M \otimes E$ برای هر R–مدول E دقیق باشد.

ب) زیرمدول N یک زیرمدول محض M است هر گاه برای هر ایده آل I از R داشته باشیم $IN = N \cap IM$.

ج) زیرمدول N در M محض است اگر برای هر $r \in R$ داشته باشیم $rM \cap N = rN$.

۰–۲۹ قضیه: فرض کنید R یک حلقه و M یک R–مدول ضربی است.اگر annM یک ایده آل محض با مولد متناهی باشد آنگاه M یک مدول تخت است.

برهان:[۱،لم ۲،٦]

۰–۳۰ لم: فرض کنید R یک حلقه و $N_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ یک خانواده از زیرمدولهای R–مدول M باشد. قرار دهید $N = \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ و $A = \sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda : N)$.گزاره های زیر را در نظر بگیرید:

۱ –N یک مدل ضربی است .

۲– برای تمام زیر مدولهای H از N، H=AH.

۳ – برای هر $n \in N$، R=A+ann(n)

٤–برای تمام زیر مدولهای K از M و برای هر $n \in N$؛ $(N : K) + ann(n) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda : N) + ann(n)$

۵– برای تمام زیر مدولهای K از M ؛ $K \cap N = \sum_{\lambda\in\Lambda} K \cap N_\lambda$.

در این صورت $5 \Leftarrow 4 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 2 \Leftarrow 1$.اگر همه N_λها ضربی باشند آنگاه ٤ گزاره اول معادلند.

برهان: [۱، لم۱،۱]

۰-۳۱ **قضیه:**فرض کنید R یک حلقه و $N_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ مجموعه ای از زیر مدولهای R-مدول M است و فرض کنید که $N = \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ ضربی باشد.همچنین اگر برای هر λ,γ متعلق به Λ که $\lambda \neq \gamma$ داشته باشیم $N_\lambda \cap N_\gamma$ ضربی است آنگاه همه زیر مدولهای $N_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ ضربی هستند.

برهان:[۱.قضیه ۳,۲]

۰-۳۲ **تعریف:**حلقه R را یک حلقه **منظم وان نیومن** گوییم هر گاه برای هر $a \in R$، عضو $b \in R$ موجود باشد به قسمی که $a = aba$.

۰-۳۳ **تعریف:** R-مدول P پروژکتیو است ،هرگاه برای هر همریختی R-مدولی پوشا مانند $g : B \to C$ و هر همریختی $f : P \to C$ یک همریختی مانند $h : P \to B$ موجود باشد به قسمی که $gh = f$.

۰-۳٤ **قضیه:** فرض کنید R یک حلقه جابجایی یکدار و M یک R-مدول ضربی باوفای با مولد متناهی باشد و همچنین فرض کنید A یک ایده آل ازR و N زیرمدول M باشد.دراین صورت :

الف) N یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر برای هر زیر مدول K از N

$$(K : N)(N : M) = (K : M)$$

ب) برای هر ایده آل I از R، $I = (IM : M)$.

ج) N یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر (N:M) یک ایده آل ضربی باشد.

د) AM یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر A یک ایده آل ضربی باشد..

برهان:[۲۰،قضیه ۱۰]

۰-۳۵ **تعریف:**ایده آل I از حلقه R را **ایده آل اصلی** می نامیم هرگاه عنصر a از R موجود باشد به قسمی که:

$$I = Ra = \{ra \mid r \in R\}$$

۰- ۳٦ **قضیه:** هر ایده آل اصلی به وسیله یک عنصر خودتوان تولید می شود

برهان: [۹.صفحه۵۹]

۰–۳۷ **تعریف:**حلقه R را یک **p.p-حلقه** می نامیم هرگاه هر ایده آل پروژکتیو آن اصلی باشد.

۰–۳۸ **تعریف:** حلقه R یک **f–حلقه** است اگر و تنها اگر هر ایده آل پروژکتیو آن جمع مستقیمی از ایده آلهای با مولد متناهی باشد.

۰–۳۹ **مثال :**فرض کنید R یک p.p-حلقه باشد.در این صورت R یک f–حلقه است.

برهان:[۲۲،مثال ۳,۳]

۰–٤۰ **نکته:**اگر P یک R–مدول پروژکتیو باشد آنگاه برای هر مجموعه $\{I_\alpha\}$ از ایده آلهای R داریم

$$\cap I_\alpha P = (\cap I_\alpha)P.$$

برهان:[٤،صفحه ۳۳۲]

۰–٤۱ **قضیه:**فرض کنید M یک حلقه و M یک R–مدول ضربی باشد .اگر عنصر خودتوان e از R وجود داشته باشد به قسمی که M=Re ،آنگاه M پروژکتیو است.

برهان:[۱.نتیجه ۲–٤]

۰–٤۲ **قضیه:**فرض کنیدN یک زیر مدول R–مدول ضربی باوفای بامولد متناهی M باشد.همچنین فرض کنید عنصر خودتوان e از R موجود باشد به قسمی که ann(M)=Re. در این صورت N یک مدول ضربی است اگر و تنها اگر (N:M) یک ایده آل ضربی باشد.

برهان :[۲۰،نتیجه ۱ قضیه ۱۰]

۰–٤۳ **قضیه:** فرض کنید R یک حلقه و M یک R–مدول ضربی با مولد متناهی باشد همچنین فرض کنید عنصر خودتوان e از R موجود باشد به قسمی که ann(M)=Reدر این صورت M یک R–مدول پروژکتیو است.

برهان: [۲۰،قضیه ۱۱]

۰–٤٤ **تعریف:**عضو ناصفر a را در حلقه R یک **مقسوم علیه صفر** می نامیم هرگاه عضو ناصفری چون $b \in R$ موجود باشد به قسمی که ab=۰.

۰–٤٥ تعریف:حلقه جابجایی و یکدار R که $1_R \neq 0$،را یک **دامنه صحیح** می نامیم هرگاه هیچ مقسوم علیه صفری نداشته باشد.

۰–٤٦ تعریف:زیر مجموعه S از حلقه R ضربی بسته است هرگاه:

الف) $1 \in S$

ب) هرگاه $s_1, s_2 \in S$ آنگاه $s_1 s_2 \in S$

۰–٤٧ تعریف :(حلقه کسرها و موضعی سازی) فرض کنید S یک زیر مجموعه ضربی بسته از R وM یک R–مدول باشد.رابطه $\approx$ را روی $M \times S$به صورت زیر تعریف می کنیم::

به ازای هر (m_1, s_1)، (m_2, s_2)در $M \times S$؛ $(m_1, s_1) \approx (m_2, s_2)$اگر و فقط اگر

عنصری چون $t \in S$موجود باشد به قسمی که $t(s_2 m_1 - s_1 m_2) = 0$. در این صورت $\approx$ یک رابطه هم ارزی روی $M \times S$است.رده هم ارزی (m, s)را با m/sنشان می دهیم و $S^{-1}M$را مجموعه تمام رده های هم ارزی فوق در نظر می گیریم.

هرگاه M=R در این صورت $S^{-1}R$یک حلقه است که آنرا **حلقه کسرهای R** می نامیم

.واضح است که $S^{-1}M$یک $S^{-1}R$–مدول است.

اگر P یک ایده آل اول از R و $S = R \setminus P$ باشد، $S^{-1}R$ را با R_Pو $S^{-1}M$ را با M_P نمایش می دهیم. M_P را **موضعی سازی M در P** می گوییم.

۰–٤٨ لم: فرض کنید Iو J دو ایده ال حلقه R باشند.در این صورت $(IJ)_P = I_P J_P$.

برهان:[۹،لم ٤,۳]

۰–٤٩ تعریف: (حلقه کامل خارج قسمتهای R) فرض کنید R حلقه ای جابجایی و یکدار و U مجموعه همه عناصر R که مقسوم علیه صفر نیستند باشد.U یک زیر مجموعه ضرب بسته از R است زیرا واضح است که $1 \in U$.فرضکنید $u_1, u_2 \in U$ و $s \in R$ موجود باشد به قسمی که $s(u_1 u_2) = 0$.

در این صورت $(su_1)u_2=0$ و از اینجا $su_1=0$.چون $u_1\in U$ پس s=0. در نتیجه $u_1u_2\in U$.

قرار دهید:

$$P=R\times U=\{(a,u)|a\in R,u\in U\}$$

و رابطه $\approx$ را روی P به صورت زیر تعریف کنید:

به ازای هر (a,u),(b,v) در P؛ $(a,u)\approx(b,v)$ اگر و فقط اگر av=bu در این صورت $\approx$ یک رابطه هم ارزی روی P است.پس P را به رده های ام ارزی افراز می کند.رده هم ارزی (a,u) را با a/u نشان می دهیم. Q را مجموعه تمام رده های هم ارزی فوق در نظر بگیرید.در این صورتQ تحت اعمال :

جمع: $$a/u+b/v=(av+bu)/(uv)$$

ضرب: $$(a/u)(b/v)=(ab)/(uv)$$

یک حلقه است.Q را **حلقه کامل خارج قسمتهای R** می نامیم.

۰-۵۰ تعریف:اگر R یک دامنه صحیح باشد آنگاه حلقه کامل خارج قسمتهای R را **میدان خارج قسمتهای R** می نامیم.

۰-۵۱ تعریف: اگر R یک دامنه صحیح و K میدان خارج قسمتهای R باشد؛ آنگاه ایده آل I از R را یک **ایده آل کسری** می نامیم هرگاه $I\neq 0$ و وجود داشته باشد $a\in R$ به قسمی که $aI\subseteq R$. ایده آل I را **معکوس پذیر** گویند هرگاه ایده آلی چون J موجود باشد که IJ=R.

۰-۵۲ قضیه:برای هر ایده آل I از دامنه صحیح R گزاره های زیر معادلند:

الف) برای هر گردایه ناتهی $\{B_\alpha\}$ از ایده آلهای R $I(\bigcap_\alpha B_\alpha)=\bigcap_\alpha IB_\alpha$

ب) برای هر گردایه ناتهی $\{B_\alpha\}$ از ایده آلهای کسری R، $I(\bigcap_\alpha B_\alpha)=\bigcap_\alpha IB_\alpha$

ج) I معکوس پذیر است.

د) I پروژکتیو است.

برهان:[٤،قضیه ١]

۰–۵۳ **تعریف:** فرض کنید R یک حلقه و M یک R–مدول باشد.زیر مدول P از M یک زیر مدول اول M است هرگاه $P \neq M$ و برای $r \in R$,$m \in M$ داشته باشیم $rm \in P$ آنگاه $m \in P$ یا $r \in (P:M)$.

۰–۵٤ **تعریف:** اشتراک تمام ایده آلهای اول R که شامل I باشند را با $\sqrt{I}$ نمایش می دهیم.

۰–۵۵ **لم:** فرض کنید I ایده آل محض از حلقه R باشد در این صورت.اگر I با مولد متناهی باشد آنگاه $I = \sqrt{I}$.

برهان: [۹.]

۰–۵٦ **قضیه:** فرض کنید M یک R–مدول ضربی با مولد متناهی و N زیر مدولی از M باشد.در این صورت $radN = \sqrt{(N:M)}M$.

برهان: [۱۷.،قضیه ٤]

۰–۵۷ **لم:** فرض کنید

$$E=\{f: M \to \mathbf{R} \mid \text{f یک همریختی باشد}\}$$

و $T(M) = \sum_{f \in Hom(m,R)} f(M)$. در این صورت T(M) یک ایده آل R است که آنرا **اثر(Trace) M** می نامیم.

۰–۵۸ **لم:** برای هر ایده آل کسری I از R، $T(I) = II^{-1}$.

برهان: [۱۰،لم ۲,٤–۲]

۰–۵۹ قضیه: فرض کنید R یک حلقه و I ایده آل محضی از R باشد.در این صورت $T(I) = I$.

برهان: [۱۰]

۰–٦۰ **لم:** فرض کنید M یک مدول پروژکتیو به قسمی باشد که برای هر ایده آل اول P، $M_P = R_P$ یا $M_P = (0)$.در این صورت M با مولد متناهی است اگر و فقط اگر T(M) با مولد متناهی باشد.

برهان: [۲۳،لم ۱–۳]

۰–۶۱ **نکته:** فرض کنید M یک R–مدول ضربی باوفای با مولد متناهی باشد،در این صورت $\bigcap_{f \in Hom(M,R)} \ker f = 0$.

برهان:[۱۵]

۰–۶۲ **تعریف:** R–مدول M را torsionless گوییم هرگاه بتوان M را در یک ضرب مستقیم از کپی های R نشاند.

۰–۶۳ **لم ناکایاما:** فرض کنید J ایده آلی از حلقه R باشد.در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) J در هر ایده آل ماکسیمال R مشمول است

ب) هرگاه M یک R–مدول با مولد متناهی باشدوJM=M در این صورت M=0

۰–۶۴ **قضیه:** فرض کنید M یک R–مدول پروژکتیو باشد در این صورت M=T(M)M.

برهان:[۲۰]

فصل اول:

زیر مدولهای محض

بخش اول:خواص زیر مدولهای محض

در این فصل خواص متعددی از زیر مدولهای محض مدولهای ضربی را بررسی می کنیم. دو قضیه اول این فصل ویژگیهای فراوانی از زیر مدولهای محض مدولهای باوفا با پوچساز محض را بیان می کنند.

قضیه ۱-۱-۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R- مدول ضربی با پوچساز محض.و N یک زیر مدول M باشد.آنگاه گزاره های زیر معادلند:.

۱- N یک زیر مدول محض از M است.

۲- N در M ضربی و خودتوان است.

۳- N ضربی است و برای هر زیر مدول K از N , $K=(N:M)K$

٤- N ضربی است و برای هر زیر مدول K از M , $(K:N)N=(K:M)M$

۵- برای هر $x\in N$، $Rx=(N:M)x$

٦- برای هر $x\in N$، $R=(N:M)+ann(x)$

۷- برای هر $x\in N$، $R=\sum_{n\in N}(Rn:M)+ann(x)$

۸- برای هر $x\in N$ وجود دارد $a\in(N:M)$ به قسمی که $x=ax$

۹- بری اهر ایده آل ماکسیمال P از R , $N_P=0_P$ یا $N_P=M_P$.

برهان:

$1\Rightarrow 2$

N یک زیر مدول محض R-مدول M است .ابتدا ثابت می کنیم N ضربی است .بنابر ۷-۰ ،کافیست نشان دهیم $(K:N)N = N \cap K$.

M یک مدول ضربی است در نتیجه برای زیر مدول K از N ، $K=(K:M)M$.

N یک زیر مدول محض است در نتیجه :

$$(K:N)N = N \cap (K:N)M$$

به وضوح $(K:M) \subseteq (K:N)$.پس :

$$(K:N)N = N \cap (K:N)M \supseteq N \cap (K:M)M = N \cap K$$

حال نشان می دهیم :

$$(K:N)N \subseteq N \cap K$$

$x \in (K:N)N$ در نتیجه $x=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ که $a_i \in (K:N)$ و $b_i \in N$ از $a_i \in (K:N)$ نتیجه می شود که $a_i b_i \in K$ در نتیجه $x \in K$.از طرفی چون $(K:N)N \subseteq N$.پس $x \in N$ بنابراین $x \in N \cap K$ و در نتیجه $(K:N)N = N \cap K$و N ضربی است.

حال ثابت می کنیم که N خودتوان است.

N یک زیر مدول محض مدول ضربی M است در نتیجه

$$(N:M)N = N \cap (N:M)M = N \cap N = N$$

پس بنابر تعریف N خودتوان است.

$2 \Rightarrow 3$

فرض کنید K یک زیر مدول از N باشد .چون N ضربی است پس $K=(K:N)N$ اما N یک زیر مدول خودتوان نیز هست در نتیجه $N=(N:M)N$ پس

$$K=(K:N)(N:M)N$$

اما $$K=(K:N)(N:M)N=(N:M)(K:N)N=(N:M)K$$