بسم الله الرحمن الرحيم

١٢٩٩٤٢

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

خاصیت نقطه ثابت در فضای باناخ و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر مجید فخار

استاد مشاور:

دکتر جعفر زعفرانی

پژوهشگر:

شیما کریمی

شهریور ماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز خانم شیما کریمی

تحت عنوان:

خاصیت نقطه ثابت در فضای باناخ و کاربردهای آن

در تاریخ ... ۸۸/۶/۲۱..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......بسیار خوب... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر جعفر زعفرانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر علیرضا امینی هرندی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

تقدیر و تشکر

اَلحَمدُ اِللّهِ الّذي تَحَبَّبَ اِلي وَ هُو غَني عَنّي

ستایش خدای را که به من اظهار کمال دوستی فرمود با آن که از من بی نیاز بود

این مجموعه را مرهون راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوار م جناب آقای دکتر فخار می دانم که فراتر از یک استاد راهنما در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده اند. بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ ایشان صادقانه سپاسگزاری کنم گر چه تشکر من قطره ای در برابر دریای بیکران محبت ها و کمک های ایشان می باشد. از درگاه ایزد منان توفیقی روز افزون برای ایشان خواهانم.

از جناب آقای دکتر زعفرانی که افتخار شاگردی ایشان را دارم کمال تشکر را دارم.

زحمات اساتید داور جناب آقای دکتر لشکری زاده داور داخلی و جناب آقای دکتر امینی داور خارجی را ارج نهاده و از ایشان تشکر می کنم.

همچنین از زحمات سرکار خانم ها گرامی، غازی، فرهمند و معمار که در تدوین این پایان نامه یاری نموده اند سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان نامه قضایای نقطه ثابت روی نگاشت هایی از نوع J، نگاشت های ACN، نگاشت های منظم مجانبی و فضاهای $L(\tau)$ اکید را توسعه می دهیم. نگاشت های اکیدا محدب و نگاشت هایی از نوع J و نگاشت های به طور منظم مجانبی و فضاهای $L(\tau)$ اکید معرفی شده است. هم چنین به بیان خاصیت (C) و خاصیت K-K و خاصیت P_τ پرداخته و مثال هایی از این نوع نگاشت ها و فضاها را بیان کرده و گسترش می دهیم.

واژه های کلیدی

قضیه نقطه ثابت، نگاشت هایی از نوع J، خاصیت (C) ، خاصیت K-K، نگاشت های به طور منظم مجانبی، فضاهای $L(\tau)$ اکید، نگاشت های ACN.

فهرست مطالب

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل پنجم

پیش گفتار

در این پایان‌نامه قضایای نقطه ثابت روی نگاشت‌هایی از نوع J بررسی می‌شود و از منابع [۲]، [۷]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۸] استفاده شده است. در زیر به توضیح اجمالی فصل‌ها می‌پردازیم.

این پایان نامه شامل پنج فصل است:

در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی و بعضی قضایا و نتایج کلیدی می‌پردازیم.

در فصل دوم به مطالعه‌ی نگاشت‌هایی از نوع J و نگاشت‌های غیرانبساطی متناوب محدب گونه و مثال‌هایی از این نوع نگاشت ها پرداخته هم‌چنین فضاهای بطور نزدیک اکید محدب و اکیدا محدب را تعریف کرده و به ارتباط این نوع فضاها می‌پردازیم و به موازات آن قضایای نقطه ثابت روی این نوع نگاشت‌ها و فضاها را بیان می‌داریم.

در فصل سوم ابتدا خاصیت (C) در فضای باناخ را شرح داده و قضایای نقطه ثابت را در حالتی که $(X, \|\ \|)$ یک فضای باناخ و خاصیت (C) دارد بیان می‌داریم. در ادامه خاصیت $K-K$ و یکنواخت ضعیف* $K-K$ و اثبات قضایای نقطه ثابت مربوط به آن بررسی می شود.

در فصل چهارم خاصیت (P) و خاصیت (P_τ) و قضایای نقطه ثابت و τ — نقطه ثابت مربوط به آن را بیان می‌داریم. در ادامه فضای $L(\tau)$ اکید را معرفی کرده و ارتباط آن با خاصیت (P_τ) بررسی می‌شود.

در فصل آخر نگاشت‌های به‌طور منظم مجانبی را تعریف کرده و به بررسی نقطه ثابت این نوع نگاشت‌ها می‌پردازیم. سپس نگاشت های به‌طور غیرانبساطی مجانبی را بررسی کرده و به موازات آن ارتباط این نوع نگاشت‌ها را با فضای $L(\tau)$ نشان می‌دهیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی و بعضی قضایا و نتایج کلیدی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری باشد، در این‌صورت تابع $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$ را نرم روی X گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد،

(۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(۲) برای هر $x \in X$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

(۳) برای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

اگر $\|.\|$ یک نرم روی X باشد، آن‌گاه $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱ . هر فضای نرم دار کامل را یک فضای باناخ گوییم.

قضیه ۳.۱ . هر دنباله‌ی کوشی در یک فضای متریک کران دار است.

اثبات . به [۲۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۴.۱ . فضای متریک (M, d) فشرده است اگر و تنها اگر کامل و کران دار کلی باشد.

اثبات . به [۲۲]، صفحه‌ی ۳۵ رجوع کنید. ■

قضیه ۵.۱ . هر مجموعه‌ی فشرده در یک فضای متریک بسته و کراندار است.

اثبات . به [۲۲]، صفحه‌ی ۳۳ رجوع کنید.■

قضیه ۶.۱ . فرض کنید (M, d) یک فضای متریک و $\{x_n\}_n \in N \subset M$ به $x_\circ \in M$ همگرا باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\circ\}\}$ یک مجموعه‌ی فشرده است.

اثبات . به [۲۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۷.۱ . فرض کنید $\limsup_n a_n = a$ و $a \in \mathbb{R}$ در این صورت داریم،

(۱) برای هر $\varepsilon > \circ$، $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوریکه برای هر $n > N$، $a_n < a + \varepsilon$.

(۲) برای هر $\varepsilon > \circ$ و هر $k \in \mathbb{N}$، $n > k$ موجود است به قسمی که $a - \varepsilon < a_n$.

به علاوه شرایط (۱) و (۲) نتیجه می دهد $\limsup_n a_n = a$.

اثبات . به [۲۲] رجوع کنید. ■

تعریف ۸.۱ . فرض کنید (a_n) یک دنباله از اعداد حقیقی است. $x \in \mathbb{R}$ را حد زیر دنباله‌ای (a_n) گوییم هرگاه زیر دنباله‌ی (a_{n_k}) از (a_n) موجود باشد به قسمی که $a_{n_k} \to x$.

قضیه ۹.۱ . (۱). هر گاه $\{p_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری فشرده X باشد، آن‌گاه زیردنباله‌ای از $\{p_n\}$ به نقطه‌ای از X همگرا می‌باشد.

(۲). هر دنباله کراندار در $\mathbb{R}^k$ حاوی زیر دنباله‌ای همگرا خواهد بود.

اثبات . به [۲۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۱۰.۱ . $\limsup\limits_{n} a_n = \sup E$ که در آن E مجموعه‌ی حدود زیر دنباله‌های همگرای a_n است.

اثبات . به [۲۲]، صفحه‌ی ۴۹ رجوع کنید. ■

قضیه ۱۱.۱ . فرض کنید X یک دنباله کراندار از اعداد حقیقی باشد. در این‌صورت X همگراست اگر و فقط اگر $\limsup X = \liminf X$.

به علاوه مقدار مشترک $\lim X$ است.

اثبات . به [۲۲] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۲.۱ . فرض کنید (M,d) یک فضای متریک باشد. $x \in M$ را یک نقطه‌ی بستاری مجموعه‌ی $E \subset X$ گوییم هرگاه دنباله‌ی $\{a_n\} \subset E$ موجود باشد به قسمی که $a_n \to x$.

نمادگذاری ۱۳.۱ . مجموعه‌ی نقاط بستاری E را با $\bar{E}$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱۴.۱ . مجموعه‌ی E در فضای متریک (M,d) بسته است اگر و تنها اگر $E = \bar{E}$.

اثبات . به [۲۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۱۵.۱ . فرض کنید $\{p_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری X باشد.

(۱). $\{p_n\}$ همگرا به $p \in X$ است اگر و فقط اگر هر همسایگی p شامل تمام جملات $\{p_n\}$ جز تعداد متناهی باشد.

(۲). هرگاه $p \in X$ و $\acute{p} \in X$ و $\{p_n\}$ همگرا به p و $\acute{p}$ باشد، آن‌گاه $p = \acute{p}$.

(۳). هرگاه $\{p_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه $\{p_n\}$ کراندار است.

(۴). هرگاه $E \subset X$ و p یک نقطه حدی E باشد، دنباله‌ای مانند $\{p_n\}$ در E هست به‌طوریکه $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

اثبات . به [۲۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۱۶.۱ (تیتزه)[1]. فرض کنید X یک فضای نرمال و $A \subset X$ بسته و تابع $f : A \to Y$ پیوسته باشد، در این‌صورت تابع پیوسته $F : X \to Y$ وجود دارد به‌طوریکه برای هر $a \in A$، $F(a) = f(a)$.

اثبات . به [۱۸] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۷.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری و $f : X \to \mathbb{R}$. در این‌صورت تابع f را مقعر می‌نامیم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و هر $0 < \lambda < 1$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

تعریف ۱۸.۱ . اگر $f-$ مقعر باشد آن‌گاه f را محدب می‌نامیم.

تعریف ۱۹.۱ . فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد، نگاشت $T : X \to R$ را آفین گوییم هرگاه برای هر $\lambda \in R$

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$$

تعریف ۲۰.۱ . فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشد، تابع $f : X \to Y$ را لیپ‌شیتز گوییم هر گاه ثابت $L > 0$ موجود باشد بقسمی که برای هر $x, y \in X$

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||$$

---

[1] Tietze's

تعریف ۲۱.۱ . فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد، نگاشت $T : X \to X$ را غیر انبساطی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$

$$||T(x) - T(y)|| \leq ||x - y||$$

تعریف ۲۲.۱ . فضای نرم‌دار $(X, ||.||)$ داری خاصیت نقطه ثابت (FPP) گویند هرگاه هر نگاشت غیر انبساطی روی زیر مجموعه محدب، بسته، کراندار و غیر تهی C از X نقطه ثابت داشته باشد.

تعریف ۲۳.۱ . نگاشت $\mathcal{J}_X : X \to X^{**}$ با ضابطه $< \mathcal{J}_X x, x^* > = < x^*, x >$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۴.۱ . فضای باناخ X را بازتابی گوییم هرگاه $\mathcal{J}_X$ پوشا باشد، یعنی $\mathcal{J}_X = X^{**}$

اگر C زیر مجموعه غیر تهی از فضای نرمدار X و $y \in X$، آن‌گاه

$$diamC = \sup\{||u - v|| \ : u, v \in C\}$$

$$dist(y, C) := \inf\{||y - x|| \ : x \in C\}$$

$$P_C(x) = \{y \in C : \ ||y - x|| = d(x, C)\}$$

نگاشت $P_C(x)$ را نگاشت نزدیک‌ترین نقطه می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۱ . $C \subset X$ را مجموعه چبیشف گوییم هر گاه برای هر $y \in X$، $P_C(y)$ تک عضوی باشد.

قضیه ۲۶.۱ . فرض کنید X یک فضای باناخ و C زیر مجموعه محدب و غیر تهی از X باشد و $x_\circ \in X - C$ و $\overline{x} \in C$، در این‌صورت عبارات زیر با هم معادلند.

(۱) $\overline{x} \in P_C(x_\circ)$.

(۲) $\exists x^* \in S_{X^*}, \forall x \in C :< \overline{x} - x_\circ, x^* >= ||\overline{x} - x_\circ||, \quad < x - \overline{x}, x^* > \geq \circ$

(۳) $\exists x^* \in S_{X^*}, \forall x \in C :< x - x_\circ, x^* > \geq ||\overline{x} - x_\circ||$

اثبات . به [۲۵]، رجوع کنید. ■

تعریف ۲۷.۱ . فرض کنید X یک فضای باناخ باشد تور $\{x_\alpha \ , \alpha \in A\}$ همگرای ضعیف به $x \in X$ است هر گاه برای هر $x^* \in X^*$، $\lim_\alpha x_\alpha(x^*) = x(x^*)$ و با نماد $x_\alpha \rightharpoonup x$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۸.۱ . فرض کنید X^* یک فضای باناخ باشد تور $\{x^*_\alpha \ , \alpha \in A\}$ همگرای ضعیف* به $x^* \in X^*$ است هر گاه برای هر $x \in X$، $\lim_\alpha x(x^*_\alpha) = x(x^*)$ و با نماد $x^*_\alpha \rightharpoondown x^*$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۱ . فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. $(X, || \ ||)$ را به‌طور یکنواخت محدب گوییم اگر $(x_n), (y_n)$ دنباله‌هایی در گوی واحد B_X با $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{۲}||x_n + y_n|| = ۱$ باشند آن‌گاه، $\lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = \circ$.

گزاره ۳۰.۱ . فرض کنید X یک فضای باناخ یکنواخت محدب و $\{x_\alpha\}$ یک تور در X باشد. فرض کنید $w-\lim_\alpha x_\alpha = x$ و $\lim_\alpha ||x_\alpha|| = ||x||$ باشد، آن‌گاه $\lim_\alpha x_\alpha = x$.

اثبات . به [۱۸] رجوع کنید. ■

قضیه ۳۱.۱ . اگر X بازتابی باشد آن‌گاه هر زیر فضای بسته M از X بازتابی است.

اثبات . به [۲۳] رجوع کنید. ■

گزاره ۳۲.۱ . فضاهای متناهی‌البعد بازتابی هستند.

اثبات . به [۲۳] رجوع کنید. ■

گزاره ۳۳.۱ . فرض کنید X یک فضای باناخ بازتابی باشد، در این‌صورت عبارات زیر با هم معادلند.

(۱). X بازتابی است.

(۲). X^* بازتابی است.

(۳). B_X فشرده ضعیف در X است.

(۴). هر دنباله کراندار در X زیر دنباله همگرای ضعیف دارد.

(۵). برای هر $f \in X^*$، $x \in B_X$ وجود دارد به‌طوریکه $f(x) = ||f||$.

(٦). برای هر زیر مجموعه کراندار، بسته و محدب K از X و هر $f \in X^*$، $x \in K$ وجود دارد به‌طوریکه

$$f(x) = \sup\{f(y) \quad : y \in K\}$$

(۷). اگر $\{K_n\}$ دنباله نزولی از زیر مجموعه‌های محدب، بسته، کراندار و غیر تهی از X باشد، آن‌گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$

اثبات . به [۱۸] رجوع کنید. ■

قضیه ۳۴.۱ (کرین اشمولین) [۲]. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد در این‌صورت زیرمجموعه K از فضای دوگان X^*، به‌طور ضعیف* بسته است اگر و تنها اگر برای هر $r > 0$، مجموعه $\{x^* \in K \ : ||x^*|| \leq r\}$ به‌طور ضعیف* بسته باشد.

اثبات . به [۲۳] رجوع کنید. ■

گزاره ۳۵.۱ . (۱) اگر X متناهی البعد باشد هر تابعک خطی روی X پیوسته است.

(۲) اگر X متناهی البعد باشد آن‌گاه هر زیر مجموعه بسته و کراندار X فشرده است.

اثبات . به [۲۳] رجوع کنید. ■

قضیه ۳۶.۱ (ابرلین اشمولین) [۳]. برای هر زیر مجموعه به‌طور ضعیف بسته A از فضای باناخ X عبارات زیر با هم معادلند.

(a). هر دنباله $\{x_n\}$ در A زیر دنباله همگرای ضعیف به نقطه‌ای از A دارد.

(b). هر تور $\{x\}$ در A زیر تور همگرای ضعیف به نقطه‌ای از A دارد.

Krein - smulian[۲]

Eberlein - smulian[۳]

(c). A فشرده ضعیف است.

اثبات . به [۲۳] رجوع کنید. ■

گزاره ۳۷.۱ . زیر مجموعه محدب K از یک فضای باناخ به‌طور ضعیف بسته است اگر و فقط اگر بسته باشد.

اثبات . به [۱۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۳۸.۱ (مازور)[۴]. فرض کنید X یک فضای باناخ و $A \subset X$ فشرده باشد، آن‌گاه $\overline{convA}$ فشرده است.

اثبات . به [۱۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۳۹.۱ (باناخ آلاقلو)[۵]. اگر X یک فضای نرمدار خطی باشد آن‌گاه B_X^* فشرده ضعیف* است.

اثبات . به [۲۳] رجوع کنید. ■

[۴] Mazur

[۵] Alaoglus