دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

شماره پایان‌نامه: ۹۲۲۵۲۰۳

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان:

MV- جبرهای کامل

استاد راهنما:

دکتر حبیب حریزاوی

استاد مشاور:

دکتر مهرداد نامداری

نگارنده:

الهه طالع پور

مهرماه سال ۱۳۹۲

باسمه تعالی

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

(نتیجه ارزشیابی پایان نامه دکتری / ارشد)

پایان نامه خانم/ آقای الهه طالع پور **دانشجوی رشته: ریاضی محض گرایش:** جبر

دانشکده علوم ریاضی و کامپوتر **به شماره دانشجویی** ۹۰۲۵۲۰۷

با عنوان :

MV- جبرهای کامل

جهت اخذ مدرک : .... در تاریخ : .... توسط هیأت داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و با درجه............................ تصویب گردید.

۱. اعضا ی هیأت داوران :	**رتبه علمی**	**امضاء**
استاد راهنما:..	....	....
استاد مشاور :	....	....
استاد داور :...	....	....
استاد داور :...	....	....
نماینده تحصیلات تکمیلی :................................	....	....
۲. مدیرگروه :	....	....
۳. معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده :	....	....
۴. مدیرتحصیلات تکمیلی دانشگاه :	....	....

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

همسر همیشه همراهم

و خواهر و برادر مهربانم

سپاس گزاری . . .

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم . از استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای **دکتر حبیب حریزاوی** به عنوان استاد راهنما که همواره اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داه اند، کمال تشکر را دارم . همچنین از جناب آقای **دکتر مهرداد نامداری** که در به پایان رساندن این پایان نامه مشاور من بوده اند، بسیار سپاس گزارم .

در پایان از محضر ارزشمند **پدر و مادر عزیزم** به خاطر همه ی تلاش های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی ام انجام داده اند، از **همسر مهربانم** که در تمام طول انجام این پایان نامه صبورانه همراه و همگام من بوده است، از **خواهر و برادر خوبم** که بی توقع همواره یار و راهنمایم بوده اند، کمال تشکر و امتنان را دارم .

پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما .

الهه طالع پور

مهرماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

نام خانوادگی : طالع پور	نام: الهه	شماره دانشجویی : ۹۰۲۵۲۰۷
عنوان پایان نامه :MV - جبرهای کامل		
استاد راهنما: دکتر حبیب حریزاوی		
استاد مشاور: دکتر مهرداد نامداری		
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی محض	گرایش: جبر
دانشگاه : شهید چمران اهواز	دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر	گروه : ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی : ۱۳۹۲	**تعداد صفحه:۹۸**

کلید واژه ها : کاتگوری، مورفیسم، فانکتور، توپولوژی، MV- جبر، l-گروه، MV- جبر کامل

چکیده

در این پایان‌نامه بعد از بیان مباحث کاتگوری، توپولوژی، و BL- جبر به معرفی l-گروه ها و به ویژه MV- جبرها می‌پردازیم و سپس به سراغ MV- جبرهای کامل می‌رویم.
نشان می‌دهیم که کلاس MV-جبرهای کامل، یک کلاس عمومی است. برای هر MV-جبر A و ایدآل اول P از A، MV- جبر موضعی A_P می‌تواند نسبت به A کانونی باشد و در واقع A_P کامل است. در ادامه خواهیم دید که بین یک کاتگوری ارزشمند از MV- جبرها که اشیاء آن زوج‌های (A, P) هستند،اگر A یک MV- جبر و P ایدآل اول از A، و یک کاتگوری از MV- جبرهای کامل یک هم ارزی وجود دارد. همچنین یک زیر کاتگوری تام از MV- جبرها توسط موضع سازی کانونی A در P، توصیف می‌کنیم.

پیش‌گفتار

ساختار این پایان‌نامه به شرح زیر است:

در فصل اول، به بیان مبحث کاتگوری و برخی از مفاهیم آن به طور مختصر می‌پردازیم. سپس مفاهیمی از توپولوژی را مطرح کرده و پس از آن به معرفی کوتاهی از BL- جبرها و طیف اول خواهیم پرداخت. مطالب این فصل پیش‌نیازی برای بیان فصل‌های بعدی می‌باشند.

در فصل دوم پس از تعریف l-گروه و طرح چند قضیه مرتبط با آن، به سراغ MV- جبر و اصول و ساختار حاکم بر آن می‌رویم. بدون آشنایی با مبحث MV- جبر قادر به بررسی و درک مطالب فصل پایانی نخواهیم بود.

در فصل سوم بعد از معرفی MV- جبرهای کامل، نشان می‌دهیم که کلاس MV- جبرهای کامل، یک کلاس عمومی است، برای هر MV- جبر A و ایدآل اول P از A، MV- جبر موضعی A_P می‌تواند نسبت به A کانونی باشد و در واقع A_P کامل است، همچنین خواهیم دید برای هر زیر جبرA' از A و ایدآل ماکسیمال P داده شده، طیفی از $A'/_{O_P}$ که O_P اشتراک همه‌ی ایدآل‌های اول مشمول در P است، با زیر فضایی از $Spec(A)$ همریخت است.

فصل ۱

برخی مفاهیم مقدماتی

مقدمه

در بخش اول این فصل به مبحث کاتگوری می‌پردازیم که در فصل‌های آتی، به ویژه در فصل سوم این پایان‌نامه آشنایی با آن لازم است. در بخش دوم نیز بیان مختصری از تعاریف اولیه توپولوژی را خواهیم داشت و سرانجام در بخش پایانی BL- جبرها را جهت آشنایی با یکی از مفاهیم مرتبط با MV- جبرها مطرح می‌کنیم.

۱,۱ کاتگوری

در این بخش به دلیل ارتباط مباحث بعدی با موضوع کاتگوری به بیان مقدماتی مفاهیم کاتگوری پرداخته‌ایم. در اینجا با تعریف کاتگوری و برخی مثال‌های آن آشنا شده و سپس به مفاهیمی چون پول بک، زیرکاتگوری، ضرب دو کاتگوری و در ادامه به بیان یکریختی و هم ارزی در کاتگوری می‌پردازیم. گردآوری مطالب این بخش با توجه به مرجع [۱] انجام شده است.

مفهوم کاتگوری

تعریف ۱,۱,۱. یک کاتگوری عبارت است از کلاس C از اشیا به طوری که:

۱) به ازای هر جفت از اشیاء مانند X و Y از کلاس C، مجموعه‌ی $Mor_c(X,Y)$ (که مجموعه مورفیسم‌های از X بتوی Y نامیده می‌شود) وجود داشته باشد به طوری که $Mor_c(X,Y)$ و $Mor_c(X',Y')$ مجزا باشند مگر این که $X=X'$ و $Y=Y'$.

۲) برای هر سه شیء X، Y و Z از C نگاشت

M

وجود داشته باشد که به صورت $(g,f) \longrightarrow fog$ نمایش داده می‌شود و دارای ویژگی‌های زیر است:

α) برای هر شیء X، مورفیسم $id_x \in Mor(X,X)$ وجود دارد که یک همانی راست تحت «o» برای تمام اعضای $Mor_c(X,Y)$ و یک همانی چپ برای تمام اعضای $Mor_c(Y,X)$ است.

β) «o» شرکت پذیر است در حالتی که $ho(gof)$ و $(hog)of$ تعریف شده باشند و در این صورت

$$ho(gof) = (hog)of.$$

ملاحظه ۲,۱,۱. علی رغم این که در تعریف بالا نماد «o» به کار رفته است، مجموعه‌ی $Mor_c(X,Y)$ لزومی ندارد مجموعه‌ای از توابع باشد. با این وجود عناصر $Mor_c(X,Y)$ را به شکل $f: X \longrightarrow Y$ نمایش می‌دهیم و به این دلیل است که مورفیسم ها را پیکان می‌نامیم.

ملاحظه ۳,۱,۱. مورفیسم $id_x: X \longrightarrow X$ را مورفیسم همانی روی شیء X گوییم. پس با توجه به خاصیت (α)، id_x منحصر به فرد است؛ (id_x) همانی راست و $(id_x)'$ همانی چپ هستند؛ یعنی،

$$(id_x)' = (id_x)' \; o \; (id_x) = id_x.$$

نتیجه ۴,۱,۱. از تعریف بالا نتیجه می‌گیریم که می‌توان یک کاتگوری را با تعیین سه چیز تعریف کرد:

۱) کلاس اشیاء

۲) مجموعه‌های مورفیسم

۳) چگونگی ترکیب مورفیسم‌ها

مثال ۵٫۱٫۱. کاتگوری Set از مجموعه‌ها. در اینجا کلاس اشیاء شامل تمام مجموعه‌ها است، مورفیسم‌ها نگاشت‌های معمولی بین مجموعه‌ها هستند و «o» ترکیب معمولی توابع است. مورفیسم همانی عبارت است از تابع همانی معمولی $i: X \longrightarrow X$ که $i(x) = x$. به همین صورت کاتگوری $FSet$ از مجموعه‌های متناهی را می‌توانیم تشکیل دهیم.

مثال۶٫۱٫۱. کاتگوری Grp از گروه‌ها. کلاس اشیاء شامل تمام گروه‌ها است، مورفیسم‌ها هومومورفیسم‌های گروه و «o» ترکیب معمولی توابع است. به همین صورت می‌توان کاتگوری $FGrp$ از گروه‌های متناهی را تشکیل داد.

مثال ۷٫۱٫۱. کاتگوری Ord از مجموعه‌های مرتب. اشیاء مجموعه‌هایی هستند که ترتیب «$\leq$» روی آن‌ها وجود دارد(به عبارت دیگر، رابطه دارای خواص بازتابی، پادتقارنی و انتقالی باشد). مورفیسم‌ها نگاشت‌های همنوای (یا حافظ ترتیب) $f: A \longrightarrow B$ هستند؛ به این معنا که اگر $x \leq y$ در A برقرار باشد، آن‌گاه $f(x) \leq f(y)$ در B برقرار است.

تعریف ۸٫۱٫۱. کاتگوری A زیرکاتگوری از کاتگوری B نامیده می‌شود اگر:

۱) هر شیء A یک شیء B باشد.

۲) به ازای تمام اشیاء X و Y از A $Mor_A(X,Y) \subseteq Mor_B(X,Y)$.

۳) ترکیب دو مورفیسم در A همان ترکیب آن‌ها در B باشد.

۴) به ازای تمام اشیاء A از A مورفیسم همانی id_A در B همان مورفیسمی است که در A است.

به علاوه اگر به ازای هر X و Y از A، $Mor_A(X,Y) = Mor_B(X,Y)$، آن‌گاه A را زیرکاتگوری تام B گوییم.

مثال ۹٫۱٫۱. کاتگوری $FSet$ یک زیرکاتگوری تام Set است.

تعریف ۱۰٫۱٫۱. شیء U از کاتگوری C شیء آغازی گفته می‌شود (یا به طورکلی دافع)، اگر برای هر شیء X از C مجموعه‌ی $\mathrm{Mor}_c(U,X)$ تک عضوی باشد و U شیء انتهایی نامیده می‌شود (یا به طور کلی جاذب)، اگر به ازای هر شیء X از C، مجموعه‌ی $Mor_c(X,U)$ تک عضوی باشد.

ملاحظه ۱۱٫۱٫۱. معمولاً عبارت شیء عمومی را به معنای شی‌ای به کار می‌بریم که یا آغازی یا انتهایی باشد.

تعریف ۱۲٫۱٫۱. اشیاء X و Y از کاتگوری C را یکریخت گوییم، هرگاه $Mor_c(X,Y)$ شامل یک یکریختی باشد. معمولاً در این حالت می نویسیم $X \simeq Y$.

گزاره ۱۳٫۱٫۱. اشیاء عمومی هم نوع، یکریخت هستند.

اثبات. باید نشان دهیم که اگر U_1 و U_2 اشیاء عمومی از یک نوع باشند، آن‌گاه $Mor_c(U_1,U_2)$، شامل یک یکریختی است.

اثبات حالت U_1 و U_2 آغازی، همانند اثبات حالت U_1 و U_2 انتهایی است. فرض کنیم $Mor_c(U_1,U_2)=\{\alpha\}$ و $Mor_c(U_2,U_1)=\{\beta\}$. آنگاه $\alpha o\beta \in id_{U_2}$. مشابهاً داریم $\alpha o\beta \in id_{U_1}$ و این دلالت می‌کند که α با $\beta=\alpha^{-1}$ یکریخت است.

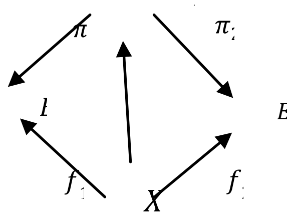
مثال ۱۴٫۱٫۱. $\emptyset$ در Set آغازی است و $\{\emptyset\}$ (در واقع هر مجموعه‌ی تک عضوی) انتهایی است.

مثال ۱۵٫۱٫۱. $\{1\}$ در Grp آغازی و انتهایی است.

حاصل ضرب

ابتدا با ضرب دکارتی مجموعه‌های E_1 و E_2 آغاز می کنیم. مجموعه‌ی $E_1 \times E_2$ عبارت است از مجموعه‌ی جفت‌های (x,y) که $x\in E_1$ و $y\in E_2$. نگاشت‌های تصویری $\pi_1: E_1\times E_2 \longrightarrow E_1$ و $\pi_2: E_1\times E_2 \longrightarrow E_1$ با ضابطه‌های

را در نظر می‌گیریم. حال فرض کنیم X یک مجموعه و $f_1\colon X \longrightarrow E_1$ و $f_2\colon X \longrightarrow E_2$ دو نگاشت باشند. ادعا می‌کنیم که یک نگاشت منحصر به فرد $\nu\colon X \longrightarrow E_1 \times E_2$ موجود است به طوری که نمودار



تعویض پذیر باشد. در واقع $\nu\colon X \longrightarrow E_1 \times E_2$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$\nu\,(x) = (f_1(x), f_2(x))\ , \forall x \in X$

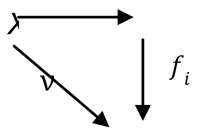
در ای صورت داریم $\pi_1 o\nu = f_1$ و $\pi_2 o\nu = f_2$. پس نمودار تعویض پذیر است.

برای بررسی منحصر به فرد بودن ν، فرض کنیم $\eta\colon X \longrightarrow E_1 \times E_2$ چنان باشد که $\pi_1 o\eta = f_1$ و $\pi_2 o\eta = f_2$. فرض کنیم $x \in X$ و $\eta(x) = (e_1, e_2)$، آن‌گاه

$$f_1(x) = \pi_1[\eta(x)] = \pi_1(e_1, e_2) = e_1;$$
$$f_2(x) = \pi_2[\eta(x)] = \pi_2(e_1, e_2) = e_2.$$

بنابراین $\eta(x) = (e_1, e_2) = (f_1(x), f_2\,(x)) = \nu(x)$ و در نتیجه $\eta = \nu$.

در حالت کلی می‌توانیم ضرب دکارتی $X_{i\in I} E_i$ $(\Pi_{i=I} E_i)$ از خانواده دلخواهی از مجموعه‌ها را (یعنی مجموعه‌ی تمام خانواده‌های $(e_i)_{i\in I}$، یا نگاشت $f\colon I \longrightarrow \bigcup_{i=I} E_i$ به طوری که به ازای هر $i \in I$، $e_i = f(i) \in E_i$)، همراه با خانواده‌ی $(\pi_j)_{\,j\in I}$ از نگاشت‌های (پوشا) $\pi_j\colon X_{i\in I} E_i \longrightarrow E_j$ با ضابطه‌ی $\pi_j((e_i)_{i\in I}) = e_j$ در نظر بگیریم. در این صورت نگاشت منحصر به فرد $\nu\colon X \longrightarrow X_{i\in I} E_i$ موجود است به طوری که نمودار



به ازای هر $i\in I$ تعویض پذیر باشد.

می‌توانیم این قضیه را به تعریفی به روش زیر تبدیل کنیم:

فرض کنیم C یک کاتگوری و $(A_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاء C باشند. کاتگوری K را مطابق زیر می‌سازیم:

برای اشیاء K، جفت‌های $(E, f(i)_{i\in I})$ را تشکیل شده از شیء E از C و خانواده‌ی $f(i)_{i\in I}$ از مورفیسم‌های $f_i = E \longrightarrow A_i$ در نظر می‌گیریم و برای مجموعه‌ی $Mor_k\big((E, f(i)_{i\in I}), (E', (f_i')_{i\in I}\big)$، مورفیسم های $g: E \longrightarrow E'$ را در نظر می‌گیریم به طوری که نمودار زیر برای هر $i \in I$ تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & {} \arrow[d, "f_i"] \\ & {} \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۶,۱,۱. شیء انتهایی $(P, (P_i)_{i\in I})$ در کاتگوری K در صورت وجود، حاصل‌ضرب خانواده $(A_i)_{i\in I}$ گفته می‌شود.

بنا به قضیه‌ای که « حاصل‌ضرب‌ها با ترکیب به وسیله‌ی یک یکریختی منحصر به فرد هستند »، در این حالت اگر $(Q, (q_i)_{i\in I}), (P, (P_i)_{i\in I})$ حاصل‌ضرب‌های $(A_i)_{i\in I}$ باشند، آن‌گاه یک یکریختی منحصر به فرد $f: P \longrightarrow Q$ موجود است به طوری که هر نمودار

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "q_i"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

تعویض پذیر است.

گوییم کاتگوری C دارای حاصل‌ضرب‌های متناهی است اگر برای هر مجموعه‌ی متناهی از اشیاء در C یک حاصل‌ضرب داشته باشد و دارای حاصل‌ضرب دلخواه است اگر برای هر خانواده از اشیاء C یک حاصل‌ضرب داشته باشد.

البته می‌توانیم ایده حاصل‌ضرب یک خانواده‌ی تهی از اشیاء را بررسی کنیم. این مطلب می‌تواند به بهترین وجه با پوشش A_i و مورفیسم‌های f_i و f_i' در نموداری که در تعریف بالا از حاصل‌ضرب ارائه شد، مجسم شود. آنچه بدست می‌آوریم این است که P یک حاصل‌ضرب از یک خانواده‌ی تهی است اگر و تنها اگر P یک شیء انتهایی در C باشد. با یک استقرا نتیجه‌ی زیر بدست می‌آید.

قضیه ۱۷,۱,۱. کاتگوری C دارای حاصل‌ضرب‌های متناهی است اگر و فقط اگر یک شیء انتهایی داشته باشد و برای هر زوج اشیاء C یک حاصل‌ضرب داشته باشد.

پول بک

اگر C یک کاتگوری و
$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$
نموداری از اشیاء و مورفیسم‌های C باشد، کاتگوری K را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

اشیاء K را مربع‌های تعویض‌پذیر $[A, B, C, D]$ به شکل

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

و $Mor([A, B, C_iD], [A, B, C_i, X])$ را مورفیسم‌های $\gamma: D \longrightarrow X$ از C در نظر می‌گیریم به طوری که

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dd, "g"] \\ & D \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[dl, "\alpha"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & C \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر است. شیء انتهایی در K، پول بک f و g گفته می‌شود که به آن مربع دکارتی یا حاصل‌ضرب لایه ای f و g نیز می‌گویند.

فانکتور

در این قسمت ایده‌ی «هomomorfism از یک کاتگوری به دیگری» را آغاز می‌کنیم. برای سادگی مورفیسم همانی را به جای I_X با نماد 1_X نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱٫۱٫۱۸. فانکتور کوواریانت از C به D عبارت است از یک دستورالعمل که به هر شیء A از C یک FA از D تخصیص می‌دهد و به هر مورفیسم $\alpha: A \longrightarrow B$ از C، مورفیسم $F_\alpha: FA \longrightarrow FB$ از D به طوری که:

۱) $F_{1A} = 1_{FA}$

۲) اگر $\beta o \alpha$ در C تعریف شده باشد، آن‌گاه $F_\beta o F_\alpha$ در D تعریف شده و $F(\beta o \alpha) = F_\beta o F_\alpha$.

فانکتور کنترا واریانت از C به D یک فانکتور کوواریانت از C به D^d است. برای چنین فانکتوری تنها تغییر در تعریف بالا این است که در این حالت داریم $F(\beta o \alpha) = F_\alpha o F_\beta$.

وقتی صحبت از فانکتور می‌کنیم منظور فانکتور کوواریانت است وآن را با $F: C \longrightarrow D$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱٫۱٫۱۹. اگر C یک کاتگوری مفروض با تخصیص $1_C: C \longrightarrow C$ معین شده به وسیله‌ی قرار دادن $1_C(X) = X$ به ازای هر شیء X از C و $1_C f = f$ به ازای هر مورفیسم از C، باشد، این یک فانکتور همانی روی C تعریف می‌کند:

$F_{1A} = 1_A,$

مثال ۱٫۱٫۲۰. اگر C یک زیرکاتگوری از D باشد، تخصیص $I: C \longrightarrow D$ تعیین شده با قرار دادن $IX = X$ به ازای هر $X \in C$ و $If = f$ به ازای هر مورفیسم C یک فانکتور به نام فانکتور شمول تعریف می‌کند. در مطالعه‌ی هر ساختار جبری مهم است که بدانیم چه وقت دو ساختار

یکریخت هستند. پس در اینجا تعریف طبیعی از یکریختی طبیعی بین کاتگوری‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲۱,۱,۱. کاتگوری‌های C و D را یکریخت گوییم و می‌نویسیم $C \simeq D$، اگر فانکتورهای $F: C \longrightarrow D$ و $G: D \longrightarrow C$ موجود باشند به طوری که $FoG = 1_D$ و $GoF = 1_C$.

مثال۲۲,۱,۱. نسبت به هر حلقه R، حلقه دوگان R^d را داریم (جایی که ضرب به صورت $x.y = yx$ داده شده است). بنابراین فانکتور $F: Ring \longrightarrow Ring$ به طوری که $FoF = 1_{Ring}$ را داریم که از این طریق یکریختی از $Ring$ به خودش را بدست می‌آوریم.

مثال ۲۳,۱,۱. برای کاتگوری‌های A و B، فرض کنیم $F: A \times B \longrightarrow B \times A$ توصیف شده با

$$F(A,B) = (B,A) \ , F(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$$

و $G: B \times A \longrightarrow A \times B$ توصیف شده با

$$G(B,A) = (A,B)\, , G(\beta,\alpha) = (\alpha,\beta)$$

باشند. بنابراین $FoG = 1_{A\times B}$ و $GoF = 1_{A\times B}$ و در نتیجه $A \times B \simeq B \times A$.

تعریف ۲۴,۱,۱. فانکتورهای $F, G: A \longrightarrow B$ را به طور طبیعی هم ارز گوییم و می‌نویسم $F \approx G$، هرگاه یکریختی طبیعی $\eta: F \longrightarrow G$ موجود باشد.

تعریف ۲۵,۱,۱. کاتگوری‌های A و B را هم ارز گوییم هرگاه فانکتورهای $F: A \longrightarrow B$ و $G: B \longrightarrow A$ موجود باشند به طوری که $FoG \approx 1_B$ و $GoF \approx 1_A$.

۲,۱ توپولوژی

تعریف ۱,۲,۱. یک فضای توپولوژی، زوج مرتبی مانند (X,τ) است که در آن X یک مجموعه و τ نیز گردایه ای از زیر مجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱) اجتماع هر تعداد از عناصر τ متعلق به τ باشد.

۲) اشتراک هر تعداد متناهی از عناصر τ متعلق به τ باشد.

۳) مجموعه‌های تهی و X عضو τ باشند.

τ را توپولوژی تعریف شده روی X می‌نامیم و فضای توپولوژی (X,τ) را به اختصار فضای X می‌گوییم.

همچنین زیر مجموعه‌ی U از X را یک مجموعه‌ی باز در X گوییم، هرگاه U متعلق به τ باشد. در واقع اعضای τ، مجموعه‌های باز در X و متمم آن‌ها، مجموعه‌های بسته در X نام دارند.

فرض کنید (X,τ) یک توپولوژی باشد. خانواده β از مجموعه‌های باز را یک پایه برای توپولوژی τ روی X گوییم، هرگاه هر مجموعه‌ی باز از (X,τ) به صورت اجتماعی از اعضای β قابل نمایش باشد. به عبارت دیگر برای هر $G\in\tau$ و $x\in G$، $B_x\in\beta$ موجود باشد که $x\in B_x\subseteq\beta$.

مثال ۲,۲,۱. روی $\mathbb{R}$ توپولوژی‌های گوناگونی می‌توان تعریف کرد. اگر مجموعه‌های باز را همان بازه‌های باز در نظر بگیریم، در این صورت به توپولوژی بدست آمده، توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$ گفته می‌شود. با تعمیم این ایده، مجموعه‌های باز در توپولوژی معمولی روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، گوی‌های باز هستند.

گزاره ۳,۲,۱. مجموعه‌ی β از زیر مجموعه‌های ناتهی X پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X است هر گاه

۱- X اجتماعی از عناصر β باشد.

۲- برای هر $G_1,G_2\in\beta$ و هر $x\in G_1\cap G_2$، $G_3\in\beta$ موجود باشد به طوری که $x\in G_1\cap G_2\subseteq G_3$.

تعریف۳,۲,۱. دو فضای توپولوژی X و Y را همسان ریخت می‌گوییم، هرگاه یک تابع پوشا و یک به یک $f: X \longrightarrow Y$ موجود باشد که f و $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ هر دو پیوسته باشند.

تعریف ۴,۲,۱. اگر (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد و $Y \subseteq X$، در این صورت $\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ یک توپولوژی روی Y تعریف می‌کند که به آن توپولوژی زیر فضایی می‌گوییم. اگر β یک پایه برای τ باشد آن‌گاه $\beta_Y = \{B \cap Y \mid B \in \beta\}$ یک پایه برای τ_Y است.

در مواجه با یک زیر فضا باید دقت داشت. به عنوان مثال فرض کنید $X = \mathbb{R}$ به توپولوژی معمولی مجهز باشد و $Y = [-1,1] \subseteq X$. گیریم $V = (-1,1] \subseteq Y$. در این صورت V در Y باز است، زیرا $V = (-1,2) \cap Y$. اما V در $\mathbb{R}$ باز نیست.

۳,۱ BL- جبرها

در سال ۱۹۹۸ Peter Hajak واریته‌ی BL- جبرها را معرفی کرد و نشان داد که واریته‌ی MV- جبرها در واقع زیر واریته‌ای از واریته BL- جبرها است. به عبارت دیگر، هر MV- جبر می‌تواند به سادگی به عنوان یک BL- جبر خاص دیده شود. از این رو، در این جا به طور مختصر با مبحث BL- جبر آشنا می‌شویم.

تعریف ۱،۳،۱. یک BL- جبر یک جبر $(A,\wedge,\vee,.,\rightarrow,0,1)$ با چهار عمل دو تایی ∧ ، ∨ ، . ، → و دو مقدار ثابت 0 و 1 به طوری که

۱) $(A,\wedge,\vee,0,1)$ یک مشبکه کراندار است،

۲) $(A,0,1)$ یک نیم گروه یکه دار جابه جایی،

و برای هر $a,b,c \in A$

۳) $c \leq a \rightarrow b$ اگر و تنها اگر $a.c \leq b$،

۴) $a \wedge b = a.(a \rightarrow b)$،

۵) $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$.

مثالی از یک BL- جبر متناهی ارائه می‌دهیم که MV- جبر(که در فصل بعد آن را بیان می‌کنیم) نیست.

مثال ۲،۳،۱. مجموعه‌ی $A = \{a,b,c,1\}$ را در نظر می‌گیریم و عمل‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

→	0	c	a	b	1
0	1	1	1	1	1