بسم الله
الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض -هندسه

موضوع:

درباره مانیفلدهای هسیان

نگارش:
سیده مریم میرغفوری

استاد راهنما:
سرکار خانم دکتر ملک

استاد مشاور:
جناب آقای دکتر حقیقی

۱۳۹۰

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: مانیفلد های هسیان

استاد راهنما: سرکار خانم دکتر فرشته ملک

نام دانشجو: سیده مریم میرغفوری

شماره دانشجویی: ۸۸۲۰۱۱۴

اینجانب سیده مریم میرغفوری دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش هندسه دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

چکیده رساله

در این پایان‌نامه ما به بررسی مانیفلد های هسیان می پردازیم.

در فصل نخست برخی تعاریف اولیه و قضایای مورد نیاز در فصل های دیگر آورده شده است. در فصل دوم به تعریف کلی این نوع از مانیفلدها، تعریف انحناهای متداول در مانیفلدها روی مانیفلدهای هسیان و نیز تعریف تانسور انحنای برشی هسیان، و بیان روابط آن ها می پردازیم. هم چنین در فصل سوم زیرمانیفلدهای مانیفلدهای هسیان با انحنای برشی هسیان ثابت را بررسی کرده، و سپس نامساوی مهمی را بین عملگر شکلی و انحنای برشی این زیر مانیفلدها ارائه خواهیم نمود. و سرانجام در فصل چهارم یافته های جدیدی در مورد ژئودزیک های بسته مانیفلدهای هسیان بیان خواهد شد.

بخش عمده ای از مطالب در مورد مانیفلد های با انحنای برشی هسیان ثابت بیان شده است.

مبنای اصلی این کار تحقیقاتی مبتنی بر مراجع [۳۲] ،[۳۳] و [۳۵] بوده است.

کلمات کلیدی: مانیفلد هسیان، انحنای برشی هسیان، مانیفلد آفین، التصاق، ابرفضا.

مقدمه

از دیدگاه تاریخی نخستین ساختار هسیان توسط کوزول[۱] در سال ۱۹۶۱ بررسی شد [۱۱] .وی مانیفلدهای تختی را مطالعه می کرد که دارای یک فرمی بسته α با $D\alpha$ مثبت بودند، در نتیجه $D\alpha$ تشکیل یک متر هسیان روی مانیفلد می داد. اما همه متر های هسیان به شکل $g = D\alpha$نیستند بعدها تعریف عمومی تری از متر هسیان توسط هیروهیکو شیما[۲]در سال ۱۹۷۶ [۲۵] و چنگ [۳] و یائو [۴] در سال ۱۹۸۲ ارائه شد [۸].

می دانیم که یک مانیفلد مختلط، کهلری است هرگاه متر ریمانی روی آن را بتوان با در نظر گرفتن کارت مختصاتی هولومرفیک به صورت هسیان یک تابع مختلط نمایش داد، هم چنین یک مانیفلد تخت آفین، هسیان است هر گاه بتوان متر آن را با در نظر گرفتن کارت مختصاتی آفین به صورت هسیان یک تابع نمایش داد. به دلیل این مشابهت چنگ و یائو متر هسیان را متر کهلری آفین نامیدند.

در سال ۱۹۶۳ وینبرگ [۵] متر هسیان را به عنوان متر ریمانی کانونی روی یک مخروط محدب دلخواه استفاده نمود[۲۷]. مطالعات شیما از سال ۱۹۷۶ تا کنون در زمینه هندسه ساختارهای هسیان قابل توجه است. در سال ۱۹۸۰ ساساکی [۶] ابرفضاهای هذلولوی آفین را با استفاده از متر هسیان مطالعه نمود[۱۹] ودر سال ۱۹۸۲ نوعی از متر هسیان توسط چنگ و یائو به منظور تعریف یک متر ریمانی روی دامنه های محدب $\mathbb{R}^n$ با استفاده از معادلات $Monge - Ampere$ مورد استفاده قرار گرفت .

در سال ۲۰۰۴ تاتارو [۷] انحنای مترهای هسیان را بررسی نمود[۲۶]، هم چنین بکتاش[۸] وایلماز[۹] در این زمینه مقالات متعددی برای مانیفلدهای هسیان با انحنای هسیان ثابت ارائه کرده اند[۳۱]، [۳۲]، [۳۳]، [۳۴].

هندسه هسیان دارای ارتباط عمیقی با هندسه اطلاعات[۱۰] است. در هندسه اطلاعات هدف مطالعه تئوری

---
[۱] J.l.Koszul
[۲] Hirohiko Shima
[۳] Cheng
[۴] Yau
[۵] Vinberg
[۶] Sasaki
[۷] Tataroo
[۸] Mehmet Bektas
[۹] Yildirim Yilmaz
[۱۰] information geometry

اطلاعات [1] از دیدگاه التصاق های دوگان است. در سال ۲۰۰۰ آماری [2] و ناگائوکا[3] نشان دادند که خانواده توزیع احتمال های مهمی از جمله توزیع نرمال و توزیع چند جمله ای دارای التصاق های دوگانی از نوع هسیان هستند؛ لذا در مطالعه نظریه اطلاعات به مسئله التصاق های دوگان هسیان بر می خوریم. هم چنین هندسه هسیان دارای کاربردهایی در نظریه اقتصاد، مدلسازی، بهینه سازی و نظریه آماری است.

[1] information theory
[2] Amari
[3] Nagaoka

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدماتی بر هندسه ریمانی

۱.۱ پیشگفتار

در این فصل به بیان مختصری از مفاهیم بنیادی هندسه از جمله متر، التصاق،فضای آفین و ... می پردازیم که در فصل های آینده برای مطالعه هندسه مانیفلدهای هسیان مورد استفاده قرار خواهند گرفت.
در این فصل از بیان اثبات لم ها و قضایا صرف نظر کرده و به منابع ارجاع می دهیم.

۲.۱ فضاهای آفین

در این بخش برخی تعاریف ضروری از فضاهای آفین را به همراه مثال هایی ارائه می کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. فضای آفین[۱] : فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی و Ω مجموعه ای ناتهی به همراه نگاشت زیر باشد:

$$(p,q) \in \Omega \times \Omega \longrightarrow \vec{pq} \in V.$$

اگر نگاشت فوق دارای شرایط زیر باشد؛

۱) $\forall p,q,r \in \Omega \quad \vec{pr} = \vec{pq} + \vec{qr},$

۲) $\forall p \in \Omega, v \in V \quad \exists! q \in \Omega \quad s.t \quad v = \vec{pq},$

آنگاهΩ یک فضای آفین n بعدی وابسته به V نامیده می شود.

[۱] affine space

مثال ۱.۲.۱. واضح است که هر فضای برداری به همراه نگاشت $(p,q) \longrightarrow \vec{pq} = q - p$ یک فضای آفین روی خودش است.

قرارداد ۱.۲.۱. هر فضای آفین وابسته به فضای برداری استاندارد $\mathbb{R}^n = \{(p^1,\ldots,p^n) \mid p^i \in \mathbb{R}\}$ یک فضای آفین استاندارد نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۱. سیستم مختصاتی آفین[1] روی Ω: اگر Ωیک فضای آفین وابسته به V باشد و مجموعه $\{o,e_1,\ldots,e_n\}$ را که در آن $o \in \Omega$ و $\{e_1,\ldots,e_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V است، یک قاب آفین با مبدا o بنامیم،به ازای هر نقطه $p \in \Omega$ توابع $\{x^1,\ldots,x^n\}$ روی Ω به صورت

$$\vec{op} = \textstyle\sum_i x^i(p)e_i \qquad p \in \Omega.$$

یک سیستم مختصاتی آفین روی Ω، وابسته به قاب آفین فوق نامیده می شود.

قرارداد ۲.۲.۱. فرض می کنیم e_i یک بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ باشد که مولفه j ام آن دلتای کرونکر δ_{ij} است، در این صورت $\{e_1,\ldots,e_n\}$ یک پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ است و سیستم مختصاتی که با در نظر گرفتن قاب $\{0,e_1,\ldots,e_n\}$ به عنوان قاب آفین به دست می آید(۰ بردار صفراست) سیستم مختصاتی استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ نامیده می شود.

تعریف ۳.۲.۱. نگاشت آفین[2]: هر گاه Ω و $\bar{\Omega}$ دو فضای آفین وابسته به فضاهای برداری V و $\bar{V}$ باشند، نگاشت $\phi : \Omega \longrightarrow \bar{\Omega}$ یک نگاشت آفین است اگر نگاشت خطی $\tilde{\phi} : V \longrightarrow \bar{V}$ وجود داشته باشد که در شرط زیر صدق کند؛

$$\tilde{\phi}(\vec{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} \qquad \forall p,q \in \Omega.$$

در این صورت $\tilde{\phi}$ نگاشت خطی وابسته به ϕ نامیده می شود.

تعریف ۴.۲.۱. تبدیل آفین [3]: نگاشت آفین یک به یک از فضای آفین Ω روی خودش یک تبدیل آفین نامیده می شود.

---
[1] affine coordinate system
[2] affine mapping
[3] affine transformation

۳.۱ التصاق

در این بخش به بیان تعریفی کلی از مفهوم التصاق آفین و نیز ارتباط آن با متر ریمانی روی مانیفلد می پردازیم. از این پس در سراسر این پایان نامه M یک مانیفلد هموار، $\tau(M)$ مجموعه میدان های برداری هموار روی M، $\tau^*(M)$ مجموعه یک فرمی های روی M و $C^\infty(M)$ مجموعه توابع هموار روی Mخواهند بود.

تعریف ۱.۳.۱. التصاق آفین[۱] :هر گاه M یک مانیفلد هموار و $f \in C^\infty(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \tau(M)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، عملگر D

$$D : \tau(M) \times \tau(M) \longrightarrow \tau(M),$$

$$(X, Y) \longrightarrow D_X^Y.$$

که در ۴ شرط زیر صدق کند:

$$1)\, D_X^{\lambda Y_1 + Y_2} = \lambda D_X^{Y_1} + D_X^{Y_2}, \qquad 2)\, D^Y_{\lambda X_1 + X_2} = \lambda D^Y_{X_1} + D^Y_{X_2},$$

$$3)\, D^Y_{fX} = f D^Y_X, \qquad 4)\, D_X^{fY} = X(f)Y + f D_X^Y,$$

یک التصاق آفین نامیده می شود. D_X^Y را مشتق کوواریان Y در جهت X نامیده و مانیفلد مجهز به یک التصاق آفین را مانیفلد آفین [۲] می نامیم.

در اینجا ابتدا میدان های تانسوری روی مانیفلد M را تعریف کرده و سپس چگونگی تعریف مشتق کوواریان یک میدان تانسوری را بیان می کنیم.(مطالب زیر را از منبع [۲۹]صفحه ۶ می آوریم.)

[۱] affine connection
[۲] affine manifold

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید T_r^s یک $C^\infty(M)$ مدول، شامل همه نگاشت های

$$\underbrace{\tau^*(M)\times\ldots\times\tau^*(M)}_{\text{r بار}}\times\underbrace{\tau(M)\times\ldots\times\tau(M)}_{\text{s بار}}\longrightarrow C^\infty(M).$$

باشد که نسبت به هریک از مولفه هایش، $C^\infty(M)$ خطی است، هر عضو T_s^r یک (r,s) میدان تانسوری نامیده می شود و آن را میدان تانسوری r مرتبه کونتراواریان و s مرتبه کوواریان نیز می نامیم.

حال اگر F یک میدان تانسوری $(\circ,p)$ و یا $(۱,p)$ باشد، به ازای هر $X,Y_۱\ldots,Y_p\in\tau(M)$ مشتق کوواریان F در جهت X به صورت زیر تعریف می شود؛

$$D_X^F(Y_۱,\ldots,Y_p):=D_XF(Y_۱,\ldots,Y_p)-\sum_{i=۱}^{p}F(Y_۱,\ldots,D_X^{Y_i},\ldots,Y_p).$$

و آن را با نماد D_X^F نشان می دهیم که در آن $D_X^{F(Y_۱,\ldots,Y_p)}=X(F(Y_۱,\ldots,Y_p))$.

از این پس$\{x^۱,\ldots,x^n\}$ را یک سیستم مختصاتی موضعی روی مانیفلد M در نظر می گیریم و تعاریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف ۳.۳.۱. ضرایب Γ_{ij}^k وابسته به التصاق D که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\frac{\partial}{\partial x^j}}=\sum_{k=۱}^{n}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

ضرایب کریستوفل التصاق D نامیده می شوند.

تعریف ۴.۳.۱. تانسور تاب: التصاق D را روی مانیفلد Mدر نظر بگیرید آنگاه

$$T(X,Y)=D_X^Y-D_Y^X-[X,Y]\qquad X,Y\in\tau(M).$$

تانسور تاب التصاق Dنامیده می شود و مولفه های آن، T_{ij}^k به صورت زیر تعریف می شوند؛

$$T(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j})=\textstyle\sum_k T_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

رابطه تاب با ضرایب کریستوفل التصاق، به صورت زیر است:

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

التصاق D را متقارن یا با تاب صفر یا آزاد از تاب[1] می نامیم هر گاه $T = ۰$.

به سادگی دیده می شود که شرط لازم و کافی برای آن که Dمتقارن باشد آن است که $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

تعریف ۵.۳.۱. متر ریمانی: یک $(۰,۲)$ میدان تانسوری متقارن و مثبت معین روی M متر ریمانی نامیده می شود.

نکته: اگر $K \in T_s^r$ با مولفه های $K_{j_۱\ldots j_s}^{i_۱\ldots i_r}$ باشد می توانیم تانسور $K' \in T_{s+۱}^{r-۱}$ را با مولفه های به شکل زیر به دست آوریم:

$$K'^{i_۱\ldots i_{r-۱}}_{j_۱\ldots j_{s+۱}} = \sum_k g_{j_۱k} K^{ki_۱\ldots i_{r-۱}}_{j_۲\ldots j_{s+۱}}.$$

هم چنین تانسور $K'' \in T_{s-۱}^{r+۱}$ با مولفه های زیر به دست می آید:

$$K''^{i_۱\ldots i_{r+۱}}_{j_۱\ldots j_{s-۱}} = \sum_k g^{i_۱k} K^{i_۲\ldots i_{r+۱}}_{kj_۱\ldots j_{s-۱}}.$$

تعریف ۶.۳.۱. التصاق سازگار با متر: التصاق D را سازگار با متر g روی مانیفلد Mگوییم هرگاه؛

$$X(g(Y,Z)) = g(D_X^Y, Z) + g(Y, D_X^Z) \qquad X, Y, Z \in \tau(M).$$

تعریف ۷.۳.۱. تانسور انحنا: $(۱,۳)$ میدان تانسوری که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(X,Y)Z := D_X D_Y^Z - D_Y D_X^Z - D_{[X,Y]}^Z \qquad X, Y, Z \in \tau(M).$$

تانسور انحنای التصاق D نامیده می شود و نمایش موضعی به شکل زیر دارد:

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \sum_m (\Gamma_{lj}^m \Gamma_{km}^i - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^i).$$

[1] torsion free

تعریف ۸.۳.۱. تانسور انحنای ریچی: $(1,2)$میدان تانسوری که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Ric(Y,Z) := Tr\{X \longrightarrow R(X,Y)Z\} \qquad X,Y,Z \in \tau(M).$$

تانسور انحنای ریچی نامیده می شود که با ردگیری از تانسور انحنا به دست می آید.

تعریف ۹.۳.۱. تانسور انحنای اسکالری: تابعی است که با ردگیری از تانسور انحنای ریچی بدست می آید یعنی:

$$R := trRic = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_i R_i^i.$$

با توجه به تعاریف بالا نوع خاصی از التصاق را تعریف می کنیم:

تعریف ۱۰.۳.۱. التصاق تخت[1]: التصاقی است که تانسور تاب و تانسور انحنای آن صفر باشد، و مانیفلدی که مجهز به یک التصاق تخت است را یک مانیفلد تخت می نامیم.

گزاره ۱.۳.۱. فرض می کنیم Mیک مانیفلد تخت با التصاق تخت D باشد، در این صورت یک سیستم مختصاتی موضعی روی آن وجود دارد به طوری که $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = 0$ و نگاشت های گذر آن ها، نگاشت های آفین هستند.

به عکس هر گاه مانیفلد Mدارای سیستم مختصاتی باشد به طوری که نگاشت های گذر آن ها، نگاشت های آفین باشند، آنگاه التصاق تختی روی Mوجود دارد به طوری که: $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = 0 \qquad \forall i,j$

اثبات. منبع [۲۲] صفحه ۷. □

برای یک التصاق تخت D سیستم مختصاتی $\{x^1,\dots,x^n\}$ که در شرط $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = 0$ صدق می کند سیستم مختصاتی آفین وابسته به D نامیده می شود.

قرارداد ۱.۳.۱. التصاق تخت روی $\mathbb{R}^n$ با شرط $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = 0$ که $\{x^1,\dots,x^n\}$سیستم مختصاتی آفین استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ است، التصاق تخت استاندارد $\mathbb{R}^n$ می نامیم.

[1] flat connection

قضیه ۱.۳.۱. هر گاه g متر ریمانی روی مانیفلد M باشد، التصاق یکتایی روی Mوجود دارد که تانسور تاب آن صفر است و $\nabla g = ۰$.

اثبات. منبع [۲۲] صفحه ۸ □

نامگذاری: التصاق فوق را التصاق ریمانی یا لوی چیویتای متر g می نامیم.

فرض کنیم Γ_{ij}^k ضرایب کریستوفل وابسته به التصاق ریمانی ∇ باشند آنگاه:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{۱}{۲}\sum_l g^{kl}(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}).$$

تعریف ۱۱.۳.۱. یک فرمی های التصاق: اگر $(e_۱, \ldots, e_n)$ یک قاب روی مانیفلد M و $\omega^۱, \ldots, \omega^n$ یک فرمی های دوگان آن باشند آن گاه $\omega_j^k := \Gamma_{ij}^k \omega^i$ را یک فرمی های التصاق می نامیم.

تعریف ۱۲.۳.۱. انحنای برشی: اگر g متر ریمانی روی M باشدانحنای برشی صفحه ساخته شده توسط $X, Y \in \tau(M)$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$K = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^۲}.$$

تعریف ۱۳.۳.۱. نقطه ایزوتروپیک: اگر $p \in M$ و به ازای هر دو بردار مستقل خطی $X, Y \in T_pM$ انحنای برشی صفحه وابسته به X, Y عددی ثابت باشد، p را نقطه ایزوتروپیک M می نامیم.

قضیه ۲.۳.۱. اگر p یک نقطه ایزوتروپیک M باشد آنگاه:

$$\forall X, Y, Z, W \in T_pM \qquad R(X,Y,Z,W) = K_p(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)).$$

لم زیر را به عنوان نتیجه مهمی از قضیه فوق می توان بیان نمود.

لم ۱.۳.۱. لم شور: اگر تمام نقاط مانیفلدی با بعد بیش از یک ایزوتروپیک باشند آنگاه انحنای برشی این مانیفلد ثابت است و

$$R(X,Y,Z,W) = K(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)).$$

اثبات. منبع [۲۹] صفحات ۳۵ و ۳۶ . □

نامگذاری: اگر انحنای برشی یک مانیفلد در همه نقاط ثابت و برابر c باشد آنرا مانیفلد با انحنای ثابت c می نامیم.

نتیجه ۱.۳.۱. مانیفلد M با انحنای ثابت cاست اگر وتنها اگر

$$R_{ijkl} = c(g_{il}g_{kj} - g_{ik}g_{jl}).$$

از دیدگاه هندسه دیفرانسیل سطوح ریمانی با انحنای ثابت را می توان براساس علامت انحنای آنها به صورت زیر دسته بندی نمود.

- فضای اقلیدسی[۱]:فضاهای با انحنای ثابت صفر را اقلیدسی می نامیم.
- فضای هذلولوی[۲]: فضاهای با انحنای ثابت منفی را هذلولوی می نامیم.
- فضاهای تصویری[۳]:فضاهای با انحنای ثابت مثبت را تصویری می نامیم.

۴.۱ زیر مانیفلدها

در این بخش روی التصاق ریمانی یک زیر مانیفلد بحث خواهیم کرد و رابطه آن را با التصاق روی مانیفلد بیان نموده و سپس فرم بنیادی نوع دوم را تعریف می کنیم.
در این بخش فرض می کنیم که Mیک زیرمانیفلد n بعدی از مانیفلد $n+p$ بعدی N و g' متر روی N و g متر القا شده از g' روی M و نیز∇' و ∇ به ترتیب التصاق ریمانی روی N و Mاست .

تعریف ۱.۴.۱. ایمرسیون ایزومتری: نگاشت ایمرسیون $F : (M, g) \longrightarrow (N, \acute{g})$ را در نقطه $x \in M$ ایمرسون ایزومتری گویند هرگاه:

$$\forall X, Y \in T_xM \qquad g(X, Y) = g'(F_*X, F_*Y).$$

[۱]Euclidean spaces
[۲] Hyperbolic spaces
[۳]Projective spaces

اگر رابطه ذکر شده به ازای همه نقاط $x \in M$ برقرار باشد، آنگاه F را یک ایمرسیون ایزومتری گویند.

حال اگر $X,Y \in \tau(M)$ و $\bar{X},\bar{Y} \in \tau(N)$ تمدید X,Y روی N باشد، آنگاه به ازای هر $x \in M$ داریم:

$$(\nabla'^{\bar{Y}}_{\bar{X}})_x = (\nabla^{Y}_{X})_x + \alpha_x(X,Y).$$

که $\alpha_x(X,Y) \in (T_xM)^{\perp}$ و $(\nabla^Y_X)_x \in T_xM$. بنابراین $(\nabla^Y_X)_x$ مولفه مماسی و $\alpha_x(X,Y)$ مولفه عمودی $(\nabla'^{\bar{Y}}_{\bar{X}})_x$هستند. تساوی بالا به فرمول گاوس موسوم است.(معمولا $(\nabla'^{\bar{Y}}_{\bar{X}})_x$ را با ∇'^{Y}_{X} نمایش می دهند.)
منبع [۱۰] جلد ۲، صفحه ۱۱.

گزاره ۱.۴.۱. نگاشت

$$\alpha : \tau(M) \times \tau(M) \longrightarrow \tau(M)^{\perp},$$
$$(X,Y) \longrightarrow \alpha(X,Y).$$

یک نگاشت متقارن و دو خطی است، و $\alpha_x(X,Y) \in (T_xM)^{\perp}$ که تحدیدی از α است، تنها به X_x و Y_x بستگی دارد.

اثبات. منبع [۱۰] جلد ۲،صفحه ۱۲. □

نامگذاری: α را فرم بنیادی نوع دوم Mمی نامیم.

هرگاه M یک ابر رویه غوطه ور در N و ξ بردار یکه عمود بر M باشد، در یک همسایگی U از نقطه $x_{\circ} \in M$و به ازای هر $X,Y \in \tau(U)$ داریم:

$$\alpha(X,Y) = H(X,Y)\xi.$$

که $H : \tau(U) \times \tau(U) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ نگاشت دوخطی ومتقارن است.در این صورت Hرا فرم بنیادی نوع دوم اسکالری می نامیم.

تعریف ۲.۴.۱. مانیفلد تماما ژئودزیک: اگر مانیفلد M تحت یک ایمرسیون ایزومتری در مانیفلد دیگری غوطه ور شده باشد و فرم بنیادی نوع دوم آن صفر باشد آن را مانیفلد تماما ژئودزیک می نامیم.

تعریف ۳.۴.۱. اگر $X \in \tau(M)$ و $\xi \in \tau(M)^{\perp}$داریم:

$$\nabla'^{\xi}_{X} = -A_{\xi}X + D^{\xi}_{X} \in \tau(M) \oplus \tau(M)^{\perp}.$$

در این صورت A_ξ را عملگر شکلی[1] وابسته به ξ می نامیم. عملگر شکلی را با S نیز نمایش می دهیم. تساوی اخیر به فرمول وینگارتن موسوم است.

گزاره زیر ویژگی های A_ξ و نیز رابطه آن را با فرم بنیادی نوع دوم بیان می کند.

گزاره ۲.۴.۱. ۱)نگاشت $(X,\xi) \in \tau(M) \times \tau(M)^{\perp} \longrightarrow A_\xi X \in \tau(M)$ نگاشتی دو خطی است و$(A_\xi X)_x$ تنها به X_x و ξ_x وابسته است.

۲)

$$g(A_\xi X, Y) = g(\alpha(X,Y), \xi).$$

اثبات. منبع [۱۰] جلد ۲، صفحه ۱۴. □

تعریف ۴.۴.۱. میدان برداری انحنای میانگین [2]: هر گاه M زیرمانیفلد (N, g') ، و α فرم بنیادی نوع دوم آن و $e_1, \ldots, e_n$ یک پایه ارتونرمال $\tau(M)$ باشد آنگاه:

$$H = \frac{1}{n}\sum_i \alpha(e_i, e_i)$$

را بردار انحنای میانگین M می نامیم.

معادلات گاوس و کدازی که در ادامه معرفی می شوند، رابطه بین تانسور انحنای یک زیر مانیفلد را با مانیفلدی که در آن غوطه ور شده بیان می کنند:

گزاره ۳.۴.۱. معادله گاوس: اگر M زیر مانیفلد N و $X, Y, Z, W \in \tau(M)$ ، α فرم بنیادی نوع دوم M، R' و R به ترتیب تانسور انحنای مانیفلد N و M باشند، داریم:

---
[1] shape operator
[2] mean curvature vector field

$$R^{'}(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W)-g(\alpha(X,W),\alpha(Z,Y))+g(\alpha(Y,W),\alpha(Z,X)).$$

اثبات. منبع [۱۰] جلد ۲،صفحه ۲۳ . $\square$

گزاره ۴.۴.۱. معادله کدازی: هر گاه $X,Y,Z\in\tau(M)$ باشند، مولفه عمودی $R^{'}(X,Y)Z$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$(R^{'}(X,Y)Z)^{\perp}=\nabla^{\alpha}_{X}(Y,Z)-\nabla^{\alpha}_{Y}(X,Z).$$

که در آن α فرم بنیادی نوع دوم M است

اثبات. منبع[۱۰] جلد ۲، صفحه ۲۵. $\square$

تعریف ۵.۴.۱. انحناهای اصلی: مقادیر ویژه عملگر شکلی را انحناهای اصلی می نامیم و بردارهای ویژه وابسته به آن ها بردارهای اصلی نامیده می شوند.

تعریف ۶.۴.۱. نقطه نافی[1]: نقاطی از مانیفلد M را که همه انحناهای اصلی در آن برابر و مخالف صفر باشند را نقاط نافی می نامیم و مانیفلدی که همه نقاطش نافی باشد، تماما نافی نامیده می شود.

---

[1] umbilic point