دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

جهت اخذ درجه دکتری در رشته ریاضی محض

گراف های وابسته به حلقه ها و مفهوم دوگان

نگارش

مژگان افخمی گلی

استاد راهنما

دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور

دکتر فهیمه خوش آهنگ قصر

زمستان ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

چکیده

در این رساله، مفهوم گراف دوگان مقسوم علیه صفر را برای یک حلقه تعویضپذیر، معرفی می نماییم و خواص این گراف را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین ارتباط میان این گراف و گراف مقسوم علیه صفر را مطالعه می کنیم. به علاوه، گراف دوگان مقسوم علیه صفر را برای توسیع‌هایی از حلقه تعویضپذیر، مورد مطالعه قرار می دهیم. نیز گراف دوگان مقسوم علیه صفر را برای یک مجموعه جزئاً مرتب تعریف کرده و مورد بررسی قرار می دهیم.

پیشگفتار

در سال های اخیر، تحقیقات زیادی جهت نسبت دادن گراف های مختلف به ساختارهای جبری، انجام شده است. مهمترین این گراف ها، گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه تعویضپذیر می باشد. بک [1] در [?]، در سال ۱۹۸۸، اولین فردی بود که مفهوم گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه تعویضپذیر را معرفی نمود و رنگ آمیزی این گراف را بررسی کرد. وی تمام اعضای حلقه را به عنوان مجموعه رئوس گراف در نظر گرفت و دو راس متمایز a و b را مجاور نامید هر گاه $ab = 0$. پس از آن، در سال ۱۹۹۹، در [?]، اندرسن [2] و لیوینگستون [3]، مفهوم گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه تعویضپذیر را به این صورت معرفی نمودند که مجموعه رئوس گراف را تمام اعضای ناصفر مقسوم علیه های صفر حلقه، در نظر گرفتند و دو راس متمایز a و b را مجاور نامیدند هرگاه $ab = 0$. سپس، آن ها به مطالعه ویژگیهای این گراف و همچنین به بررسی ارتباط میان خواص گراف با خواص جبری حلقه پرداختند. افراد زیادی، ویژگیهای متعددی از گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه تعویضپذیر را مطالعه نموده اند (رجوع کنید به [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۹]، [۲۶]، [۳۱] و [۳۳]). همچنین گراف مقسوم علیه صفر برای توسیع های دیگری از یک حلقه تعویضپذیر، از جمله حلقه‌های چند جمله ایها و سری های توانی در

[1] Beck
[2] Anderson
[3] Livingston

[?] و [?] مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، تحقیقات زیادی جهت نسبت دادن گراف مقسوم علیه صفر به دیگر ساختارهای جبری انجام شده است. به عنوان مثال، گراف مقسوم علیه صفر یک نیمگروه، در [۲۳] و [۳۸]، مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین در [۳۹]، گراف مقسوم علیه صفر برای یک مجموعه جزئاً مرتب، تعریف و بررسی شده است. گراف مقسوم علیه صفر، برای حلقه های غیر تعویضپذیر نیز در [۳۲]، مطالعه شده است.

در طی چند سال اخیر، گراف های دیگری نیز به یک حلقه تعویضپذیر نسبت داده شده و مورد مطالعه قرار گرفته است (به [۶]، [۷]، [۱۲]، [۲۸]، [۲۹]، [۳۴] و [۳۷] رجوع کنید). یکی از این نوع گراف ها، گراف هم‌بیشین می باشد که نخستین بار در سال ۱۹۹۵، توسط شارما[۴] و باتوادکار[۵]، در [۳۴]، تعریف گردید و عدد رنگی و عدد خوشه ای این گراف مطالعه شد. پس از آن در سال ۲۰۰۸، در [۲۸]، ویژگیهای بیشتری از این گراف مورد بررسی قرار گرفت. همچنین، این گراف توسط افراد دیگری در [۲۹] و [۳۷] نیز مورد مطالعه قرار گرفت.

ما در این رساله مفهوم گراف دوگان مقسوم علیه صفر را برای یک حلقه تعویضپذیر، معرفی می نماییم. در فصل اول، به ارائه تعاریف و مفاهیم مقدماتی که مورد نیاز در سراسر رساله می باشد، می پردازیم. در فصل دوم، پس از تعریف گراف دوگان مقسوم علیه صفر یک حلقه تعویضپذیر، به مطالعه ویژگیهای این گراف پرداخته، همچنین ارتباط میان این گراف و گراف مقسوم علیه صفر را مطالعه می کنیم. به علاوه، گراف های دوگان مقسوم علیه صفر ویژه ای را، نیز مشخص می کنیم. در فصل سوم، گراف دوگان مقسوم علیه صفر را برای توسیع‌هایی از حلقه تعویضپذیر مورد مطالعه قرار می دهیم. در فصل چهارم، گراف دوگان مقسوم علیه صفر را برای یک مجموعه جزئاً مرتب تعریف کرده و مورد بررسی قرار می دهیم.

مقاله های [۱]، [۲]، [۳] و [۴] برگرفته از این رساله می باشند. به منظور کامل شدن مطالب و برای

[۴] Sharma

[۵] Bhatwadekar

سهولت خواننده، صورت برخی قضایای مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم و تنها قضایای جدید را با اثبات کامل بیان می‌داریم.

فصل ۱

تعاریف اولیه و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ معرفی نمادهای کلی

در سراسر این رساله، همواره R یک حلقه تعویضپذیر با عضو همانی غیر صفر می باشد.

مجموعه ایده آل های اول و بیشین R را به ترتیب با $\mathrm{Spec}(R)$ و $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین رادیکال جیکوبسن R، که اشتراک ایده آل های بیشین R است را با $J(R)$ نشان می دهیم. مجموعه عناصر پوچتوان در حلقه R را با $\mathrm{Nil}(R)$ نمایش می دهیم و اگر $\mathrm{Nil}(R) = \{0\}$، آنگاه R را حلقه ای تحویل یافته نامیم. به علاوه، مجموعه مقسوم علیه های صفر حلقه R و مجموعه عناصر یکه در R را به ترتیب با $Z(R)$ و $U(R)$ نشان می دهیم.

منظور از حلقه موضعی، حلقه‌ای با تنها یک ایده‌آل بیشین می باشد. فرض کنیم a عضوی از حلقه R باشد. در این صورت ایده‌آل اصلی تولید شده توسط a را با aR نشان می دهیم. همچنین حلقه‌های چندجمله‌ای ها و سری های توانی نسبت به متغیر مستقل x را به ترتیب با نمادهای $R[x]$ و

$R[[x]]$ نمایش می دهیم. نیز حلقه رده های همنهشتی به پیمانه n را با نماد $\mathbb{Z}_n$ نشان می دهیم.

ایده‌آل I در حلقه R را یک ایده‌آل پوچساز نامیم هر گاه $I = ann(a)$ به طوریکه a عضوی ناصفر در R است و منظور از $ann(a)$ مجموعه $\{r \in R \mid ra = 0\}$ می‌باشد.

می‌دانیم در حلقه های متناهی، هر عضوی از حلقه یا عنصری یکه است و یا یک مقسوم علیه صفر می باشد. همچنین در حلقه های متناهی، بنابر [۲۴، قضیه ۱]، اگر $|Z(R)| \geqslant 2$، آنگاه $|R| \leqslant |Z(R)|^2$.

برای مجموعه ناتهی A، قرار می دهیم $A^* := A \setminus \{0\}$. همچنین $|A|$ نشان دهنده تعداد اعضای A است هر گاه A مجموعه‌ای متناهی باشد و در غیر این‌صورت قرار می‌دهیم $|A| := \infty$. مجموعه‌های اعداد طبیعی و اعداد صحیح را به ترتیب با نمادهای $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ نشان می دهیم. همچنین مجموعه $\mathbb{N} \cup \{0\}$ را با نماد $\mathbb{N}_0$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی در یک مجموعه جزئاً مرتب

در این بخش به یادآوری مفاهیمی در یک مجموعه جزئاً مرتب می پردازیم (به [۲۲] مراجعه کنید). فرض کنیم $(P, \leqslant)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد که دارای کوچکترین عضو 0 است.

عنصر a در $(P, \leqslant)$ را اتم نامیم هرگاه $a \neq 0$ و برای هر عضو x از P، رابطه $0 \leqslant x \leqslant a$ ایجاب کند که $x = 0$ یا $x = a$. همچنین عنصر m در $(P, \leqslant)$ عضو بیشین نام دارد هرگاه برای هر عضو x از P رابطه $m \leqslant x$ ایجاب کند که $x = m$.

فرض کنیم S زیرمجموعه ای از P باشد. در این صورت عنصر x در P یک کران پایین برای S است هرگاه برای هر $s \in S$، داشته باشیم $x \leqslant s$. به روش مشابه x یک کران بالا برای S می باشد هرگاه برای هر $s \in S$، داشته باشیم $s \leqslant x$. مجموعه تمام کران های پایین S با S^ℓ و مجموعه تمام کران

های بالای S با S^u نمایش داده می شود. به عبارت دیگر

$$S^\ell := \{x \in P \mid \forall s \in S,\ x \leqslant s\}$$

و

$$S^u := \{x \in P \mid \forall s \in S,\ s \leqslant x\}.$$

فرض کنیم I زیرمجموعه ای ناتهی از P باشد. I را یک ایده آل از P گوییم هرگاه، برای هر دو عضو دلخواه x و y در P که $x \in I$ و $y \leqslant x$، داشته باشیم $y \in I$. همچنین ایده آل I را اول نامیم در صورتیکه اگر $x, y \in P$ و $\{x, y\}^\ell \subseteq I$، آنگاه $x \in I$ یا $y \in I$.

یک ایده آل بیشین برای P، ایده آلی سره از P است که در میان ایده آل های P، (با رابطه شمول) بیشین باشد. مجموعه ایده آل های بیشین P را با $\mathrm{Max}(P)$ نشان می دهیم. به طریق مشابه، یک ایده آل کمین برای P، ایده آلی از P است که در میان ایده آل های P، (با رابطه شمول) کمین باشد. مجموعه تمام ایده آل های اول کمین P را با $\mathrm{Min}(P)$ نشان می دهیم.

یک زنجیر در $(P, \leqslant)$ زیرمجموعه ای کلا مرتب در P می باشد. همچنین یک پادزنجیر در $(P, \leqslant)$، زیرمجموعه ای از P است بطوریکه برای هر دو عضو دلخواه x و y در P داشته باشیم $x \nleqslant y$ و $y \nleqslant x$.

قضیه زیر را دیلورث [1] در سال ۱۹۵۰ اثبات کرده است (به [۳۶] رجوع شود).

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنید $(P, \leqslant)$ یک مجموعه جزئا مرتب متناهی باشد. در این صورت کمترین تعداد زنجیرهای مجزای موجود در P که اجتماع آن ها شامل تمام عناصر P می شود، با بیشترین تعداد عناصر موجود در پادزنجیرها برابر است.

---

[1] Dilworth

۳.۱ مباحثی در نظریه گراف

در این بخش، همواره G را گرافی ساده و غیر جهت دار در نظر می گیریم. مجموعه راس ها و یال های G را به ترتیب با $V(G)$ و $E(G)$ نشان می دهیم. همچنین برای دو راس متمایز a و b در $V(G)$، نماد $a-b$ بدان معنا است که a و b مجاور هستند. نیز نماد $|G|$ نشان دهنده تعداد راس های موجود در گراف G می باشد. گراف G را متناهی گوییم هر گاه $|G|$ عددی متناهی باشد.

تعریف ۱.۳.۱ گراف H زیرگراف G است اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. زیرگراف فراگیر G زیرگراف H با $V(H) = V(G)$ است.

فرض کنیم V' زیرمجموعه ناتهی $V(G)$ باشد. زیرگراف G را که مجموعه راس هایش V' است و مجموعه یال هایش زیرمجموعه‌ای از آن یال های G است که هر دو انتهایش در V' است، زیرگراف القایی G نامیم.

درجه راس a در گراف G، تعداد یال هایی است که به a متصل می باشند و با نماد $\deg(a)$ نشان داده می شود. به علاوه، برای زیرمجموعه S از $V(G)$، مجموعه تمام راس هایی از S که با a مجاور می باشند را با نماد $N_S(a)$ نشان داده و آن را $S-$همسایگی a نامیم.

مکمل گراف G، که با $\overline{G}$ نشان می دهیم، گرافی است که مجموعه رئوس آن با مجموعه رئوس گراف G برابر است و دو راس متمایز آن مجاور می باشند اگر و فقط اگر آن دو راس در گراف G مجاور نباشند.

تظریف گراف H، گرافی مانند G است بطوریکه مجموعه رئوس G و H یکسان می باشد و هر یال در H یالی در G نیز است.

اجتماع دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ که $V(G_۱) \cap V(G_۲) = \emptyset$، گرافی است که با $G_۱ \cup G_۲$ نشان داده می شود و $V(G_۱ \cup G_۲) = V(G_۱) \cup V(G_۲)$ و $E(G_۱ \cup G_۲) = E(G_۱) \cup E(G_۲)$.

فرض کنیم G یک گراف و W مجموعه‌ای باشد که $W \cap V(G) \neq \emptyset$. در این صورت $G \setminus W$، گرافی است که با حذف راس های موجود در W، حاصل می شود.

تعریف ۲.۳.۱ یک مسیر در گراف G عبارت است از دنباله ناتهی $v_0 v_1 \ldots v_k$ بطوری که راس های v_0، v_1،...، v_k مجزا باشند و برای هر $1 \leqslant i \leqslant k$، راس های v_{i-1} و v_i مجاور باشند.

در این رساله، مسیر $v_0 v_1 \ldots v_k$ را به صورت $v_0 - v_1 - \ldots - v_k$ نشان می دهیم. همچنین تعداد یال های موجود در مسیر را، طول مسیر نامیم. در گراف G، فاصله میان دو راس متمایز a و b، که با $d_G(a,b)$ (یا اگر بیم ابهام نرود $d(a,b)$) نشان داده می شود، عبارت است از طول کوتاهترین مسیری که a و b را به هم متصل می سازد، البته اگر چنین مسیری موجود باشد. در غیر این صورت، قرار می دهیم $d_G(a,b) := \infty$.

قطر گراف عبارت است از

$$\operatorname{diam}(G) = \operatorname{Sup}\{d_G(a,b) \mid \ a,b \in V(G),\ a \neq b\}.$$

اگر $a,b \in V(G)$ موجود باشند که $d_G(a,b) = \infty$، آنگاه قرار می دهیم $\operatorname{diam}(G) := \infty$.

گراف G همبند نامیده می شود هرگاه میان هر دو راس متمایز در G، مسیری وجود داشته باشد. G را گراف کامل نامیم هرگاه هر دو راس متمایز در $V(G)$، مجاور باشند. برای عدد صحیح مثبت n، گراف کامل با n راس را با K_n نشان می دهیم. G را بطور کلی ناهمبند نامیم هرگاه هیچ مجاورتی در گراف G موجود نباشد، به عبارت دیگر $E(G) = \emptyset$. چنین گرافی را گراف تهی نیز می نامند.

دور در گراف G عبارت است از مسیری که راس های ابتدا و انتهای آن، مجاور باشند. تعداد یال های موجود در دور را، طول دور نامیم. دور به طول n را با C_n نشان می دهیم. به علاوه، گرافی که از یک دور تشکیل شده باشد را گراف دور نامیم. کمر گراف G، که با $g(G)$ نشان داده می شود،

طول کوتاهترین دور در G است، اگر دوری در G موجود باشد. در غیر این صورت، قرار می دهیم $g(G) := \infty$.

تعریف ۳.۳.۱ گراف r−بخشی که r عدد صحیح مثبتی است، گرافی است که مجموعه رئوس آن را بتوان به r زیرمجموعه افراز کرد بطوریکه برای هر یال، هر دو راس متصل به آن در یک زیرمجموعه واقع نشوند. گراف کامل r−بخشی، گرافی است که در آن هر راسی در یک زیرمجموعه، با تمام رئوس سایر زیرمجموعه‌ها مجاور باشد. گراف کامل دوبخشی، با بخش هایی با اندازه های m و n را با $K_{m,n}$ نشان می دهیم.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنیم G گرافی همبند باشد و $a \in V(G)$. مرکز گریزی راس a را که با $e(a)$ نشان می دهیم، برابر است با بیشترین مقدار فاصله راس a با بقیه راس های گراف G. کمترین مقدار مرکز گریزی راس های گراف G را، شعاع گراف G نامیده و با $r(G)$ نشان می دهیم. در حقیقت داریم:

$$e(a) = \max\{d_G(a,b) \mid b \in V(G)\}$$

و

$$r(G) = \min\{e(a) \mid a \in V(G)\}.$$

تعریف ۵.۳.۱ در گراف G، $\chi(G)$ نشان دهنده عدد رنگی در G می باشد و برابر است با کمترین تعداد رنگ هایی که می توان به راس های گراف G نسبت داد به طوریکه هر دو راس مجاور دارای رنگ های متفاوت باشند.

یک خوشه در گراف G، عبارتست از زیرگرافی کامل از آن و تعداد راس های موجود در بزرگترین خوشه G را، عدد خوشه ای G نامیده و با $\omega(G)$ نشان می دهیم. واضح است که همواره $\chi(G) \geqslant \omega(G)$ (به [۲۰، صفحه ۲۸۹] رجوع شود).

تعریف ۶.۳.۱ گراف G را مسطح نامیم هرگاه بتوان آن را روی صفحه به گونه ای رسم کرد که یالها فقط در دو راس متصل به خود، همدیگر را قطع کنند. یک مشتق از گراف G، گرافی است که با جایگزین کردن یال توسط مسیر در گراف G، حاصل می شود.

در سال ۱۹۳۰، کوراتوفسکی [۲] گراف های مسطح را طبقه بندی نموده است. قضیه کوراتوفسکی بیان می دارد که:

قضیه ۷.۳.۱ [۱۸، صفحه ۱۵۳] گراف G مسطح است اگر و فقط اگر شامل هیچ مشتقی از گراف های K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

در ادامه به معرفی نمونه هایی خاص از گراف ها می پردازیم.

گرافی با n راس که تمام راس ها به جز راسی مانند a، درجه یک دارند و همگی با راس a مجاور می باشند را گراف ستاره با مرکز a، می نامیم. در واقع، هر گراف ستاره با n راس، با گراف $K_{1,n-1}$ یکریخت می باشد. گراف پوچ، یعنی گرافی که مجموعه رئوس آن تهی می باشد، را به عنوان گراف ستاره در نظر می گیریم. همچنین، گراف دوستاره اجتماعی از دو گراف ستاره با مرکزهای a_1 و a_2 می باشد بطوریکه a_1 و a_2 مجاور هستند.

گراف G را جنگل نامیم هرگاه شامل هیچ دوری نباشد. جنگل همبند را درخت می نامیم و درختی که شامل همه راس های گراف باشد را درخت فراگیر نامیم.

گراف تک دور، گرافی است همبند که تنها شامل یک دور می باشد، یا به عبارت دیگر، گراف تک دور را می توان بصورت یک دور که به هر راس آن یک درخت متصل شده است، در نظر گرفت.

گراف G را اویلری نامیم هرگاه دارای دوری باشد که از همه یالها گذشته و از هر یال فقط یک بار عبور کند.

---

[۲] Kuratowski

قضیه ۸.۳.۱ [۱۸، قضیه ۱.۴] گراف همبند ناتهی G اویلری است اگروفقط اگر درجه هر راس عددی زوج باشد.

گراف G را همیلتنی نامیم هرگاه دارای دوری باشد که از همه راس ها گذشته و از هر راس فقط یک بار عبور کند.

فرض کنیم H یک نیم گروه و S زیرمجموعه ای از H باشد. گراف کیلی H نسبت به S که با $\mathrm{Cay}(H,S)$ نشان داده می شود، گرافی جهت دار است با مجموعه رئوس H و مجموعه یالهای $E(H,S)$ که شامل زوج های مرتب (x,y) است بطوریکه $s \in S$ موجود باشد که $sx = y$ (به [۲۵] مراجعه کنید). منظور از زوج مرتب (x,y) یال جهت داری از x به y است که آن را با نماد $x \to y$ نشان می دهیم. پس $x \to y$ هر گاه $s \in S$ وجود داشته باشد بطوریکه $sx = y$. به علاوه، اگر فرض کنیم x و y مجاور هستند اگروفقط اگر (x,y) یا (y,x) متعلق به مجموعه $E(H,S)$ باشد، آنگاه گراف کیلی $\mathrm{Cay}(H,S)$، گرافی غیرجهت دار خواهد بود. لذا در گراف کیلی غیر جهت دار $\mathrm{Cay}(H,S)$، راس های x و y مجاور هستند هرگاه $x \to y$ یا $y \to x$.

۴.۱ گراف مقسوم علیه صفر و گراف دوگان مقسوم علیه صفر

در این بخش، پس از یادآوری گراف مقسوم علیه صفر به معرفی گراف دوگان آن در یک حلقه تعویضپذیر می پردازیم. همچنین قضایایی در گراف های مقسوم علیه صفر را یادآوری می کنیم که در واقع به نوعی دوگان آنها را برای گراف دوگان مقسوم علیه صفر، بررسی نموده ایم.

فرض کنیم R یک حلقه تعویضپذیر با عضو همانی غیر صفر باشد. همچنان که در پیشگفتار ذکر شد، گراف مقسوم علیه صفر حلقه R، گرافی ساده و غیر جهت دار با مجموعه رئوس $Z^*(R) = Z(R) \setminus \{0\}$ است که در آن دو راس متمایز x و y مجاور هستند هرگاه $xy = 0$. گراف

مقسوم علیه صفر R، با $\Gamma(R)$ نشان داده می شود.

دراین رساله سعی مابر آن است که دوگانی برای گراف های مقسوم علیه صفر معرفی شود که از طرفی ارتباط نزدیکی میان ساختار گراف دوگان مقسوم علیه صفر و ساختار حلقه وجود داشته باشد و از طرف دیگر، بتوان ارتباط هایی را میان گراف مقسوم علیه صفر و گراف دوگان مقسوم علیه صفر یافت.

فرض کنیم R یک حلقه تعویضپذیر با عنصر همانی غیر صفر باشد. برای هر عضو a در R، نگاشت ضربی $f_a : R \to R$ را که توسط ضرب در a تعریف می شود در نظر می گیریم. بدیهی است که f_a یک همریختی $R-$مدولی است. حال مجموعه مقسوم علیه های صفر حلقه R را بصورت زیر می توان توصیف کرد:

$$Z(R) = \{x \in R \mid \text{یک به یک نیست } f_x\}.$$

به عنوان دوگان مجموعه بالا، قرار می دهیم

$$\begin{aligned} W(R) :&= \{x \in R \mid \text{پوشا نیست } f_x\} \\ &= \{x \in R \mid xR \neq R\}. \end{aligned}$$

واضح است که برای هر دو راس متمایز x و y در $Z^*(R)$، راس های x و y در $\Gamma(R)$ مجاور هستند اگر و فقط اگر x عضوی ناصفر در $Ker(f_y)$ باشد یا y عنصری ناصفر در $Ker(f_x)$ باشد.

به عنوان دوگانی مناسب برای گراف مقسوم علیه صفر $\Gamma(R)$، گراف $\Gamma'(R)$ را در نظر می گیریم که مجموعه رئوس آن $W^*(R) = W(R) \setminus \{0\}$ می باشد و دو راس متمایز x و y در $\Gamma'(R)$ مجاور هستند اگر و فقط اگر همرده $x + yR$ عضوی ناصفر در $Coker(f_y)$ باشد و همرده $y + xR$ نیز عضوی ناصفر در $Coker(f_x)$ باشد. به عبارت دیگر، x و y در $\Gamma'(R)$ مجاور هستند اگر و فقط اگر $x \notin yR$ و $y \notin xR$. از این پس گراف $\Gamma'(R)$ را، گراف دوگان مقسوم علیه صفر حلقه R و یا به اختصار گراف دوگان، می نامیم.

در ادامه، قضایایی در ارتباط با گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه تعویضپذیر را گرد آوری می نماییم. در قضیه زیر، اندرسن و لیوینگستون قطر و کمر گراف مقسوم علیه صفر حلقه R را بررسی نموده اند.

قضیه ۱.۴.۱ [۱۰، قضیه ۲.۳] فرض کنیم R یک حلقه تعویضپذیر باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leqslant ۳$. به علاوه، اگر $\Gamma(R)$ شامل دور باشد، آنگاه $g(\Gamma(R)) \leqslant ۷$.

همچنین اندرسن و لیوینگستون قضیه زیر را در حلقه های آرتینی (به خصوص حلقه های متناهی) و تعویضپذیر، اثبات کرده‌اند.

قضیه ۲.۴.۱ [۱۰، قضیه ۲.۴] فرض کنیم R یک حلقه آرتینی و تعویضپذیر باشد. اگر $\Gamma(R)$ شامل دور باشد، آنگاه $g(\Gamma(R)) \leqslant ۴$.

مولی [۳] در [۳۰] و آکستل [۴]، کویکندال [۵] و استیکلز[۶] در [۱۴]، قضیه فوق را برای یک حلقه تعویضپذیر دلخواه ثابت کردند و نشان دادند که اگر R یک حلقه تعویضپذیر باشد و $\Gamma(R)$ شامل دور باشد، آنگاه $g(\Gamma(R)) \leqslant ۴$.

در قضیه زیر، اندرسن و لیوینگستون ارتباط میان متناهی بودن حلقه R و گراف مقسوم علیه صفر حلقه R را بررسی نموده اند.

قضیه ۳.۴.۱ [۱۰، قضیه ۲.۲] فرض کنیم R حلقه ای تعویضپذیر باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ متناهی است اگر و فقط اگر R متناهی باشد یا R حوزه صحیح باشد. به ویژه، اگر $۱ \leqslant |\Gamma(R)| \leqslant \infty$، آنگاه R متناهی است و میدان نمی باشد.

[۳] Mulay
[۴] Axtell
[۵] Coykendall
[۶] Stickles

اندرسن و لیوینگستون، حلقه هایی که گراف مقسوم علیه صفر آن ها، دارای یک درخت فراگیر یکریخت با گراف ستاره است، را مشخص نموده‌اند. به عبارت دیگر، حلقه هایی که گراف مقسوم علیه صفر آن ها، تظریفی از گراف ستاره است، را دسته بندی کرده‌اند.

قضیه ۴.۴.۱ [۱۰، قضیه ۵.۲] فرض کنیم R یک حلقه تعویضپذیر باشد. در این صورت راسی از $\Gamma(R)$ موجود است بطوریکه با همه رئوس دیگر مجاور است اگر و فقط اگر $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times A$، که A یک حوزه صحیح است و یا $Z(R)$ یک ایده‌آل پوچساز باشد (و لذا اول است).

همچنین، اندرسن و لیوینگستون حلقه هایی که گراف مقسوم علیه صفر آن ها، گراف ستاره می باشد، را مشخص نموده اند.

قضیه ۵.۴.۱ [۱۰، قضیه ۱۳.۲] فرض کنیم R حلقه ای تعویضپذیر باشد بطوریکه $|\Gamma(R)| \geqslant ۴$. در این صورت $\Gamma(R)$ گراف ستاره است اگر و فقط اگر $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{F}$، که در آن $\mathbb{F}$ یک میدان متناهی است. به ویژه، اگر $\Gamma(R)$ گراف ستاره باشد، آنگاه $|\Gamma(R)| = p^n$، که در آن p عددی اول است و $n \in \mathbb{N}_۰$. به عکس، هر گراف ستاره از مرتبه p^n را می توان به عنوان یک گراف مقسوم علیه صفر در نظر گرفت.

اندرسن و لیوینگستون، حلقه هایی را که گراف مقسوم علیه صفر آن ها کامل است، نیز مشخص نموده اند.

قضیه ۶.۴.۱ [۱۰، قضیه ۸.۲] فرض کنیم R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ گرافی کامل است اگر و فقط اگر $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ و یا برای هر $x, y \in Z(R)$، $xy = ۰$.

آکستل، کویکندل و استیکلز در [۱۴] و لوکاس [۷] در [۲۷]، گراف مقسوم علیه صفر توسیع های حلقه R را به حلقه چندجمله‌ایهای $R[x]$ و حلقه سری های توانی $R[[x]]$ مورد مطالعه قرار داده‌اند.

[۷] Lucas