دانشگاه الزهرا(س)
دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضیات کاربردی ، گرایش آنالیز عددی

عنوان

تعین پارامتر منبع در معادله‌ی گرما با یک شرط کرانه‌ای غیر- موضعی

استاد راهنما

آقای دکتر علی مردان شاه رضائی

استاد مشاور

پژوهشگر

نسیمه مالک پور

زمستان ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر و مادر دلسوز

و همسر مهربانم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، آقای دکتر شاه‌رضائی ،صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

با سپاس فراوان از

آقای دکتر جوادی

که زحمت داوری پایان نامه ام را بر عهده داشتند.

چکیده

در این پایان‌نامه، هدف مطالعه‌ی جواب عددی مسأله‌ی معکوس از پیدا کردن پارامتر منبع $p(t)$ در معادله‌ی نفوذ:

$$U_t = U_{xx} + p(t)U + f(x,t), \qquad (۱)$$

با شرایط کرانه‌ای غیر- موضعی:

$$U(0,t) = \int_0^1 K_0(x)U(x,t)dx + g_0(t); \qquad 0 < t < T, \qquad (۲)$$

$$U(1,t) = \int_0^1 K_1(x)U(x,t)dx + g_1(t); \qquad 0 < t < T, \qquad (۳)$$

با شرط اولیه‌ی:

$$U(x,0) = S(x); \qquad 0 \le x \le 1, \qquad (۴)$$

و با شرط فوق اضافی:

$$U(x^*,t) = E(t); \qquad x^* \in (0,1)\ , 0 \le t \le T\ , E(t) \neq 0 \qquad (۵)$$

می‌باشد که در اینجا T زمان نهایی، f ، g_0 ، K_0 ، g_1 ، K_1 ، S و E توابع به قدر کافی هموار می‌باشد. معادله‌ی (۱) می‌تواند فرایند انتقال گرما با پارامتر $p(t)$ را توصیف کند و معادله‌ی (۵) درجه‌ی $U(x,t)$ در نقطه‌ی x^* را نشان می‌دهد. آن دسته از مسائلی که در هر نقطه‌ی دلخواه t از دامنه‌شان؛ $p(t) = 0$؛ نظریه شبه استاتیک از گرماشناسی را ارائه می‌دهد. برای $p(t) \neq 0$، مسأله جدول توزیع درجه را توصیف می‌کند. مدل مسأله با شرایط کرانه‌ای دیریکله یا نیومن، می‌تواند به عنوان مسأله‌ی کنترل با پارامتر منبع کنترل در نظر گرفته شود. هدف از این پروژه، حل معادله‌ی (۱) با شرایط داده شده و یافتن $p(t)$ و درجه حرارت $U(x,t)$ در هر نقطه‌ی x^* در فضای دامنه است.

کلید واژه ها: معادله‌ی گرما، مسأله‌ی معکوس، شرایط کرانه‌ای غیر-موضعی، شرط فوق اضافی، روش تفاضلات متناهی، روش پیشگو- اصلاحگر

فهرست مطالب

پیشگفتار

امروزه نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی یکی از مهمترین شاخه‌های ریاضیات شده است به طوری که حل بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی به حل مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برمی‌گردد. در بحث پیرامون مسائل معادلات دیفرانسیل، دو موضوع دارای اهمیّت است یکی آن که چطور می‌توان از یک مساله فیزیکی به یک مسأله معادلات دیفرانسیل رسید و دیگری حل مسائل معادلات دیفرانسیل به کمک روش‌های موجود در معادلات با مشتقات جزئی می‌باشد. در این پایان‌نامه مساله‌ی معکوس از تعیین ضریب مجهول وابسته به زمان در مساله‌ی سهموی با شرط اولیّه و شرایط کرانه‌ای غیر- موضعی همراه با شرط فوق اضافی تعریف شده در نقطه‌ی خاص از فضای دامنه را در نظر گرفته‌ایم. سیستم معادلات خطی حاصل از روش ضمنی محض دارای ماتریس سه- قطری است. دانشمندان زیادی روی این مسأله کار کرده‌اند که از جمله می‌توان به پروفسور کنان [۱] و پروفسور لین [۲] اشاره کرد که به ترتیب در سال‌های ۱۹۸۸ و ۱۹۹۰ بر روی مسأله‌ی (۱)-(۵) در حالت $p(t) = ۰$ که در واقع همان تئوری شبه استاتیک از گرماشناسی است؛ تحقیق کرده‌اند. در حالت $p(t) \neq ۰$ می‌توان به مطالعات دانشمندانی چون کاپاسو [۳] و مادالنا [۴] بر روی معادله‌ی نفوذ (۱)-(۵) در سال ۱۹۸۷ و نیز

[۱] Cannon

[۲] Lin

[۳] Capasso

[۴] Maddalena

پروفسور مولر [5] در سال ۱۹۶۱ اشاره کرد. در این پایان‌نامه، در فصل اول مقدمه‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیان می‌شود و تعاریف و مفاهیم لازم در این پایان‌نامه را یادآوری می‌کنیم. فصل دوم به کاربردهایی از مسائل معکوس اختصاص می‌یابد و در فصل چهارم یک روش پیشگو- اصلاحگر برای حل مسأله‌ی بیان شده، مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در طی آن، ابتدا ضریب مجهول وابسته به زمان، به‌دست آمده و سپس تمامی مقادیر مجهول اصلاح می‌شوند و در انتها نتایج عددی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در نهایت با نتیجه‌گیری، پایان‌نامه را به اتمام می‌رسانیم. این پایان‌نامه برگرفته از مقاله‌ی [۳۰] است؛ که به تبیین و تشریح حل مسأله‌ی معکوس سهموی با استفاده از روش ضمنی محض و استفاده از تقریب انتگرالی به روش ذوزنقه‌ای پرداخته شده است و همین‌طور با معرفی روش سیمپسون نتایج جالبی حاصل شده است.

نسیمه مالک‌پور

زمستان ۹۱

[5] Muller

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که به اختصار PDE خوانده می‌شود، به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل گفته می‌شود که در آن‌ها توابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق جزئی توابع نسبت به آن متغیرها شرکت داشته باشند. به این دسته از معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای (نسبی) یا معادلات دیفرانسیل جزئی گفته می‌شود. معادلات دیفرانسیل شاخه‌ی گسترده‌ای از ریاضیات است که شامل مفاهیم بسیار زیادی در خصوص حل معادلات می‌باشد؛ معادلاتی که در زمینه‌های مختلف بخصوص مدل‌سازی مسائل فیزیکی و حل مسائل مهندسی ظاهر می‌شوند. در این فصل قضایا و مفاهیمی را که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، مورد مطالعه قرار می‌دهیم و مفاهیم اساسی و مهم معادلات دیفرانسیل لازم را یادآوری می‌کنیم. لازم به ذکر است تعاریف لازم برای فصل دوم که کاربردها در آن ارائه شده است نیز در این فصل آمده است.

۱.۱ معرفی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

اگر معادله‌ای شامل چند متغیر و مشتقات آن‌ها باشد، آن معادله یك معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله‌ای است که شامل یك تابع و متغیرهای آن و مشتقات جزئی مربوط می‌باشد.

شکل کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$G(u, u_x, u_{xx}, ..., u_{x^n}, u_y, u_{yy}, ..., u_{y^m}, \cdots, u_{x^i y^j}, \cdots) = 0,$$

که در آن داریم:

$$\partial_x u = u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \partial_{yy} u = u_{yy} = u_{y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

مثال: عبارت زیر یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی می‌باشد:

$u_{xxx}(x,y) + u_{yyy}(x,y) = 0$ یا $u_{x^3}(x,y) + u_{y^3}(x,y) = 0$.

مجموعه معادلات PDE یك مجموعه‌ی ناشمارا می‌باشد. از بین این مجموعه تنها بخش کوچکی دارای کاربردهای خاص می‌باشد.
غالب مسائلی که در کاربردهای PDE مطرح می‌شوند، دارای شکل کلی زیر می‌باشند:

$$Au_{xx}(x,y) + Bu_{xy} + Cu_{yy}(x,y) + Du_x(x,y) + Eu_y(x,y) + Fu(x,y) = G(x,y),$$

که در آن A, B, C, D, E, F ضرایب و G قسمت ناهمگن معادله‌ی PDE است. این معادله را نمایش استاندارد معادله درجه ۲ از مشتقات جزئی می‌نامند. چنانچه A، B، ...، F توابعی از x, y باشند، معادله‌ی درجه ۲ خطی نامیده می‌شود. اگر $G \equiv 0$، به اصطلاح این معادله را همگن و در غیر اینصورت آن را ناهمگن می‌نامیم.
معادله غیرخطی درجه دو مانند:

$$u_{xx} + (sin\ u)_{yy} = 0,$$

معادله خطی درجه دو ناهمگن با ضرایب متغیر مانند:

$$u_{xx}(x,y) + xy^2 u_{yy}(x,y) + e^x u(x,y) = 10,$$

معادله با مشتقات جزئی خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب متغیر مانند:

$$y^{۲}u_{x^{۲}} - xu_{y^{۲}} = xy.$$

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی درجه ۲ در حوزه‌ی تابع $u(x, y, z)$، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روی خط، صفحه و یا فضا تعریف می‌شوند.
در بسیاری از کاربردها، مقادیر متغیر u در مرز ناحیه یا فضا یا روی خط معلوم می‌باشد. در برخی کاربردها نیز مقادیر تابع u در نقطه شروع زمان و مکان معلوم می‌باشد. مسائل معادلات دیفرانسیل به چند گروه تقسیم می‌شوند، یکی از این گروه‌ها، گروه مسائل با مقادیر کرانه‌ای [۱] می‌باشد. یکی دیگر از این گروه‌ها را گروه مسائل با مقادیر اولیه [۲] می‌نامند.

۲.۱ شرایط اولیه و کرانه‌ای

برای به دست آوردن جواب یکتای یک معادله دیفرانسیل جزئی به مجموعه‌ای از شرایط مکمل نیاز است. شرایط یاد شده به عنوان شرایط اولیّه و کرانه‌ای تقسیم بندی می‌شوند.
تعریف: شرایط اولیّه به معنی معلوم بودن مقدار متغیر وابسته در یک حالت اولیّه است.
تعریف: شرط کرانه‌ای به معنی معلوم بودن مقدار متغیر وابسته یا مشتقات آن در کرانه‌های قلمرو حل معادله دیفرانسیل جزئی است.

۱.۲.۱ انواع شرایط کرانه‌ای

برخی از شرایط کرانه‌ای به قرار زیر می‌باشد:
شرایط کرانه‌ای دیریکله [۳] : اگر مقدار متغیر وابسته بر روی کرانه‌ها مشخص شده باشد آن را شرایط کرانه‌ای دیریکله می‌نامند.
شرایط کرانه‌ای نیومن [۴] : اگر مشتق متغیر وابسته در کرانه‌ها معلوم باشد آن را شرایط کرانه‌ای نیومن می‌گویند.

[۱] boundary value problems
[۲] initional value problems
[۳] Dirichlet boundary condition
[۴] Numan boundary condition

شرایط کرانه‌ای آمیخته [5] : اگر شرایط کرانه‌ای اعمال شده ترکیب خطی از دو شرط نیومن و دیریکله باشد آن را آمیخته می‌نامند.
شرایط کرانه‌ای روبین [6] : در پاره‌ای موارد، شرایط کرانه‌ای در قسمتی از کران، دیریکله و در قسمت دیگر نیومن است؛ این نوع شرایط کرانه‌ای را روبین گویند.
شرایط کرانه‌ای کوشی [7] : اگر در مسأله‌ی مقدار اولیه به جای متغیر زمان، متغیر مکان به کار ببریم آنگاه مسأله را مسأله کوشی گوییم و شرایط کرانه‌ای را شرایط کرانه‌ای از نوع کوشی می‌گوییم. به طور مثال، مسأله زیر یک مسأله کوشی است:

$$\begin{cases} y' = f(y,x); \quad \mathrm{x} > ۰, \\ y(x_۰) = y_۰. \end{cases}$$

شرایط کرانه‌ای غیر- موضعی: اگر شرایط کرانه‌ای مسأله هیچ یک از شرایط کرانه‌ای فوق نباشد یا به صورت انتگرالی باشد، مسأله را با شرایط کرانه‌ای غیر- موضعی نامند.
شرط فوق اضافی: اگر در معادله دیفرانسیل تعداد مجهولات بیشتر از یکی باشد و تنها با استفاده از شرایط موجود، مسأله قابل حل نباشد و احتیاج به اطلاعات بیشتری درمورد جواب باشد، در اینجا شرط فوق اضافی وارد شده و با دادن اطلاعاتی بیشتر به یافتن جواب عددی کمک می‌کند. این شرط معمولاً مقدار جواب در نقطه‌ای خاص از فضای دامنه را به ما می‌دهد.

۲.۲.۱ مسأله‌ی مقدار اولیه

فرمول بندی یک پدیده‌ی فیزیکی در شبیه سازی، مهندسی برق نظریه‌ی کنترل، اقتصاد و نظایر آن به طور معمول به یک مسأله مقدار اولیه مانند:

$$\begin{cases} y' = f(x,t); \quad \mathrm{t} > ۰, \\ y(۰) = y_۰, \end{cases}$$

می‌انجامد که در آن تابع f و مقدار $y_۰$ معلوم می‌باشد.

[5] mixed boundary condition
[6] Rubin boundary condition
[7] Cauchy boundary condition

۳.۲.۱ مسائل با مقادیر کرانه‌ای

یک مسأله‌ی کرانه‌ای به صورت:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \quad \mathrm{a} < x < b, \\ \qquad y(a) = \alpha, \\ \qquad y(b) = \beta, \end{cases}$$

می‌باشد که در آن تابع f و مقادیر a ، b ، α و β معلوم است. یك مسأله دیفرانسیل، خطی نامیده می‌شود وقتی که معادله و شرایط اولیه یا مقادیر کرانه‌ای آن خطی باشد. یک مسأله‌ی PDE همگن [۸] نامیده می‌شود وقتی معادله و شرایط آن همگن باشند.

تعریف: مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل عبارت است از مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله.
معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} = ۲x + y.$$

رابطه‌ی اخیر یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، مرتبه دو است که در آن u متغیر وابسته و x و y متغیر مستقل‌اند.
یک معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم دارای شکل کلی زیر است:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{x^۲}, u_{xy}, u_{y^۲}) = ۰; \quad u_{x^۲} = u_{xx} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲},$$

که در آن u متغیر وابسته و x و y متغیرهای مستقل می‌باشد.

[۸] homogenus

تعریف: معادله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Au_{x^2} + Bu_{xy} + Cu_{y^2} = F(x, y, u, u_x, u_y),$$

رابطه‌ی فوق را معادله با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم شبه خطی می‌نامیم که در آن ضرایب A و B و C توابعی از (x, y, u, u_x, u_y) می‌باشد.
معادله‌ی زیر را در نظر میگیریم:

$$u_{x^2} + u_x u_y = u_x - y,$$

این رابطه را یک معادله با مشتقات جزئی شبه خطی مرتبه‌ی دوم می‌نامند.
چنانچه در معادله‌ی شبه‌خطی ضرایب A، B و C توابعی از x و y باشند آنگاه این معادله را معادله با مشتقات جزئی سهموی خطی می‌نامند اگر در آن تمامی ضرایب توابعی از x و y باشند و با فرض اینکه $D \subset R^2$ داشته باشیم:

$$4AC - B^2 = 0 \quad \forall (x, y) \in D,$$

و با همین مفروضات اگر

$$4AC - B^2 < 0 \quad \forall (x, y) \in D,$$

معادله را معادله با مشتقات جزئی هذلولوی خطی و اگر

$$4AC - B^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in D,$$

معادله را معادله با مشتقات جزئی بیضوی می‌نامند.
ساده‌ترین شکل معادله دیفرانسیل سهموی را می‌توان معادله‌ی حرارت دانست که در حالت یک بعدی نسبت به مکان، به صورت زیر است:

$$u_t = ku_{xx} + f(x, t),$$

که در آن u ، دما به صورت یک بعدی و k ، ضریب مثبت و ثابتی است که میزان ضریب نفوذ هدایت گرمایی را نشان می‌دهد و f یک منبع گرمایی می‌باشد. معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی به عنوان مدل ریاضی حاکم بر فرآیندهای پخش و نشر، کاربردهای فراوان دارد [۲]. برای روش‌هایی که در این مبحث ارائه می‌شود، خطی و همگن بودن یك معادله، در وجود جواب معادله نقش اساسی دارد. برای توضیح اینکه به چه دلیل به حل معادلات مشتقات جزئی نیازمندیم؛ باید گفت مسائلی در فیزیك موجود است که حل دقیق آن به حل یک معادله با مشتقات جزئی می‌انجامد.

تعریف: اگر یک معادله دیفرانسیل را به شکل چندجمله‌ای بر حسب u و مشتقات جزئی‌اش در نظر بگیریم، بالاترین درجه این چندجمله‌ای را درجه‌ی این معادله دیفرانسیل گویند.

۳.۱ روش تفاضلات متناهی

روش تفاضات متناهی، روش عددی برای تقریب معادلات دیفرانسیل می‌باشد. در این روش عبارت‌های مشتق مرتبه‌ی اول، دوم و بالاتر را با خارج قسمت عبارات تفاضلی تقریب می‌زنیم.
وقتی δx کوچک باشد، تقریب f' به صورت عبارت زیر می‌باشد:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{\delta x}.$$

در حقیقت این فرمول، معادله‌ی تفاضلی پیشرو برای مشتق مرتبه اول می‌باشد. با به‌کاربردن این عبارت تفاضلی و عبارات مشابه برای مشتقات مراتب بالاتر، عبارات مشتق موجود در معادلات دیفرانسیل را تقریب می‌زنیم. در ادامه به معرفی برخی از عملگرهای تفاضلی که در مبحث تفاضلات متناهی از آنها استفاده می‌کنیم، می‌پردازیم.

۱.۳.۱ معرفی برخی از عملگرهای تفاضلی

عملگرهای تفاضلی در معادلات تفاضلی بکار می‌روند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:
فرض کنیم تابع f بر فاصله‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد. قرار می‌دهیم $f_{n+j} \cong f(x_n + j\delta x)$ که در آن n عدد حسابی و j عدد صحیح می‌باشد و نیز x_n و δx اعداد حقیقی، δx طول گام مکانی روی محور xها بوده و به صورت $\delta x = x_{n+1} - x_n$ بیان می‌گردد. حال عملگرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

عملگر انتقال (E): $E^j f_n = f(x_n + j\delta x),$

عملگر پیشرو(انتقال به جلو، Δ): $\Delta = E - ۱; \quad \Delta f_n = (E - ۱)f_n = f_{n+۱} - f_n,$

عملگر پسرو(انتقال به عقب، ∇): $\nabla = ۱ - E^{-۱}; \quad \nabla f_n = (۱ - E^{-۱})f_n,$

عملگر مرکزی (δ): $\delta = (E^{\frac{۱}{۲}} - E^{\frac{-۱}{۲}}); \quad \delta f_n = (E^{\frac{۱}{۲}} - E^{\frac{-۱}{۲}})f_n = f_{n+\frac{۱}{۲}} - f_{n-\frac{۱}{۲}},$

عملگر میانگین (μ):

$\mu = \frac{۱}{۲}(E^{\frac{۱}{۲}} + E^{\frac{-۱}{۲}}); \quad \mu f_n = \frac{۱}{۲}(E^{\frac{۱}{۲}} + E^{\frac{-۱}{۲}})f_n = \frac{۱}{۲}(f_{n+\frac{۱}{۲}} + f_{n-\frac{۱}{۲}}),$

عملگر دیفرانسیل (D): $Df(x) = \frac{df(x)}{dx},$

عملگر انتگرال ($I = \frac{۱}{D}$): $If(x) = \int_{۰}^{x} f(t)dt = \frac{۱}{D}f(x),$

با اعمال تغییراتی روی این عملگرها می‌توان تقریب‌های تفاضل متناهی مناسبی را برای مشتق‌ها به دست آورد. بایستی توجه داشته باشیم که فرمول‌های تفاضلات متناهی بر پایه‌ی تقریب از چندجمله‌ای‌ها استواراند؛ یعنی اگر چندجمله‌ای‌ها با درجه مناسب به کار روند، جواب دقیقی به دست می‌آید. با استفاده از سری تیلور، رابطه‌ی بین عملگر دیفرانسیل و سایر عملگرها به دست می‌آید که رابطه‌ای بسیار کارآمد در معادلات است که برخی از این رابطه‌ها به صورت زیر است:

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{\delta x}{۱!}f'(x) + \frac{\delta x^۲}{۲!}f''(x) + ...,$$

پس می‌توان نوشت:

$$Ef(x) = [۱ + \frac{\delta x D}{۱!} + \frac{\delta x^۲ D^۲}{۲!} + ...]f(x) = e^{\delta x D}f(x).$$

به این ترتیب رابطه‌ی زیر را بین عملگرهای E و D به دست می‌آوریم:

$$E = e^{\delta x D},$$

این رابطه و به طورکلی تساوی بین عملگرها را به این صورت تعبیر می‌کنیم که اگر عملگرهای E و $\sum_{n=۰}^{N}(\frac{\delta x^n D^n}{n!})$ برای چندجمله‌ای‌های درجه N، برای هر عدد طبیعی N به کار روند، نتایج مساوی به دست می‌آید.