دانشگاه سیستان و بلوچستان

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

انژکتیوی منظم سیستم‌های مرتب جزئی روی تکواره‌های مرتب جزئی کلیفورد

استاد راهنما:

دکتراکبر گلچین

تحقیق و نگارش:

فرزاد هوشمندملال

پاییز ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادرم

دو نمایه وجود، هستی، آیه‌های لطف و مهربانی

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگی، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است، به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و به پاس محبت‌های بی‌دریغ و بی‌پایانشان و تقدیم به خواهران مهربان و برادران عزیزم

رفیقان راه و نویدبخشان آینده‌ای روشن.

تقدیر و تشکر:

خداوند مهربان را به شکرانه الطاف بی‌کرانش و به واسطه نعمت آگاهی که بر آدمی بخشید، می‌ستایم. او که از روحش در کالبد بی‌جان طبیعت دمید و علم را ابزاری برای شناختش قرار داد. امیدوارم با یاری حق تعالی آنچه را فرا گرفته‌ام، در راه رضای او و پیشرفت جامعه بکارگیرم.

از پدر و مادرم، این نعمت‌های الهی که در تمام مراحل زندگی قرین لطف و محبتشان بوده‌ام تشکر کرده و این پایان‌نامه را به آنها تقدیم می‌کنم. همچنین بر خود لازم می‌دانم از استاد گرامی جناب آقای دکتر اکبر گلچین که در کمک به اینجانب برای به پایان رسانیدن این پایان‌نامه از هیچ کوششی دریغ ننموده‌اند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از دوستانم آقایان، رضا زمانی، بهنام مرادخانی، حامد دمرچی‌لو، حسین فداکار، محسن پروانه، علی‌رضا نودهی و آرمان میرزاعلی که در مراحل تدوین پایان‌نامه بنده را یاری نموده‌اند تشکر می‌نمایم.

فرزاد هوشمند

چکیده

در این پایان‌نامه انژکتیوی منظم سیستم‌های مرتب جزئی روی تکواره‌های مرتب جزئی در حالت کلی را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که یک سیستم مرتب جزئی انژکتیو منظم بعنوان یک مشبکه، کامل است. همچنین نشان خواهیم داد که مخروط‌های دوری سیستم‌های مرتب جزئی روی تکواره‌های کلیفورد مجهز به ترتیب جزئی طبیعی، دوری هستند. سرانجام انژکتیوی منظم سیستم‌های مرتب جزئی روی تکواره‌های مرتب جزئی کلیفورد مجهز به ترتیب جزئی طبیعی و همچنین توصیفی از خود انژکتیوی منظم چنین تکواره‌هایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

سیستم‌ها روی تکواره‌ها نه تنها در مطالعه خواص تکواره‌ها بلکه در زمینه‌های دیگر ریاضیات، از جمله نظریه گراف نقش مهمی را ایفا می‌کنند. همواری و انژکتیوی، موضوعات مهمی در مطالعه سیستم‌ها روی تکواره‌ها می‌باشند. سیستم‌های هموار در مطالعه خواص تکواره‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند. مطالعه و بررسی کامل این مفاهیم در سه دهه اخیر در سطح وسیعی انجام شده است. سیستم‌های مرتب جزئی ضمن مطالعه نگاشت‌های بین مجموعه‌های مرتب جزئی، مورد توجه قرار گرفتند. مطالعه و بررسی خواص همواری و خواص رسته‌ای سیستم‌های مرتب جزئی که در واقع تعمیمی از نظریه مشابه برای سیستم‌ها روی تکواره‌ها می‌باشد برای اولین بار توسط فخرالدین [۱] در سال ۱۹۸۰ انجام شد.

اخیراً توسط بولمن فلمینگ [۲]، لان [۳] و شی [۴] در [۱] و [۲] و [۸] نتایج جدیدی در این زمینه بدست آمده است. انواع مختلف از انژکتیوی‌های ضعیف منظم سیستم‌های مرتب جزئی روی تکواره عمومی در [۱۰]، مورد بررسی قرار گرفته است. در این پایان‌نامه، انژکتیوی منظم و همچنین خود انژکتیوی منظم سیستم‌های مرتب جزئی، روی تکواره کلیفورد مجهز به رابطه ترتیب جزئی طبیعی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل اول را با مفاهیم و تعاریف مقدماتی که در فصل‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند آغاز می‌کنیم. در فصل دوم خواص انژکتیوی در رسته Act-S و همچنین خواص انژکتیوی منظم در رسته Pos-S را مورد بررسی قرار خواهیم داد و انژکتیوی منظم و همچنین خود انژکتیوی منظم سیستم‌های مرتب جزئی، روی تکواره کلیفورد مجهز به رابطه ترتیب جزئی طبیعی را در فصل سوم مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

[۱] Fakhruddin

[۲] Bulman-Fleming

[۳] Laan

[۴] shi

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱ـ۱ نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها

تعریف ۱.۱.۱: گروه‌واره $(S,*)$ عبارتست از یک مجموعه غیرتهی S که یک عمل دوتایی $*$ روی آن تعریف شده باشد. گروه‌واره $(S,*)$ را نیم‌گروه گوئیم در صورتی که عمل $*$ شرکت پذیر باشد، به عبارت دیگر به ازای هر $x,y,z \in S$،

$$x*(y*z)=(x*y)*z$$

برای راحتی کار، عمل نیم‌گروه را ضربی در نظر می‌گیریم و از این پس به جای $x*y$ از نماد $x.y$ یا xy استفاده می‌کنیم. نیم‌گروه S را تعویض‌پذیر گوئیم، در صورتی که به ازای هر $x,y \in S$، $xy=yx$.
هرگاه در نیم‌گروه S، $1 \in S$ موجود باشد، بقسمی که به ازای هر $x \in S$، $1x=x1=x$، آنگاه ۱ را عنصر همانی نیم‌گروه S و S را تکواره گوئیم. اگر S دارای عنصر همانی نباشد، می‌توان با اضافه نمودن ۱ به S و با تعریف عمل ضرب به صورت زیر، آن را به یک تکواره تبدیل کرد:

$$\forall s \in S\,, s.1=1.s=s, 1.1=1.$$

در این صورت $S\cup\{1\}$ یک تکواره است و S^1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^1=\begin{cases} S & 1\in S \\ S\cup\{1\} & 1\notin S. \end{cases}$$

S^1 را تکواره به دست آمده از S با الحاق عنصر همانی به آن می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. عنصر $z \in S$

صفر چپ S نامیده می‌شود، اگر برای هر $s \in S$، $zs=z$،

صفر راست S نامیده می‌شود، اگر برای هر $s \in S$، $sz=z$،

صفر S نامیده می‌شود، اگر برای هر $s \in S$، $sz=z=zs$ و اغلب آن را با 0 نشان می‌دهیم.

گزاره ۳.۱.۱: اگر نیم‌گروه S دارای صفر چپ و صفر راست باشد، آنگاه بر هم منطبقند.

در نتیجه S حداکثر دارای یک صفر است.

برهان: اگر z, z' به ترتیب صفرهای چپ و راست S باشند، آنگاه بنابه تعریف داریم:

$$z' = z'z = z \Rightarrow z = z'. \ \square$$

تعریف ۴.۱.۱: عنصر a از نیم‌گروه S را که $a^۲ = a$ خودتوان گوئیم. مجموعه تمام عناصر خودتوان نیم‌گروه S را با $E(S)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱: گروه عبارتست از یک تکواره مانند S به طوری که برای هر $s \in S$ عنصر منحصربفرد $s^{-۱}$ در S موجود باشد بقسمی که $s^{-۱}s = ss^{-۱} = ۱$.

اگر نیم‌گروه S با حداقل دو عنصر، شامل عنصر ۰ باشد به طوری که به ازای هر $s \in S$، $۰ = ۰۰ ,۰ = s۰ = ۰s$، در این صورت ۰ را عنصر صفر نیم‌گروه و S را نیم‌گروه صفردار گوئیم. اگر A و B دو زیرمجموعه از نیم‌گروه S باشند، آنگاه حاصل‌ضرب AB را به صورت $\{ab : a \in A, b \in B\}$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $B^۲ = BB$.

تعریف ۶.۱.۱: زیرمجموعه ناتهی T از نیم‌گروه S را یک زیرنیم‌گروه S گوئیم، هرگاه $T^۲ \subseteq T$، به عبارت دیگر T زیرنیم‌گروه S است، هرگاه تحت عمل S بسته باشد.

اگر S تکواره‌ای با عنصر همانی ۱ باشد، آنگاه زیرنیم‌گروه T را زیرتکواره S گوئیم، اگر $۱ \in T$. اگر S یک گروه باشد، آنگاه زیرتکواره T از S را زیرگروه S گوئیم، هرگاه به ازای هر $x \in T$، داشته باشیم $x^{-۱} \in T$.

تعریف ۷.۱.۱: برای هر زیرمجموعه غیرتهی A از نیم‌گروه S، کوچکترین زیر نیم‌گروه S شامل A عبارتست از $\langle A \rangle = \bigcup\limits_{n=۱}^{\infty} A^n$. اگر $S = \langle A \rangle$، آنگاه A مجموعه عناصر مولد S نامیده می‌شود. اگر $S, A = \{a\}$ = $<a>$ = $<A>$، آنگاه S نیم‌گروه تک مولدی یا دوری نامیده می‌شود، دراین صورت a عنصر

مولد S است.

تعریف ۸.۱.۱: زیرمجموعه ناتهی I از نیم‌گروه S را ایدآل راست(چپ) S گوئیم، اگر

$$(SI \subseteq I)\, IS \subseteq I$$

و I را ایدآل یا ایدآل دو طرفه گوئیم، اگر

$$SI \subseteq I, IS \subseteq I.$$

واضح است که هر ایدآل S یک زیرنیم‌گروه S است، اما عکس آن برقرار نیست.

مثال ۹.۱.۱: اگر $S = \{۱, x, ۰\}$ نیم‌گروهی با شرط $x^۲ = ۰$ باشد، آنگاه $T = \{۰, ۱\}$ زیر نیم‌گروه S است، زیرا نسبت به عمل S بسته است، اما ایدآل S نیست، زیرا

$$TS = \{۱, x, ۰\} \nsubseteq T.$$

مثال ۱۰.۱.۱: ماتریس‌های ۲ × ۲ تحت عمل ضرب معمولی ماتریس‌ها یک زیرنیم‌گروه ماتریس‌ها است، اگر S مجموعه تمام ماتریس‌ها و T مجموعه تمام ماتریس‌های با دترمینان ۱ باشد، آنگاه T یک زیرنیم‌گروه S است، چون

$$C, D \in T \Rightarrow |C| = |D| = ۱.$$

از طرفی

$$|CD| = |C|\,|D| = ۱ \Rightarrow CD \in T$$

در حالی که T ایدآل S نیست.

تعریف ۱۱.۱.۱: نیم‌گروه S، یک نیم‌گروه صفر چپ نامیده می‌شود، اگر هر عنصر S، یک صفر چپ از S باشد. به طور مشابه یک نیم‌گروه صفر راست نیز تعریف می‌شود. S را یک نیم‌گروه صفر گوئیم، هرگاه برای هر $s,t \in S$ ، $st = 0$.

تعریف ۱۲.۱.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. عنصر $s \in S$ را منظم گوئیم، اگر عضوی مانند $x \in S$ موجود باشد بقسمی که $sxs = s$. اگر همه عناصر S منظم باشند، آنگاه S را نیم‌گروه منظم گوئیم.

لم ۱۳.۱.۱: فرض کنید s یک عنصر منظم از نیم‌گروه S با $sxs = s$، برای عضوی مانند، $x \in S$. آنگاه xs و sx خودتوان می‌باشند و $Ss = S(xs)$، $sS = (sx)S$.

برهان: طرفین تساوی $s = sxs$ را از چپ در x، ضرب می‌کنیم و لذا

$$xs = x(sxs) = (xs)(xs),$$

یعنی xs یک خودتوان است. به طور مشابه sx نیز یک خودتوان می‌باشد.

برای قسمت دوم ابتدا داریم $S(xs) \subseteq Ss$. از طرفی چون عنصر s، منظم می‌باشد، آنگاه

$$Ss = Ssxs \subseteq Sxs.$$

بنابراین عکس شمول نیز برقرار است، یعنی $Ss \subseteq S(xs)$. در نتیجه $Ss = S(xs)$. به طور مشابه بدست می‌آوریم $sS = (sx)S$. $\square$

تعریف ۱۴.۱.۱: نیم‌گروه منظم S، ارتدوکس نامیده می‌شود، اگر مجموعه خودتوان‌هایش زیرنیم‌گروه S باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱: نیم‌گروه S، وارون نامیده می‌شود، اگر هر عضو آن دارای وارون منحصربفرد باشد.

واضح است که هر نیم‌گروه وارون، منظم است.

تعریف ۱.۱.۱۶: فرض کنید A و B مجموعه‌های ناتهی باشند. مجموعه $S = A \times B$ را در نظر می‌گیریم، روی S ضربی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $a, c \in A$ و $b, d \in B$، $(a,b)(c,d) = (a,d)$. تحت این ضرب S یک نیم‌گروه است که آن را باند مستطیلی گوئیم.

تعریف ۱.۱.۱۷: نیم‌گروه S را متناوب گوئیم، هرگاه تمام زیرنیم‌گروه‌های تک مولدی (دوری) آن متناهی باشند.

تعریف ۱.۱.۱۸: تکواره S نامتناوب نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in S$، عضوی چون $n \in N$ وجود داشته باشد به طوری که $x^{n+1} = x^n$.

تعریف ۱.۱.۱۹: عناصر $s, t \in S$ را تعویض‌پذیر گوئیم، اگر $st = ts$.
مجموعه$C(S) = \{c \in S \mid cs = sc, \forall\, s \in S\}$، مرکز نیم‌گروه S نامیده می‌شود. اگر $C(S) = S$، آنگاه S تعویض‌پذیر یا نیم‌گروه آبلی نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲۰: فرض کنید $R \subseteq S$ یک زیرمجموعه از نیم‌گروه S باشد. آنگاه

$$C_S(R) = \{s \in S \mid rs = sr, \forall\, r \in R\}$$

مرکزساز R در S نامیده می‌شود.

لم ۱.۱.۲۱: اگر S یک نیم‌گروه باشد، آنگاه $C(S) = C_S(S)$.
برهان: طبق تعریف مرکز و مرکزساز تساوی $C(S) = C_S(S)$ برقرار می‌باشد. □

تعریف ۱.۱.۲۲: نیم‌گروه منظم S را نیم‌گروه کلیفورد گوئیم، اگر $E(S) \subseteq C(S)$. به

عبارت دیگر خودتوان‌های S با تمام عناصر S جابجا شوند.

لم ۲۳.۱.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه کلیفورد باشد. آنگاه هر ایدآل راست S یک ایدآل دو طرفه (ایدآل) S است.

برهان: فرض کنید K یک ایدآل راست S باشد. لذا $KS \subseteq K$. حال ادعا می‌کنیم که $SK \subseteq K$. برای هر $b \in SK$، وجود دارند $s \in S$ و $k \in K$، بقسمی که $b = sk$. چون $k \in K \subseteq S$ و S یک نیم‌گروه کلیفورد می‌باشد عنصری مانند $x \in S$ وجود دارد بقسمی که $k = kxk$. از طرفی طبق قضیه ۱۳.۱.۱، $kx \in E(S)$. بنابراین

$$b = sk = skxk = kxsk \in kS \subseteq KS \subseteq K.$$

لذا $b \in K$. در نتیجه $SK \subseteq K$. ازاین رو K یک ایدآل چپ S می‌باشد. در نتیجه K یک ایدآل دو طرفه (ایدآل) S است.

تعریف ۲۴.۱.۱: نیم‌گروه S بطور کامل منظم نامیده می‌شود، در صورتی که برای هر $s \in S$ وجود داشته باشد $x \in S$، بقسمی که $sxs = s$ و $sx = xs$.

نیم‌گروه‌های بطور کامل منظم دقیقاً اجتماع گروه‌ها است. بعلاوه نیم‌گروه‌های کلیفورد دقیقاً نیم‌گروه‌هایی وارون و بطور کامل منظم می‌باشند.

تعریف ۲۵.۱.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. کوچکترین ایدآل چپ S شامل $a \in S$، $S^1a = Sa\bigcup\{a\}$ می‌باشد که ایدآل چپ اصلی تولید شده توسط a است.

به طور مشابه $aS^1 = aS\bigcup\{a\}$ ایدآل راست اصلی تولید شده توسط a می‌باشد و $S^1aS^1 = Sa\bigcup aS\bigcup SaS\bigcup\{a\}$ ایدآل اصلی تولید شده توسط a است.

تعریف ۲۶.۱.۱: نیم‌گروه S اید‌آل اصلی (راست، چپ) نامیده می‌شود، هرگاه همه اید‌آل‌های آن (اید‌آل‌های راست، اید‌آل‌های چپ) اصلی باشند.

۱ــ۲ همنهشتی‌ها و نیم‌گروه‌های خارج‌قسمتی

تعریف ۱.۲.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. هر زیرمجموعه ρ از حاصلضرب دکارتی $S \times S$، یک رابطه دوتایی بر روی S نامیده می‌شود.

مجموعه تمام روابط دوتایی روی S با $B(S)$ نشان داده می‌شود.

رابطه $\rho \in B(S)$

(۱) بازتابی نامیده می‌شود، اگر برای هر $x \in S$، $x\rho x$،

(۲) تقارنی گفته می‌شود، اگر $x\rho y$ نتیجه دهد $y\rho x$،

(۳) تعدی است، اگر $x\rho y$ و $y\rho z$ نتیجه دهد $x\rho z$.

رابطه‌ای که دارای سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی باشد، رابطه هم‌ارزی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱: فرض کنید $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم‌ارزی روی S باشد. در این صورت ρ رابطه همنهشتی راست روی S نامیده می‌شود، اگر

$$\forall s,t,l \in S, \quad s\rho t \Rightarrow (sl)\,\rho\,(tl)$$

همنهشتی چپ است، اگر

$$\forall s,t,l \in S, \quad s\rho t \Rightarrow (ls)\,\rho\,(lt)$$

و همنهشتی (دو طرفه) است، هرگاه هم همنهشتی راست و هم همنهشتی چپ باشد.

تعریف ۱.۲.۳: مجموعه $S/\rho = \{[a] : a \in S\}$ تحت عمل $[s][t] = [st]$ یک نیم‌گروه است که آن را نیم‌گروه خارج‌قسمتی گوئیم. اگر S تکواره باشد، آنگاه S/ρ تکواره‌ای با عنصر همانی $[۱]_\rho$ خواهد بود.

تعریف ۱.۲.۴: فرض کنید $(S,.)$ و $(T,.)$ دو نیم‌گروه باشند. در این صورت نگاشت $\phi : S \to T$ همریختی نیم‌گروه‌ها است، هرگاه

$$\forall x, y \in S,\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

اگر S و T تکواره باشند به طوری که ۱_S و ۱_T به ترتیب عناصر همانی S و T باشند، در این صورت $\phi : S \to T$ را همریختی تکواره‌ها گوئیم، هرگاه

$$\forall x, y \in S,\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \phi(۱_S) = ۱_T.$$

اگر ϕ یک به یک باشد آن را تکریختی و اگر پوشا باشد آن را برویریختی می‌نامیم. اگر ϕ یک به یک و پوشا باشد آن را یکریختی می‌نامیم و در این صورت S و T را یکریخت گوئیم و می‌نویسیم $S \cong T$.

تعریف ۱.۲.۵: یک نگاشت $\varphi : S \to T$ را ضدهمریختی از نیم‌گروه‌ها گوئیم، اگر برای هر $s, s' \in S$ داشته باشیم

$$\varphi(ss') = \varphi(s')\varphi(s).$$

تعریف ۱.۲.۶: فرض کنید ρ یک همنهشتی روی نیم‌گروه S باشد. نگاشت کانونی

$$\begin{aligned} \pi : S &\to S/\rho \\ x &\mapsto [x]_\rho \end{aligned}$$

را پوشای کانونی گوئیم.

تعریف ۱.۲.۷: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. برای هر $s, t \in S$ رابطه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

sLt اگر $S^1s = S^1t$.

$s\ R\ t$ اگر $sS^1 = tS^1$.

$s\ J\ t$ اگر $S^1sS^1 = S^1tS^1$.

$s\ H\ t$ اگر $S^1s = S^1t$ و $sS^1 = tS^1$.

$s\ D\ t$ اگر وجود داشته باشد $u \in S$ بقسمی که $sS^1 = uS^1$ و $S^1u = S^1t$.

D, H, J, R, L رابطه‌های گرین در S نامیده می‌شود.

لم ۸.۲.۱([۵]): شرایط زیر برای تکواره S معادلند:

(۱) S منظم است.

(۲) برای هر $s \in S$ عضوی چون $e \in E(S)$ وجود دارد، به طوری که sLe.

(۳) برای هر $s \in S$ عضوی چون $e \in E(S)$ وجود دارد، به طوری که sRe.

۱—۳ رسته

تعریف ۱.۳.۱: رسته $\mathbf{C}$، گردایه‌ای است از اشیاء (که با A، B و $\cdots$ نشان داده می‌شوند.) به همراه

(۱) گردایه‌ای از مجموعه‌ها به شکل $Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$ که به ازای هر جفت از اشیاء در $\mathbf{C}$ این مجموعه‌ها مجزا هستند($f \in Mor_{\mathbf{C}}(C, D)$ را یک ریخت از C به D گویند و با $f : C \to D$ نشان داده می‌شود.).

(۲) برای هر سه تایی (A, B, C) از اشیاء $\mathbf{C}$ نگاشت

$$Mor_C(B, C) \times Mor_C(A, B) \to Mor_C(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

در دو اصل زیر صدق کند:

(الف) شرکت‌پذیری: یعنی برای اشیاء A, B, C, D در رسته $\mathbf{C}$ و ریخت‌هایی $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$،

$g \in Mor_{\mathbf{C}}(B,C)$ و $h \in Mor_{\mathbf{C}}(C,D)$ داشته باشیم:

$$h \circ (g \circ f) \ = (h \circ g) \circ f.$$

(ب) ریخت همانی: برای هر شیء A در رسته $\mathbf{C}$ ریخت همانی $id_A : A \to A$ وجود دارد به طوری که برای هر $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ و $B \in \mathbf{C}$، داریم

$$f \circ id_A = id_B \circ f = f.$$

تعریف ۲.۳.۱: در رسته مجموعه‌ها که با Set نمایش داده می‌شود، اشیاء مجموعه‌ها، ریخت‌ها توابع بین مجموعه‌ها و ترکیب، ترکیب معمولی توابع و ریخت همانی برای هر مجموعه X، همان تابع همانی روی X است.

تعریف ۳.۳.۱: رسته‌ای که اشیاء آن تشکیل یک مجموعه می‌دهند رسته کوچک نامیده می‌شود.

مثال ۴.۳.۱: هر تکواره یک رسته کوچک است. در این رسته شیء را خود تکواره، ریخت‌ها را عناصر تکواره و ترکیب ریخت ها را همان عمل نیم‌گروه در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵.۳.۱: رسته که در آن همه ریخت‌ها، ریخت‌های همانی باشند، رسته گسسته نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۳.۱: فرض کنید رسته $\mathbf{C}$ داده شده است. دوگان رسته $\mathbf{C}$ با $\mathbf{C^{op}}$ نمایش داده می‌شود و اشیاء آن همان اشیاء رسته $\mathbf{C}$ بوده و برای اشیاء M و N در $\mathbf{C^{op}}$، ریخت $f : M \to N$ در $\mathbf{C^{op}}$، ریخت $g : N \to M$ در $\mathbf{C}$ است و اگر ترکیب در $\mathbf{C^{op}}$ را $\circ^{op}$ در نظر بگیریم داریم $f \circ^{op} g = g \circ f$ که $\circ$ ترکیب در رسته $\mathbf{C}$ است.

تعریف ۷.۳.۱: شیء U در رسته $\mathbf{C}$ شیء ابتدایی گفته می‌شود، اگر برای هر شیء X از $\mathbf{C}$ مجموعه $Mor_{\mathbf{C}}(U,X)$ تک عضوی باشد. به طور مشابه U انتهایی نامیده می‌شود، اگر برای هر شیء X از $\mathbf{C}$ مجموعه $Mor_{\mathbf{C}}(X,U)$ تک عضوی باشد.

اشیاء ابتدایی و انتهایی، اشیاء عمومی نامیده می‌شوند.

قضیه ۸.۳.۱([۵]): اشیاء عمومی در حد یکریختی، منحصربفرد هستند.

تعریف ۹.۳.۱: نمودار زیر را جابه‌جایی گوئیم، هر گاه $\gamma = \beta \circ \alpha$:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta"] & C \\
B \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}
$$

همچنین نمودار زیر تعویض‌پذیر است، اگر $fg = hk$:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f"] \\
D \arrow[r, "h"'] & C
\end{tikzcd}
$$

تعریف ۱۰.۳.۱: رسته $\mathbf{C}$، رسته ملموس گفته می‌شود، اگر همه اشیاء در آن، مجموعه‌ها با یک ساختار اضافی و ریخت ها از A به B، تابع‌های حافظ ساختار از A به B، ترکیب ریخت‌ها ترکیب توابع و ریخت همانی تابع همانی است.

تعریف ۱۱.۳.۱: ریخت $f : A \to B$ در یک رسته $\mathbf{C}$ هم‌درون‌بر نامیده می‌شود، هرگاه یک ریخت $g : B \to A$ وجود داشته باشد به طوری که $g \circ f = id_A$.

تعریف ۱۲.۳.۱: ریخت $f: A \to B$ در رسته $\mathbf{C}$ را در نظر می‌گیریم، برای هر $k, h \in Mor_{\mathbf{C}}(C, A)$،

(۱) f تکریختی است، اگر حذف‌پذیراز چپ باشد، یعنی

$$f \circ k = f \circ h \ \Rightarrow k = h,$$

(۲) f بروریختی است، اگر f حذف‌پذیر از راست باشد، یعنی

$$k \circ f = h \circ f \ \Rightarrow k = h,$$

(۳) f دوریختی است، اگر f تکریختی و هم یک بروریختی باشد.

قضیه ۱۳.۳.۱: هر ریخت هم‌درون‌بر، تکریختی است.

برهان: فرض کنید $f: A \to B$ یک ریخت هم‌درون‌بر و $f \circ h = f \circ k$ که $h, k \in MoR_{\mathbf{C}}(C, A)$. چون f یک ریخت هم‌درون‌بر است، لذا $g \circ f = id_A$ در نتیجه $h = g \circ f \circ h = g \circ f \circ k = k$. □

لم ۱۴.۳.۱: در رسته ملموس هر ریخت پوشا، یک بروریختی است.

برهان: فرض کنید $f: A \longrightarrow B$ پوشا و $g, h: B \longrightarrow C$ طوری باشند که $g \circ f = h \circ f$. برای هر $b \in B$، چون f پوشاست، لذا $a \in A$ وجود دارد که $b = f(a)$. بنابراین $g(b) = g[f(a)] = h[f(a)] = h(b)$، یعنی $g = h$. در نتیجه f حذف‌پذیر از راست است. لذا f یک بروریختی است.□

لم ۱۵.۳.۱: در رسته ملموس هر ریخت یک به یک، تکریختی است.

برهان فرض کنید f یک به یک و $g, h: C \to A$ طوری باشد که $f \circ g = f \circ h$. پس برای هر $x \in C$، $f[g(x)] = f[h(x)]$. با توجه به یک به یک بودن f، برای هر $x \in C$، $g(x) = h(x)$. بنابراین f یک تکریختی است. □

تعریف ۱۶.۳.۱: ریخت $f: A \to B$ در یک رسته درون‌بری گفته می‌شود، هرگاه ریختی