بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

عنوان:

تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای

تدوین:

علی جمشیدی

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا جهانشاهلو

شهریور 1388

بسمه تعالی

تاریخ : ....

شماره : ....

پیوست : ....

نودمین سال تأسیس دانشگاه تربیت معلم ۱۳۸۸

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای علی جمشیدی دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ ریاضی کاربردی تحت عنوان:

تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای

در روز دوشنبه مورخ ۸۸/۶/۳۰ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۹/ — می‌باشد.

نوزده

۱ـ عالی ☒

۲ـ بسیار خوب ☐

۳ـ خوب ☐

۴ـ قابل قبول ☐

۵ـ غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر غلامرضا جهانشاهلو	دکتر فرهاد حسین‌زاده لطفی	دکتر سعید محرابیان

اسماعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران : خیابان شهید مفتح
نرسیده به انقلاب، پ ۴۳
کد پستی: ۱۴۹۱۱-۱۵۷۱۹
تلفن : ۳-۸۸۳۲۹۲۲۰
کرج : انتهای خیابان شهید بهشتی، میدان دانشگاه
کدپستی: ۳۷۵۵۱-۳۱۹۷۹
تلفن : ۴۵۷۹۶۰۰ — ۰۲۶۱
Iran – Tehran
No.43, Mofateh Ave.
Tarbiat Moallem University
www.tmu.ac.ir

تقدیم به

پدر عزیز

و

مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

سپاس خدای یکتا را که هستیم بخشید و از دریای بیکران رحمتش برخوردارم نمود. او را شکرگزارم که به لطفش قدم در راه علمی نهادم که یقین و قطعیت آن را هیچ انسان عاقلی نمی‌تواند زیر سوال ببرد. بی هیچ تردیدی انجام این مهم، بدون یاری و مساعدت خانواده عزیزم و راهنمایی و کمک استاد گرامی‌ام میسر نبود. از این رو قبل از هر چیز وظیفه خود می‌دانم از پدر و مادرم که همواره در تمامی مراحل زندگی حامی‌ام بوده اند، از صمیم قلب تشکر نمایم.

از شاگردی استاد گرانقدر جناب آقای دکتر جهانشاهلو، بر خود می‌بالم و به خاطر راهنمایی‌ها و دلسوزی‌های پدرانه‌شان نهایت سپاسگزاری را از ایشان می‌نمایم. از خداوند متعال توفیقات بیش از پیش را برای ایشان آرزو دارم.

از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر حسین زاده لطفی و جناب آقای دکتر محرابیان به خاطر قبولی زحمت داوری این پایان نامه تشکر می‌نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر بابلیان، ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر سپاسگذاری می‌نمایم.

در نهایت از دوستان عزیزی که در طول دوره تحصیل، همراه و مشوق من بوده‌اند، بویژه آقایان کشاورز، علیزاده، سلیمانی، انصاری و حسن زاده تشکر نموده و موفقیتشان را از خداوند مهربان خواستارم.

چکیده:

تحلیل پوششی داده‌ها، یک روش برنامه ریزی خطی برای محاسبه کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده مشابه با چند ورودی و چند خروجی است. واحدهای تصمیم گیرنده می توانند دارای یک ساختار دو مرحله‌ای باشند، که علاوه بر ورودی‌های مرحله اول و خروجی‌های مرحله دوم، خروجی‌های مرحله اول نیز ورودی‌های مرحله دوم را تشکیل می دهند. خروجی‌های مرحله اول را اندازه‌های واسطه می نامند.

یک راه‌حل برای بررسی واحدهای تصمیم گیرنده دو مرحله‌ای، استفاده از مدل‌های استاندارد DEA برای هر کدام از مراحل است. هر چند در این روش ممکن است یک DMUی کلی (با ورودی‌های مرحله اول و خروجی‌های مرحله دوم) و با مراحل اول و دوم ناکارا، کارا ارزیابی شده و مرز کارایی منحرف شود. لذا برای ارزیابی این‌گونه واحدها، مدل‌های DEA بایستی اصلاح شوند. در این پایان‌نامه به بررسی واحدهای تصمیم گیرنده دو مرحله‌ای، مدل‌های DEA ارائه شده برای ارزیابی این واحدها و نحوه پیدا کردن DMUی بهبود یافته برای واحدهای ناکارا پرداخته می شود.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها؛ کارایی؛ اندازه واسطه؛ دو مرحله‌ای.

رده بندی موضوعی ریاضی: 90C15 , 90B50 .

مقدمه

ریاضیات و علوم وابسته به آن، روش‌هایی دقیق و قابل اثبات برای شناخت دنیا و روابط پیچیده حاکم بر بخش‌های مختلف آن ایجاد می کنند. سالهاست که از ریاضیات برای مدل‌سازی رفتارها و ساختارهای اجتماعی استفاده می شود. صنعت، اقتصاد و مدیریت نیز از ریاضیات بی نیاز نیستند و هر بار که از این ریاضیات برای گسترش نظریه‌ها و کاربردهای این شاخه استفاده شده است، تحول بزرگی روی داده و گام‌های بزرگی در جهت افزایش توانمندی‌ها و کاربردهای آن‌ها برداشته شده است.

تحقیق در عملیات یکی از شاخه‌های ریاضیات است که به مدل‌سازی ساختارهای صنعتی و اجتماعی می پردازد، توان عملیاتی آن‌ها را اندازه می گیرد و راه حل‌هایی برای بهبود روش‌ها ارائه می دهد.

پیچیده‌تر شدن ساختارها، حجم بسیار زیاد داده‌ها و اثرات عوامل بیرونی بر عملکرد واحدها، از عواملی بود که مدیران را بر آن داشت تا با ارزیابی علمی از کارکرد واحدها در راستای بهبود کارایی و بالا بردن بازده ساختار بکوشند.

تحلیل پوششی داده‌ها شاخه ای از تحقیق در عملیات است که به بررسی و ارزیابی کارایی واحدهای مشابه می پردازد.

واحدهای تصمیم گیرنده می توانند شکل‌های مختلفی از قبیل بیمارستان‌ها، دانشگاه‌ها، بانک‌ها و غیره داشته باشند. این واحدها در برخی حالات می توانند به‌صورت یک فرآیند دو مرحله ای عمل نمایند. مرحله اول از ورودی‌هایی استفاده کرده و خروجی‌هایی را تولید می کند که این خروجی‌ها، ورودی‌های مرحله دوم را تشکیل می دهند. خروجی‌های مرحله اول را اندازه‌های واسطه می نامند. سپس مرحله دوم با استفاده از اندازه‌های واسطه، خروجی‌های نهایی سیستم را تولید می نماید.

ما در این پایان‌نامه به بررسی واحدهای تصمیم گیرنده دو مرحله ای و مدل‌های ارائه شده برای ارزیابی کارایی این نوع واحدها می پردازیم.

مروری بر فصل‌ها:

- در فصل اول، با بیان تعاریف و قضایایی که در طول کار مورد نیاز است، تا حد زیادی پیش‌نیازهای دانستنی این پایان‌نامه برآورده شده است.

- در فصل دوم، واحـــدهای تصمیم گیرنده دو مرحله ای تشریح مـــی گردد. پس از آن مـــدل چن و ژو [8]، مـــدل کائو و هوانگ [12] و سپس هم‌ارزی این دو مـــدل را بیـان مـی نمـاییم. در نهایت روش کارایی جمعی چن و همکاران [5] توضیح داده خواهد شد.
- در فصل سوم، مثالی از فرآیندهای دو مرحله‌ای را بیان، و سـپس انـدازه کـارایـی واحـدهای تصمیم گیرنده با استفاده از روش‌های ذکر شده در فصل دوم، محاسبه خواهد شد.
- در فصل چهارم، به بررسی مرز کارایی در فرآیندهای دو مرحله ای پرداخته و مـدلی را بـرای شناسایی مرز کارایی و تصویر کارای DMUها بیان می کنیم.

مقالات زیر در این پایان‌نامه بررسی شده‌اند:

- Chen, Y., Zhu, J., 2004. “Measuring information technology’s indirect impact on firm performance”. Information Technology and Management Journal 5, 9–22.
- Kao, C., Hwang, S.N., 2008. “Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan”. European Journal of Operational Research 185 (1), 418–429.
- Chen, Y., Liang, L., Zhu, J., 2009. “Equivalence in two-stage DEA approaches”. European Journal of Operational Research 193, 600–604.
- Chen, Y., Cook, W.D., Li, N., Zhu, J., 2009. “Additive efficiency decomposition in two-stage DEA”. European Journal of Operational Research 196, 1170–1176.
- Chen, Y., Cook, W.D., Zhu, J., 2009. “Deriving the DEA frontier for two-stage processes”. European Journal of Operational Research, in press.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه DEA

1-1 مقدمه

به منظور ارزیابی عملکرد واحدها و بخش‌ها، فعالیت‌های علمی زیادی صورت گرفته است.

مسلماً رابطه عملکرد با عوامل تأثیرگذار، تابعی به‌صورت $Y = f(U,V)$ است که در آن ورودی (U,V)، خروجی Y را تولید می‌کند. بردار ورودی از دو قسمت عوامل قابل کنترل (U) و عوامل غیر قابل کنترل (V) تشکیل شده است.

تابع تولید، تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها، ماکسیمم خروجی را می‌دهد. این تابع در علم اقتصاد از اهمیت بسیاری برخوردار است. زیرا با داشتن آن می‌توان مشخص کرد که یک واحد خوب عمل می‌کند یا نه. به علت پیچیدگی فرآیند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقدار بودن تابع تولید، تابع تولید در دسترس نیست. در روش‌های پارامتری با استفاده از یک سری مشاهدات و داده‌ها سعی می‌کنند این تابع را تخمین بزنند. برای این منظور از فرآیند برازش منحنی استفاده

می شود. ولی به‌دست آوردن تابع تولید با استفاده از این فرآیند ایراداتی دارد که در زیر به تعـدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

1) روابط بین ورودی‌ها و خروجی‌ها به طور دل‌خواه در نظر گرفته می‌شود. مثلاً در اقتصاد رابطه‌ی $Q = x_o A_1^{x_1} A_2^{x_2} \dots A_n^{x_n}$ را برای تـابع تولیـد در نظـر مـی‌گیرنـد، کـه در آن A_1 و A_2 و ... و A_n ورودی‌ها، Q خروجی و x_1 و x_2 و ... و x_n پارامترهای تابع‌اند، که باید تعیین شوند.

2) اگر بعد بردار خروجی بیش از یک باشد، این روش را نمی‌توان به‌کار برد و برای مسـائلی بـه‌کـار می‌رود که فقط یک خروجی دارند.

3) منحنی به‌دست آمده، تمایل مرکزی دارد و باید به گونه‌ای آن را برطرف کرد.

عیوب فوق اساسی ترین ایرادات روش پارامتری بود، لذا در سال 1957 فارل[1]، روش غیر پـارامتری را ارائه کرد که اساس کار چارنز[2]، کوپر[3] و رودز[4] بود و در ادامه به آن می پردازیم.

2-1 واحد تصمیم گیرنده

منظـور از واحـد تصـمیم گیرنـده، عبـارت اسـت از واحـدی کـه بـا دریافـت بـردار ورودی ماننـد $(x_1, \dots, x_m)$، بردار خروجی $(y_1, \dots, y_s)$ را تولید می‌کند. منظـور از واحـدهـای تصـمیم گیرنـده متجانس این است که واحدها عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشـابه، خروجـی‌هـای مشـابه تولید می‌کنند. مانند شعبات یک بانک، کارخانجات یک شرکت خاص یا ادارات یک سازمان دولتی.

فرض کنیم n واحد تصمیم گیرنده داریـم کـه بـا $DMU_j = (x_j, y_j)$ $(j = 1, \dots, n)$ نشـان خواهیم داد. به طوریکه $x_j \in R^m$، $x_j \geq \circ$ و $x_j \neq \circ$، $(j = 1, \dots, n)$ نشان دهنده بـردار ورودی و $y_j \in R^s$، $y_j \geq \circ$ و $y_j \neq \circ$، $(j = 1, \dots, n)$ نشان دهنده بردار خروجی است.

DMU_o $(o \in \{1, \dots, n\})$، نشان دهنده واحد تحت ارزیـابی بـوده و نمـاد $(*)$ نشـان دهنـده مقدار بهینه بودن متغیر است. ماتریس ورودی X، ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای ورودی DMU_jها، $(j = 1, \dots, n)$ تشکیل داده است، یعنی $X = [x_1, \dots, x_n]$ و به‌طور مشـابه مـاتریس خروجی Y به‌صورت $Y = [y_1, \dots, y_n]$ در نظر گرفته می‌شود.

1) Farrell
2) Charnes
3) Cooper
4) Rohds

3-1 کارایی

کارایی به معنای خوب کار کردن، تحت تأثیر شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل قرار دارد، که به‌صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می شود:

ورودی/خروجی = کارایی

کارایی مطلق یک DMU، مقایسه عملکرد آن با استانداردهای کلی و کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک DMU، نسبت به واحدهای دیگر آن مجموعه است.

چون استانداردهای کلی معمولا تعریف نشده و در صورت تعریف شدن، رسیدن به آن مشکل است، لذا کاربرد کارایی نسبی گسترده تر از کاربرد کارایی مطلق است.

اگر واحد تصمیم گیرنده مورد نظر دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، با استفاده از رابطه فوق کارایی آن قابل محاسبه بوده و اندازه حاصل، کارایی مطلق آن واحد به شمار می آید.

در صورت وجود چند ورودی و چند خروجی برای واحد تصمیم گیرنده مورد نظر، نسبت مجموع وزن‌دار شده خروجی به مجموع وزن‌دار شده ورودی به‌صورت

$$E_o = \frac{u_1y_{1o}+\cdots+u_1y_{so}}{v_1x_{1o}+\cdots+v_mx_{mo}} \qquad (1\text{-}1)$$

کارایی آن واحد را اندازه گیری می کند، که در آن u_r قیمت خروجی rام یعنی y_r $(r = 1, \dots, s)$ و v_i هزینه ورودی iام یعنی x_i $(i = 1, \dots, m)$ است. کارایی فوق به کارایی اقتصادی معروف است.

قابل ذکر است که تخصیص وزن‌های مناسب به ورودی‌ها و خروجی‌ها، نقش تعیین کننده ای در اندازه کارایی دارد.

کارایی نسبی، از تقسیم اندازه کارایی هر واحد به بزرگترین آن‌ها حاصل می شود. بنابراین اندازه کارایی هر واحد، همواره کوچکتر یا مساوی یک بوده و حداقل یک واحد کارایی نسبی برابر یک دارد.

به‌طور مثال کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده O به صورت زیر به‌دست می آید:

$$RE_o = \frac{E_o}{max_j\{E_j\}}. \qquad (2\text{-}1)$$

4-1 تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، شامل تکنیک‌ها و روش‌هایی برای ارزیابی کارایی و یا سنجش بهره وری واحدهای تصمیم گیرنده است.

DEA در واقع تعمیم کار فارل در ابداع اولین روش غیر پارامتری است. فارل با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم گیرنده و اصول حاکم بر آن‌ها، مجموعه ای با عنوان مجموعه امکان تولید، ارائه و قسمتی از مرز آن را به عنوان تابع تولید معرفی نمود.

این مرز را مرز کارا نیز می نامند و واحدهای تصمیم گیرنده ای که روی این مرز قرار می گیرند، کارا ارزیابی می شوند.

از آنجائیکه DEA، تکنیک ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده است، حداقل یکی از واحدها روی مرز و بقیه واحدها در زیر آن قرار دارند. نام تحلیل پوششی داده‌ها از ویژگی پوششی بودن، منشأ گرفته است.

این روش در مقایسه با روش‌های قبلی دارای مزیت‌هایی است که در ادامه به آن اشاره می کنیم.

در روش‌های DEA بر خلاف برخی روش‌های عددی، مشخص بودن وزن‌ها از قبل و تخصیص آن‌ها به ورودی‌ها و خروجی‌ها لازم نیست. همچنین این روش‌ها نیازی به اشکال تابعی از قبل تعیین شده (مانند روش‌های رگرسیون آماری) و یا شکل صریح تابع تولید (مانند برخی روش‌های پارامتری) ندارند.

تحلیل پوششی داده‌ها، امکاناتی را برای مطالعه واحدهایی با چند ورودی و چند خروجی فراهم می‌کند. اسلوب تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه جبر خطی بنا نهاده شده است و توانایی آن بیشتر به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها را قادر می‌سازد، تا از روش‌های حل مسأله برنامه‌ریزی خطی و قضایای دوآلیتی استفاده کند و به این ترتیب منبع و مقدار ناکارایی را برای هر ورودی و خروجی مشخص کند.

DEA همچنین فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل‌گر و تصمیم گیرنده ایجاد می کند. این همکاری‌ها می تواند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد.

1-5 مجموعه امکان تولید (PPS)

1-5-1 **تعریف (مجموعه امکان تولید)**. مجموعه فعالیت‌های شدنی، مجموعه امکان تولید نامیده شده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$T = \{(x, y) \in R^{m+s}$: بردار خروجی $y \geq 0$ بتواند به وسیله بردار ورودی $x \geq 0$ تولید شود $\}$.

مدل‌های DEA هر کدام به یک مجموعه امکان تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه امکان تولید نیز به طور یکتا، توسط یک مجموعه از فرض‌ها و اصول معین ساخته می‌شود. برای معرفی مدل‌ها، از اصول زیر روی مجموعه امکان تولید T استفاده می‌شود:

اصل1 **(شمول مشاهدات)**. همه فعالیت‌های مشاهده شده، یعنی $(j = 1, \dots, n)$ $DMU_j =$ (x_j, y_j)، به T تعلق دارند. این بدیهی ترین اصلی است که روی T تحمیل شده و همه مدل‌های DEA این اصل را دارا هستند.

اصل2 **(تحدب)**. اگر $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in T$ آنگاه برای هر $\lambda \in [0, 1]$، $(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}, \lambda y + (1-\lambda)\bar{y}) \in T$، یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\ (x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in T, \forall\ \lambda \in [0, 1]\ ;\ (\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}, \lambda y + (1-\lambda)\bar{y}) \in T.$$

به عبارت دیگر T یک مجموعه محدب است.

اصل3 **(بیکرانی اشعه یا بازده به مقیاس ثابت)**. به ازای هر $(x, y) \in T$ و هر $\lambda \geq 0$، داریم $(\lambda x, \lambda y) \in T$، یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\ (x, y) \in T\ , \forall\ \lambda \geq 0;\quad (\lambda x, \lambda y) \in T.$$

اصل4 **(امکان پذیری)**. اگر $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$ و $x \geq \bar{x}$، آنگاه $(x, \bar{y}) \in T$ و اگر $y \leq \bar{y}$ آنگاه $(\bar{x}, y) \in T$، یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\ (\bar{x}, \bar{y}) \in T\ , \begin{cases} \forall x\ ;\ \ x \geq \bar{x} \Rightarrow (x, \bar{y}) \in T \\ \forall y\ ;\ \ y \leq \bar{y} \Rightarrow (\bar{x}, y) \in T \end{cases}.$$

این اصل بیان می‌کند که اگر خروجی $\bar{y}$ توسط $\bar{x}$ تولید شود، آنگاه همین خروجی توسط هر ورودی بزرگتر از $\bar{x}$ نیز می‌تواند تولید شود و همچنین هر خروجی کمتر از $\bar{y}$ نیز می‌تواند توسط ورودی $\bar{x}$ تولید شود.

اصل5 **(کمینه درونیابی)**. T اشتراک همه‌ی مجموعه‌هایی مانند T است که در اصل 1 و بعضی از اصول دیگر فوق صدق می‌کند.

6-1 مدل CCR [5]

این مدل، اولین مدل DEA برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم گیرنده است که در سال 1978 توسط چارنز، کوپر و رودز [3]، ارائه شد.

1-6-1 **قضیه**. یک مجموعه منحصر به فرد وجود دارد که در اصول 1 تا با 5 صدق می‌کند. این مجموعه به‌صورت زیر است:

$$T_{CCR} = \left\{(x, y): x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\,, y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j\,, \lambda_j \geq \circ \ \ (j = 1, \dots, n)\right\}.$$

برهان: به مرجع [18] رجوع شود.

اگر در T_{CCR} امکان تولیدی مانند (x, y) یافت نشود که غالب بر (x_o, y_o) باشد، یعنی هیچ (x, y) یافت نشود که $\left(-x, y\right) \geq \left(-x_o, y_o\right)$ و نامساوی حداکثر در یکی از مؤلفه‌ها به‌صورت اکید برقرار باشد، آنگاه گوییم که (x_o, y_o) کارای نسبی است. در غیر این صورت ناکارا می‌باشد.

اگر یکی از حالات زیر رخ دهد آنگاه به وضوح (x_o, y_o) ناکارا خواهد بود:

1) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_o، خروجی بیشتر یا مساوی y_o داشته باشد.

2) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با خروجی بیشتر از y_o، ورودی کمتر یا مساوی x_o داشته باشد.

3) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_o، خروجی بیشتر از y_o داشته باشد.

حالت اول به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\text{s.t.} \quad (\theta x_o, y_o) \in T_{CCR}. \end{aligned} \tag{3-1}$$

با توجه به قضیه (1-6-1) و اصل شهودی تجرید و از اینکه $(\theta x_o, y_o) \in T_{CCR}$، مدل (3-1)، به مدل (4-1) تبدیل می شود. مدل (4-1)، که به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت ورودی

5) Charnes, Cooper, Rhodes (CCR)

معروف است، همواره شدنی بوده و بهینه متناهی دارد و جواب بهین در شرط $0 < \theta^* \leq 1$ صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} &\text{Min } \theta \\ &\text{s.t.}\ \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_o, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_o, \\ &\qquad \lambda_j \geq 0, \qquad\qquad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{4-1}$$

شرط لازم کارایی تحت مدل فوق این است که $\theta^* = 1$. زیرا $\theta^* = 1$، به این معنی است که امکان کاهش متناسب در همه ورودی‌های DMU_o، در مجموعه امکان تولید T_{CCR} وجود ندارد.

ولی این شرط کافی نیست. زیرا در این حالت اگر امکان کاهش بعضی از ورودی‌ها یا افزایش بعضی از خروجی‌های DMU_o به‌صورت نامتناسب در مجموعه امکان تولید T_{CCR}، وجود داشته باشد، DMU_o کارای ضعیف نامیده می‌شود. ولی اگر $\theta^* = 1$ و امکان کاهش در هیچ یک از ورودی‌ها و افزایش در هیچ یک از خروجی‌ها در مجموعه امکان تولید T_{CCR}، وجود نداشته باشد، آنگاه DMU_o، کارای قوی نامیده می‌شود.

اگر $\theta^* < 1$، آنگاه DMU_o، ناکارا در ماهیت ورودی است و $(1 - \theta^*)$ مقدار ناکارایی تکنیکی در ماهیت ورودی است.

حالت دوم به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Max } \varphi \\ &\text{s.t.}\ \ (x_o, \varphi y_o) \in T_{CCR}. \end{aligned} \tag{5-1}$$

که با توجه به قضیه (1-6-1) و اصل شهودی تجرید و از اینکه $(x_o, \varphi y_o) \in T_{CCR}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\text{Max } \varphi \\ &\text{s.t.}\ \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq x_o, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq \varphi y_o, \\ &\qquad \lambda_j \geq 0, \qquad\qquad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{6-1}$$

مدل (1-6) می‌کوشد خروجی‌های DMU_o را به‌طور متناسب ماکسیمم کند و به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت خروجی معروف است.

مدل (1-6) همواره شدنی است و جواب بهین در شرط $\varphi^* \geq 1$ صدق می‌کند. اگر $\varphi^* = 1$، آنگاه DMU_o کارای تکنیکی در ماهیت خروجی است. اگر $\varphi^* > 1$ آنگاه DMU_o، ناکارا در ماهیت خروجی است و $\frac{1}{\varphi^*}$ نشان دهنده میزان کارایی تکنیکی DMU_o در ماهیت خروجی و $\left(1-\frac{1}{\varphi^*}\right)$ نشان دهنده میزان ناکارایی تکنیکی DMU_o در ماهیت خروجی است. مفهوم کارایی قوی در مدل با ماهیت خروجی، مشابه مدل با ماهیت ورودی است.

1-6-2 **نمادگذاری**. از نمادها و علائم زیر در کل این پایان نامه استفاده خواهد شد:

$$\lambda \coloneqq (\lambda_1,\dots,\lambda_n)^t \;, \qquad \mu \coloneqq (\mu_1,\dots,\mu_2)^t \;,$$
$$X \coloneqq [x_1,\dots,x_n] \;, \qquad Y \coloneqq [y_1,\dots,y_n],$$
$$S^- \coloneqq (s_1^-,\dots,s_m^-)^t \;, \qquad S^+ \coloneqq (s_1^+,\dots,s_r^+)^t,$$
$$T^- \coloneqq (t_1^-,\dots,t_m^-)^t \;, \qquad T^+ \coloneqq (t_1^+,\dots,t_r^+)^t.$$

مدل (1-4) پس از افزودن متغیرهای کمکی، به‌صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \theta \\
&\text{s.t.} \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + S^- = \theta x_o, \\
&\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - S^+ = y_o, \\
&\qquad \lambda_j \geq 0, S^- \geq 0, S^+ \geq 0 \qquad (j = 1,\dots,n).
\end{aligned} \tag{7-1}$$

مدل (1-6) نیز پس از افزودن متغیرهای کمکی به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } \varphi \\
&\text{s.t.} \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + T^- = x_o, \\
&\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - T^+ = \varphi y_o, \\
&\qquad \lambda_j \geq 0, T^- \geq 0, T^+ \geq 0 \qquad (j = 1,\dots,n).
\end{aligned} \tag{8-1}$$

1-6-3 **قضیه**. اگر $\left(\theta^*, \lambda^*, S^{-^*}, S^{+^*}\right)$ جواب بهین مدل (1-7) و $\left(\varphi^*, \mu^*, T^{-^*}, T^{+^*}\right)$ جواب بهین مدل (1-8) باشد، آنگاه روابط زیر برقرار است:

$$\varphi^* = \frac{1}{\theta^*}, \mu^* = \frac{\lambda^*}{\theta^*}, T^{-^*} = \frac{S^{-^*}}{\theta^*}, T^{+^*} = \frac{S^{+^*}}{\theta^*}.$$

بنابر قضیه فوق در مدل CCR، مقدار کارایی (ناکارایی) در ماهیت ورودی با مقدار کارایی (ناکارایی) در ماهیت خروجی یکسان است و DMUهای کارا تحت هر دو مدل یکسان هستند.

1-6-4 **تعریف (CCR - کارای قوی در ماهیت ورودی)**. DMU_o تحت مدل (1-7) کارای قوی است هرگاه $\theta^* = 1$ و در همه‌ی جواب‌های بهین، مقادیر متغیرهای کمکی یعنی S^{+^*} و S^{-^*}، صفر باشد.

1-6-5 **نکته**. دوآل مدل با فرم پوششی، مدل با فرم مضربی نامیده می‌شود.

با توجه به نکته فوق مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & u^t y_o \\ \text{s.t.} \quad & v^t x_o = 1, \\ & u^t y_j - v^t x_j \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n), \\ & u \geq 0, v \geq 0. \end{aligned} \tag{1-9}$$

با توجه به اینکه مدل (1-4) همواره بهینه متناهی دارد، لذا بنا به قضیه قوی دوآلیتی [18]، مدل (1-9) همواره بهینه متناهی خواهد داشت و مقدار بهین هر دو مدل با هم برابر است.

فرم مضربی مدل CCR در ماهیت خروجی که همان دوآل مدل (1-6) است، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & v^t x_o \\ \text{s.t.} \quad & u^t y_o = 1, \\ & u^t y_j - v^t x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n), \\ & u \geq 0, v \geq 0. \end{aligned} \tag{1-10}$$

1-6-6 **قضیه**. اگر $(v^* = p^*, u^* = q^*)$ جواب بهین مدل (1-9) باشد، آنگاه جواب بهین مدل (1-10) به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\left(v^* = \frac{p^*}{\theta^*}, u^* = \frac{q^*}{\theta^*}\right)$.

7-6-1 **تعریف (CCR - کارای قوی تحت مدل مضربی CCR)**. DMU_o تحت مدل (1-9) کارای قوی نامیده می‌شود، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

1) حداقل یک جواب بهین مانند (v^*, u^*)، از (1-9) موجود باشد به‌طوریکه $v^* > 0$ و $u^* > 0$.

2) $u^{*t} y_o = 1$.

رهیافتی که در بالا برای ارائه مدل (1-9) ارائه شد، رهیافتی مبتنی بر مجموعه امکان تولید و استفاده از دوآل فرم پوششی CCR بود. اکنون با استفاده از تعریف کارایی نسبی مدل (1-9) را به‌دست خواهیم آورد.

اگر واحد تصمیم گیرنده دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، آنگاه نسبت خروجی به ورودی، نشان دهنده میزان کارایی آن واحد تصمیم گیرنده است. اگر واحد تصمیم گیرنده دارای بیش از یک ورودی یا بیش از یک خروجی باشد و قیمت خروجی‌ها و هزینه ورودی‌ها مشخص باشد، در این صورت نسبت مجموع وزن‌دار شده خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار شده ورودی‌ها، نشان دهنده میزان کارایی واحد تصمیم گیرنده است. برای محاسبه کارایی نسبی هر واحد باید کارایی آن واحد را بر ماکسیمم کارایی از بین سایر واحدها تقسیم کنیم. مشکل زمانی پیش می‌آید که قیمت خروجی‌ها و هزینه ورودی‌ها مشخص نباشد، راهکاری که در این حالت DEA پیشنهاد می‌کند به این صورت است که با دیدگاهی خوش‌بینانه، به وزن‌ها اجازه می‌دهد طوری انتخاب شوند که DMU_o به ماکسیمم کارایی خود برسد و این مقدار را به عنوان میزان کارایی نسبی DMU_o در نظر می‌گیرد. فرض کنید بردار نامنفی $u \in R^s$ نشان دهنده قیمت خروجی‌ها و بردار نامنفی $v \in R^m$ نشان دهنده هزینه ورودی‌ها باشد، آنگاه جواب بهینه مدل زیر نشان دهنده میزان کارایی نسبی DMU_o است:

$$RE_o = \text{Max}_{(u,v)\geq 0} \; \frac{\frac{u^t y_o}{v^t x_o}}{max_{1\leq j\leq n} \frac{u^t y_j}{v^t x_j}} \qquad (11\text{-}1)$$

اگر $RE_o = 1$، آنگاه DMU_o، کارای تکنیکی در ماهیت ورودی نامیده می‌شود. در مدل بالا ممکن است که بعضی از وزن‌ها صفر در نظر گرفته شوند و این بدان معنی است که ورودی یا خروجی