دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض — آنالیز ریاضی

موضوع:

ثابت نگاشت‌های مجموعه مقدار در فضای متریک به طور یکنواخت محدب نقا

نگارش:

محبوبه مهدوی خطیبی

استاد راهنما:

دکتر کوروش نوروزی

استاد مشاور:

دکتر هاشم پروانه مسیحا

دی ۱۳۸۹

تقدیم به

مادر مهربانم که وجودش مایه آرامش ماست،

و

روح پدر عزیزم که هر چه دارم از فداکاری‌های بی‌دریغ اوست

و همچنین آنان که با ابزار دانش در راه آسایش و رستگاری انسان می‌کوشند و به سوی هدفی والا ره می‌سپارند و روز و شب پیوسته در خیال خویش وظیفه‌ای مشخص دارند با عشقی بزرگ.

اظهار نامه دانشجو

موضوع پا یان نامه: نقاط ثابت نگاشت‌های مجموعه مقدار در فضاهای متریک به طور یکنواخت محدب

استاد راهنما: دکتر کوروش نوروزی

نام دانشجو: محبوبه مهدوی خطیبی

شماره دانشجویی: ۸۷۰۴۹۸۴

اینجانب محبوبه مهدوی خطیبی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است.

همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

۱–حق چاپ و تکثیر این پایان‌نامه متعلق به نویسنده آن می‌باشد. هرگونه کپی برداری به صورت کل پایان نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز می‌باشد.

۲–کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می‌باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

تشکر و قدردانی

با حمد سپاس بیکران به درگاه پروردگار کریم که این لطف را شامل اینجانب نمود تا در تحصیل دانش، هر چند اندک گام بردارم.

در اینجا فرصت را مغتنم شمرده و از کلیه معلمین و اساتید خود در دوران تحصیل به خصوص از استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر نوروزی برای زحمات بی‌دریغشان سپاسگزارم. همچنین از پدر و مادر عزیزم که مشوق اصلی من در تمامی مراحل تحصیل بوده‌اند، تشکر می‌نمایم.

چکیده

در این پایان نامه ضمن تعریف و بررسی فضاهای متریک به طور یکنواخت محدب، به بررسی قضایای نقطه ثابت نگاشت‌های انقباض می‌پردازیم و همچنین قضایای نقطه ثابت نگاشت‌های مجموعه مقدار در فضاهای متریک به طور یکنواخت محدب را مورد بحث وبررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: فضای متریک به طور یکنواخت محدب، نگاشت انقباض، نگاشت نامنبسط، دنباله‌های ایشیکاوا و مان ، فضای متریک ژئودزیک، فضای $CAT(0)$.

فهرست مندرجات

مقدمه

مفاهیم این پایان نامه با انگیزه از مقاله اخیر [۹] خمسی [۱] نوشته شده است. در مقاله [۹] خمسی، نتایج گوناگونی را در ارتباط با نقاط ثابت نگاشت‌های نامنبسط و انقباضی در فضاهای $CAT(0)$ بررسی کرده است. اخیراً این نتایج با بکار بردن تکنیک‌های ابتدایی و با استفاده از نامساوی $Brhut-Tits$ در فضاهای $CAT(0)$ به اثبات رسیده است. چون فضای $CAT(0)$ به طور یکنواخت محدب است، محققین این نتایج را در فضاهای به طور یکنواخت محدب با برقراری شرایطی بیان نمودند.

یافتن نقطه ثابت نگاشت‌های نامنبسط مجموعه مقدار در فضاهای متریک به طور یکنواخت محدب اولین بار توسط شیمیزو[۲] و تاکاهاشی [۳] با گذاشتن شرایطی در این فضا بیان شد. دراین پایان نامه برخی از این قضایا را بررسی و بیان خواهیم نمود.

مقالات اصلی که این پایان‌نامه از آن‌ها استخراج گردیده است به شرح ذیل می‌باشند:

1. R. Espinola and A. Fernandez-leon and B.Piatek, *Fixed points of single- and set-valued mappings in uniformly convex metric spaces with no metric convexity*, Hindawi Publishing Corporation, Fixed point Theory and Applications, **2010**, pp.1-16, 2010.

2. N. Hussain and M. A. Khamsi, *On asympotic pointwise contracrtions in metric spaces*, Nonlinear Analysis : Theory Methods and Applications, **71**, pp.4423-4429, 2009.

3. A. Rahim khan and H. F-U-dim and A. A. Domlo, *Approximating fixed points of some maps in uniformly convex metric spaces*, Hindawi Publishing Corporation, Fixed

[۱] Khamsi
[۲] Shimizu
[۳] Takahashi

point Theory and Applications, **2010**, pp.1-11, 2010.

4. T. Shimizu and W. Takahashi, *Fixed point of multivalued mappings in certain metric spaces*, Journal of the Jukiusz schauder center, **8**, pp.197-203, 1996.

فصل ۱

فضاهای متریک به طور یکنواخت محدب

۱.۱ آشنایی با فضای متریک به طور یکنواخت محدب

در این بخش فضاهای متریک به طور یکنواخت محدب را معرفی نموده و به ارائه مثال‌هایی در این نوع فضاها می‌پردازیم.

در سال ۱۹۷۰ تاکاهاشی[۱] مفهوم محدب بودن فضای متریک (X,d) را به صورت زیر بیان نمود:

تعریف ۱.۱.۱ [۸] نگاشت $W : X \times X \times I \to X$ را یک ساختار محدب[۲] در X گوییم اگر به ازای هر $u, x, y \in X$ و $\lambda \in I = [0, 1]$، داشته باشیم

$$d(u, W(x, y, \lambda)) \leq \lambda d(u, x) + (1 - \lambda) d(u, y).$$

تعریف ۲.۱.۱ [۴] فضای متریک (X,d) با ساختار محدب W را یک فضای متریک محدب[۳] گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ [۴] زیرمجموعه ناتهی C از یک فضای متریک محدب را محدب گوییم اگر به ازای هر $x, y \in C$ و $\lambda \in I$، $W(x, y, \lambda) \in C$.

مثال ۱.۱.۱ [۱۸]،[۲۱] هر فضای نرمدار، یک فضای متریک محدب می‌باشد. اما عکس این مطلب درست نیست.

مثال ۲.۱.۱ [۲۱] گوی های باز $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ و گوی های بسته $B[x,r] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ زیرمجموعه‌های محدب از فضای متریک محدب X هستند.

مثال ۳.۱.۱ [۲۱] اگر $\{k_\alpha : \alpha \in A\}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های محدب فضای متریک محدب X باشد، آن‌گاه $\bigcap\{k_\alpha : \alpha \in A\}$ نیز محدب است.

---
[۱] Takahashi
[۲] convex structure
[۳] convex metric space

تعریف ۴.۱.۱ [۴]،[۱۸] فضای متریک محدب (X,d) را به طور یکنواخت محدب [۴] گوییم هرگاه به ازای هر $r > 0$ و $\varepsilon \in (0, 2]$، $\delta \in (0, 1]$ وجود داشته باشد به طوری که

$$d(a, W(x, y, 1/2)) \leq (1 - \delta)r$$

که در آن به ازای هر $a, x, y \in X$، $d(x, a) \leq r$، $d(y, a) \leq r$ و $d(x, y) \geq \varepsilon r$.

نگاشت

$$\delta : (0, \infty) \times (0, 2] \to (0, 1]$$
$$r, \varepsilon \rightarrowtail \delta = \delta(r, \varepsilon)$$

را مدول تحدب یکنواخت [۵] گوییم.

مثال ۴.۱.۱ [۱۵] فضاهای ℓ^p به ازای $p > 1$ فضاهای به طور یکنواخت محدب هستند.

مثال ۵.۱.۱ [۲] زیرمجموعه‌های محدب از فضاهای $\mathbb{R}^n$ به طور یکنواخت محدب هستند.

مثال ٦.۱.۱ [۱۴] فضای کروی $\mathbb{S}^2$ یک فضای متریک به طور یکنواخت محدب است. در مرجع [۱۴] نشان داده شده است که مدول تحدب این فضا به صورت زیر است:

$$\delta_{\mathbb{S}^2}(r, \varepsilon) = 1 - \frac{1}{r} \arccos\left(\frac{\cos r}{\cos(\varepsilon/2)}\right).$$

تعریف ۵.۱.۱ [۲۰] فضای متریک محدب X دارای ویژگی (c) است، اگر هر دنباله نزولی از زیرمجموعه‌های محدب، بسته، کراندار و ناتهی در X دارای اشتراک ناتهی باشد.

فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای متریک X است. اشتراک همهٔ مجموعه‌های بسته و محدب شامل A را با $\overline{co}A$ و قطر A را با $diam(A)$ نمایش می‌دهیم.

---

[۴] uniformly convex

[۵] modulus of uniform convexity

قضیه ۱.۱.۱ [۲۰] فرض کنید X فضای متریک به طور یکنواخت محدب و کامل است. آن‌گاه X دارای ویژگی c است.

برهان. فرض کنید $\{K_n\}$ دنباله نزولی از زیرمجموعه‌های محدب، بسته، کراندار و ناتهی در X است. اگر به ازای هر n مثبت $diam(K_n) > ۰$، آن‌گاه $x, y \in K_n$ وجود دارند به طوری که $d(x,y) \geq diam(K_n)/۲$. چون به ازای هر $z \in K_n$، $d(z,x) \leq diam(K_n)$، $d(z,y) \leq diam(K_n)$ و فضا به طور یکنواخت محدب است، $\alpha > ۰$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $z \in K_n$

$$d(z, W(x,y,۱/۲)) \leq diam(K_n)(۱-\delta) < diam(K_n).$$

ازینرو $u_n^۱ \in K_n$ بدست می‌آوریم به طوری که به ازای هر $z \in K_n$

$$d(z, u_n^۱) \leq diam(K_n)(۱-\delta).$$

فرض کنید

$$K_n^۱ = \{u_n^۱, u_{n+۱}^۱, u_{n+۲}^۱, ...\}.$$

آن‌گاه واضح است که به ازای هر n، $K_n^۱ \neq \emptyset$ و $K_n^۱ \supset K_{n+۱}^۱$. فرض کنید به ازای هر n، $diam(K_n^۱) > ۰$. آن‌گاه $x, y \in K_n^۱$ وجود دارد به طوری که $d(x,y) \geq diam(K_n^۱)/۲$. قرار می‌دهیم

$$B_n^۱ = \bigcap_{k=۰}^{\infty} B[u_{n+k}^۱, \delta(K_n^۱)].$$

آن‌گاه $\overline{co}(K_n^۱) \subset B_n^۱$ و به ازای هر $z \in \overline{co}K_n^۱$، $d(z,x) \leq diam(K_n^۱)$ و $d(z,y) \leq diam(K_n^۱)$.

چون X به طور یکنواخت محدب است، $u_n^۲ \in \overline{co}K_n^۱ \subset K_n$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $z \in \overline{co}K_n^۱$،

$$d(z, u_n^۲) \leq diam(K_n)(۱-\delta)^۲.$$

با استفاده از روند بالا به طور مشابه به ازای هر n مثبت، $\overline{co}K_n^۲, \overline{co}K_n^۳, ...$ و $u_n^۳, u_n^۴, ...$ را بدست می‌آوریم.

واضح است که

$$K_n \supset \overline{co}K_n^{1} \supset \overline{co}K_n^{2} \supset ...$$

و اگر $m \to \infty$

$$diam(\overline{co}K_n^m) \to 0.$$

چون X کامل است؛ $u_n \in X$ وجود دارد به طوری که به ازای هر n

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{co}K_n^m = \{u_n\}.$$

از

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{co}K_n^m \supset \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{co}K_{n+1}^m$$

بدست می‌آوریم $u_1 = u_2 = u_3 = ...$؛ بنابراین به ازای هر n، uای که $u \in K_n$ وجود دارد. در نتیجه $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. ■

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱ [۴] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک است. نگاشت $T: X \to X$ را انقباض نقطه وار[۶] گوییم هرگاه نگاشت $\alpha: X \to [0,1)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x,y \in X$،

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha(x)d(x,y).$$

تعریف ۲.۲.۱ [۴]،[۱۳] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک است. نگاشت $T: X \to X$ را نگاشت نقطه وار مجانبی[۷] گوییم اگر یک دنباله از نگاشت های $\alpha_n: X \to [0,\infty)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x,y \in X$،

$$d(T^n(x),T^n(y)) \leq \alpha_n(x)d(x,y).$$

۱) T را انقباض نقطه وار مجانبی[۸] گوییم هرگاه $\{\alpha_n\}$ همگرای نقطه وار به $\alpha: X \to [0,1)$ باشد.

۲) T را نگاشت نامنبسط نقطه وار مجانبی[۹] گوییم هرگاه $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leq 1$.

۳) T را قویاً انقباض نقطه وار مجانبی[۱۰] نامیم هرگاه به ازای هر $x \in X$، $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leq k$، که در آن $0 < k < 1$ است.

تعریف ۳.۲.۱ [۴] اگر X یک فضای متریک و $\mathcal{F}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های X باشد، آن‌گاه گوییم $\mathcal{F}$ یک ساختار تحدب[۱۱] روی X تعریف می‌کند اگر شامل گوی‌های بسته در X بوده و

---

[۶] pointwise contration

[۷] asymptotic pointwise

[۸] asymptotic pointwise contraction

[۹] asymptotic pointwise nonexpansive

[۱۰] strongly asymptotic pointwise contraction

[۱۱] convexity structure

نسبت به اشتراک پایا[۱۲] باشد؛ یعنی، اشتراک هر تعداد از عناصر $\mathcal{F}$ نیز در $\mathcal{F}$ قرار دارد.

تعریف ۴.۲.۱ [۱۱] فرض کنید (X,d) فضای متریک و A زیرمجموعه کراندار از X باشد. زیرمجموعه A را مجاز[۱۳] گوییم هرگاه $A = cov(A)$، که در آن

$$cov(A) = \bigcap\{B : \text{باشد} A \text{گوی بسته و شامل} B\}.$$

خانواده زیرمجموعه‌های مجاز از فضای متریک X را $\mathcal{A}(X)$ نامیم.

به وضوح $\mathcal{A}(M)$، یک ساختار تحدب روی فضای متریک X تعریف می‌کند.

تعریف ۵.۲.۱ [۴]،[۷] نگاشت $\Phi(x) : X \to [0,\infty)$ را گونه [۱۴] گوییم به طوری که به ازای هر x،

$$\Phi(x) = \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x)$$

که در آن $\{x_n\}$ یک دنباله کراندار در X است.

تعریف ۶.۲.۱ [۴]،[۱۳] فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله[۱۵] کراندار در X و C زیرمجموعه‌ای از X است. مرکز مجانبی[۱۶] دنباله کراندار $\{x_n\}$ نسبت به C را به ازای هر $y \in C$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_C(y,\{x_n\}) = \{x \in X : \Phi(x) \le \Phi(y)\}.$$

مرکز مجانبی دنباله کراندار $\{x_n\}$ نسبت به X را با $A(y,\{x_n\})$ نمایش می‌دهیم.

[۱۲] stable
[۱۳] admissible
[۱۴] type
[۱۵] sequense
[۱۶] asymptotic center

تعریف ۷.۲.۱ [۷] فرض کنید $\mathcal{F}$ یک ساختار تحدب روی X است. گوییم $\mathcal{F}$ فشرده[۱۷] است، هرگاه هر خانوادهٔ $(A_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ از اعضای $\mathcal{F}$ در خاصیت اشتراک متناهی صدق کند؛ یعنی، اگر اشتراک هر تعداد متناهی از A_αها ناتهی باشد، آن‌گاه $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha) \neq \emptyset$.

تعریف ۸.۲.۱ [۴] فرض کنید $\mathcal{F}$ یک ساختار تحدب است. به $\mathcal{F}$ فشرده آشیانه‌ای[۱۸] اطلاق می‌گردد اگر هر زنجیره نزولی $(A_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ از عناصر ناتهی کراندار $\mathcal{F}$ دارای اشتراک ناتهی باشد.

تعریف ۹.۲.۱ [۱۸] فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک (X,d) و $T : C \to C$ یک نگاشت است. مجموعه نقاط ثابت T، $\{x \in C : T(x) = x\}$، را با F نمایش می‌دهیم؛ آن‌گاه

۱) نگاشت T را شبه–نامنبسط[۱۹] گوییم اگر $F \neq \emptyset$ و به ازای هر $x \in C$ و $p \in F$، $d(Tx,p) \leq d(x,p)$.

۲) به ازای $k > 0$، نگاشت T را k–لیپشیتز[۲۰] گوییم اگر به ازای هر $x,y \in C$ داشته باشیم $d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$.

در حالت خاص اگر $k = 1$ باشد نگاشت T را نامنبسط[۲۱] گوییم.

۳) نگاشت T را نامنبسط تعمیم یافته[۲۲] گوییم اگر به ازای هر $x,y \in C$،

$$d(Tx,Ty) \leq ad(x,y) + b\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\} + c\{d(x,Ty) + d(y,Tx)\}$$

که در آن $a,b,c > 0$ و $a + b + 2c \leq 1$.

---

[۱۷] compact

[۱۸] nested compact

[۱۹] quasi-nonexpansive

[۲۰] k-Lipschitz

[۲۱] nonexpansive

[۲۲] generalized nonexpansive

تبصره ۱.۲.۱ [۱۷] هر نگاشت نامنبسط با حداقل یک نقطه ثابت یک نگاشت شبه—نامنبسط است. اما نگاشت‌های شبه—نامنبسط وجود دارند که نامنبسط نمی‌باشند.

در اینجا به معرفی بعضی از نمادهایی که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گردد، می‌پردازیم.

فرض کنید A زیرمجموعه فضای متریک X است، قرار می‌دهیم:

$$diam(A) := \sup\{d(x,y) \ : x, y \in A\};$$

$$dist(x,A) := \inf\{d(x,y) : y \in A\}, \quad x \in X;$$

$$rad_x(A) := \sup\{d(x,y) : y \in A\}, \ \ x \in X;$$

$$rad(A) := \inf\{r_x(A) : x \in X\}.$$

فصل ۲

قضایای نقطه ثابت در فضای متریک به طور یکنواخت محدب