دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

تعمیم روش‌های تابع نمایی و سایر توابع استاندارد برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی

استاد راهنما

دکتر جعفر صابری نجفی

استاد مشاور

دکتر مرتضی گچ پزان

نگارش

اشرف سارونی

بهار ۱۳۹۱

حمد و سپاس پروردگاری را که زبان از شکرش قاصر است و خرد در ژرفای معرفتش عاجز، او که مهربان است و حقیر را به اتمام دوره ای دیگر از تحصیلاتم توفیق عنایت فرمود که اگر پرتو فضل او نبود هرگز موفق به انجام این مهم نمی‌شدم. عسکری و گل گیر، به‌خاطر تلاش و همراهی صمیمانهٔ آن‌ها، تشکر و قدردانی می گردد.

تشکرم

چکیده

در چند دهه اخیر معادلات حرکتی غیرخطی به طور گسترده‌ای برای توصیف بسیاری از پدیده‌های مهم و فرآیندهای دینامیکی در فیزیک، ریاضی، بیولوژی و غیره مورد استفاده قرار گرفته است.
جی هوآن هی در سال ۲۰۰۶ یک روش کارا که به روش تابع نمایی معروف شد را برای بدست آوردن جواب‌های منفرد و جواب‌های متناوب معادلات حرکتی غیرخطی پیشنهاد کرد.
مراحلی از این روش به کمک نرم‌افزار میپل انجام می‌گیرد و این به سادگی روش می‌افزاید، لذا این روش به آسانی می‌تواند برای حل انواع معادلات حرکتی غیرخطی گسترش داد.
در این پایان نامه روش‌های از نوع تابع نمایی توسعه و تعمیم داده می‌شود، که این هدف با ارائه یک الگوریتم محاسباتی مناسب برای پیدا کردن ساختار جواب معادلات دیفرانسیل غیرخطی دنبال می‌گردد. این الگوریتم نیاز برای حدس زدن این که، ساختار جواب به چه شکلی است را رفع می‌کند و همچنین ساختار جواب را به طور خودکار تشخیص می‌دهد. این الگوریتم در مقابل روش‌های از نوع تابع نمایی می‌باشد که در آن ساختار جواب در ابتدا حدس زده می‌شود و سپس محاسبات نمادین برای تعیین پارامترها به کار برده می‌شود.
همچنین نشان خواهیم داد که لازم نیست جواب معادله لیوویل که با روش تابع نمایی بدست آمده است، معادله دیفرانسیل اصلی را برای هر شرط اولیه‌ای صدق کند.

پیش گفتار

بیشتر پدیده‌ها در اطراف ما بطور ذاتی غیرخطی هستند و بوسیله معادلات غیرخطی مدل‌بندی می‌شوند. لذا برای مطالعه بهتر این پدیده‌ها و کشف پدیده‌های جدیدتر، نیاز به حل این معادلات و بدست آوردن جواب‌های آن، مورد توجه زیادی قرار گرفت. با پیدایش کامپیوترها و نرم‌افزارهای متنوع، حل یک مسأله غیرخطی آسانتر شد ولی با این حال بدست آوردن جواب اینگونه مسائل هنوز کاری سخت و پیچیده‌ای است.

اخیراً توجه زیادی به یافتن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی شامل جواب‌های منفرد[۱]، متناوب[۲] و شبه فشرده[۳] شده است. اهمیت بدست آوردن جواب‌های دقیق معادلات غیرخطی، اگر امکان‌پذیر باشد، کمک بسیاری به بررسی حل‌کننده‌های عددی، تحلیل پایداری جواب‌ها، و دقت روش‌های عددی، خواهد نمود. روش‌های بسیار زیادی برای حل اینگونه معادلات پیشنهاد شده است که هر کدام معایب و مزایای خود را دارد. روش‌هایی چون تانژانت هایپربولیک[۴]، اختلال هموتوپی[۵]، آدومیان[۶]، تکراری تغییراتی[۷] و غیره.

در سال‌های اخیر روشی به نام روش تابع نمایی[۸] مورد توجه قرار گرفته است که بطور وسیعی برای حل معادلات دیفرانسیل و پیدا کردن جواب‌های منفرد، متناوب و شبه فشرده بکار رفته است. این روش به کمک محاسبات نمادین یک ابزار قدرتمند ریاضی را برای معادلات حرکتی غیرخطی که در ریاضی فیزیک بکار می‌رود، فراهم می‌کند. در روش تابع نمایی، ابتدا ساختار جواب حدس زده می‌شود، سپس محاسبات نمادین برای تعیین پارامترها بکار برده می‌شود.

مطالب درنظرگرفته شده در این پایان‌نامه، در پنج فصل کلی ارائه می‌شود: در فصل اول به معرفی روش تابع نمایی و کاربرد آن برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه بالا می‌پردازیم. در فصل دوم، یک بهبود روی روش تابع نمایی ارائه می‌دهیم. در فصل سوم برای بالا بردن کارائی روش تابع نمایی، اصلاحی برای آن ارائه می‌شود. برای رسیدن به این هدف، پیشنهاد می‌شود که، پایه مرسوم " e " از تابع نمایی، با یک پایه دلخواه " $0 < a \neq 1$ " جایگزین شود. در فصل چهارم روش‌هایی از نوع تابع نمایی را توسعه و تعمیم می‌دهیم.

---

[1] Solitary Solutions [2] Periodic Solutions [3] Compacton-Like Solutions [4] Tanh Method [5] Homotopy Pertubation Method [6] Adomian Decomposition Method [7] Variational Iteration Method [8] Exp-Function Method

سپس یک الگوریتم محاسباتی برای پیدا کردن ساختار جواب ارائه می‌شود که این الگوریتم نیاز به حدس زدن اینکه ساختار جواب به چه شکلی است را رفع می‌کند و ساختار جواب را بصورت خودکار تشخیص می‌دهد. در انتها، در فصل پنجم، با به کار بردن تعمیم روش تابع نمایی، نشان خواهیم داد که روش‌های نوع تابع نمایی ممکن است در بعضی موارد نتایج غلطی ایجاد کنند.

فهرست مطالب

۱ روش تابع نمایی **۱**

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ معرفی روش تابع نمایی ۲

۳.۱ کاربرد روش تابع نمایی برای حل مسائل با مقدار مرزی مرتبه بالا ۷

۴.۱ کاربردهای عددی ۸

۲ یک بهبود روی روش تابع نمایی در زمان موازنه بالاترین مرتبه قسمت‌های خطی و غیرخطی **۱۹**

۱.۲ مقدمه ۱۹

۲.۲ مروری بر روش تابع نمایی ۲۰

۳.۲ فرمول کلی ۲۱

۴.۲ چند قضیه‌ی مهم ۲۲

۳ روش تابع نمایی کلی برای حل معادلات حرکت غیرخطی **۲۷**

۱.۳ مقدمه ۲۷

۲.۳ تحلیل روش تابع نمایی کلی ۲۸

۳.۳ کاربرد روش تابع نمایی برای معادله ترکیبی $KdV - mKdV$ ۳۱

۴.۳ حل معادله ترکیبی $KdV - mKdV$ به کمک روش تابع نمایی کلی ۳۵

۱.۴.۳ جواب‌های خاص ۳۸

۴ تعمیم روش‌های تابع نمایی و سایر توابع استاندارد برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی **۴۱**

۱.۴ مقدمه ۴۱

۲.۴ تعاریف مقدماتی ۴۲

۱.۲.۴ توابع و توسیع آن‌ها ۴۳
۲.۲.۴ عملگرهای ضربی و مشتق ۴۴
۳.۲.۴ روش عملگر برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی ۴۶
۴.۲.۴ $H-$ رتبه‌ی یک دنباله ۴۹
۵.۲.۴ دترمینان‌های واندرموند ۵۲
۶.۲.۴ تغییر دادن، متغیر مستقل یک معادله دیفرانسیل ۵۳
۳.۴ قضایای اصلی ۵۵
۱.۳.۴ حالت ریشه‌های تکراری معادله مشخصه هنکل ۶۱
۴.۴ تعمیم روش تابع نمایی ۶۵
۵.۴ مثال‌ها ۶۷

۵ بررسی شرایط اولیه برای معادله لیوویل تولید شده توسط روش تابع نمایی ۷۴
۱.۵ مقدمه ۷۴
۲.۵ پیدا کردن، نه حدس زدن یک جواب جزئی ۷۵
۳.۵ جواب‌های خاص ۸۰

نتایج و پیشنهاداتی برای کارهای آتی ۸۳

کتاب‌نامه ۸۴

فصل ۱

روش تابع نمایی

۱.۱ مقدمه

گسترش سریع علوم غیرخطی، نیاز به بدست آوردن روش حل معادلات موج غیرخطی که نقش مهمی در زمینه‌های زیادی از جمله ریاضیات، فیزیک، مکانیک، شیمی، بیولوژی و ... ایفا می‌کند، دارد. در چند دهه گذشته، تلاش زیادی برای مطالعه معادلات موج غیرخطی، صورت گرفته است. از جمله این روش‌ها که برای این منظور به کار رفته است، عبارتند از: روش تکراری تغییراتی [۲۹]، روش اختلال هموتوپی [۲۵]، روش تجزیه آدومیان [۸] و غیره.

البته بسیاری از این روش‌ها گاهی اوقات با شکست مواجه شده‌اند، و آن زمانی است که درجه غیرخطی بودن افزایش یافته است و تابع جواب پیچیده می‌شود.

اگر مصمم به استخراج مفاهیم فیزیکی از فرمول‌های تحلیلی فرآیندهای بیولوژیکی هستیم، باید به اصلاح روش‌های کلاسیک، با به کار بردن ابزارهای مدرن ریاضی متوسل شویم. روش تابع نمایی در حال حاضر بهترین پیشنهاد برای رسیدن به این هدف است.

ایده اصلی روش تابع نمایی برای نخستین بار در سال ۲۰۰۶ توسط جی هو آن هی [1] مطرح شد [۲۶] و بعد از آن توسط افراد زیادی مورد استفاده قرار گرفت[۱۱، ۲۸، ۵۵، ۵۷].

این روش بر پایه این فرض استوار می‌شود که جواب معادله مورد نظر به صورت کسری خاص قابل بسط باشد. یادآور می‌شویم تقریب‌های کسری برای جواب‌های منفرد (توجه شود که، موج‌هایی که با حرکت بسته موج شکل و سرعت آن تغییر نکند موج منفرد یا انفرادی می‌نامند) و شبه منفرد، نخستین بار توسط هیروتا[2] پیشنهاد شد و توسط افراد دیگری توسعه پیدا کرد. در واقع روش تابع نمایی عمومی‌تر از روش تابع سینوس

[1] Ji-Huan He [2] Hirota

هذلولوی و روش تابع تانژانت هذلولوی است. بنابراین جواب‌های کلی بیشتری را به وسیله این روش می‌یابیم.

روش تابع نمایی ابتدا برای جستجوی جواب‌های برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی به کار گرفته شد[۲۶]، اما بعد برای حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی غیرخطی[۵۷]، معادلات انتگرالی[۵۲]، دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی[۱۱] و غیره، مورد استفاده قرار گرفت.

۲.۱ معرفی روش تابع نمایی

برای رسیدن به هدف اصلی، ابتدا خلاصه‌ای از روش تابع نمایی را بیان می‌کنیم و سپس با ارائه چند مثال به کاربرد آن می‌پردازیم.

حال برای معرفی این روش، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی، به شکل کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, u_{xy}, u_{xt}, u_{yt}, \ldots) = 0. \qquad (۱.۱)$$

ابتدا تغییر متغیر زیر را برای متغیرهای مستقل x، y، z، t در نظر می‌گیریم:

$$\xi = kx + wy + sz + jt. \qquad (۲.۱)$$

که در آن k، ω، s، j اعداد ثابتی هستند. به کمک این تغییر متغیر معادله (۱.۱) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$G(u, u', u'', u''', \cdots) = 0. \qquad (۳.۱)$$

که در رابطه (۳.۱) مشتق‌گیری‌ها نسبت به ξ انجام می‌شوند. در روش تابع نمایی ابتدا فرض می‌کنیم که بتوان جواب معادله (۳.۱) را بصورت زیر نوشت:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^{d} a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^{q} b_m \exp(m\xi)}. \qquad (۴.۱)$$

که در آن c، d، p، q اعداد صحیح مثبتی هستند که بعداً تعیین می‌شوند و a_n، b_m ثابت‌های نامعین هستند. می‌توان (۴.۱) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$u(\xi) = \frac{a_c \exp(c\xi) + \cdots + a_{-d} \exp(-d\xi)}{b_p \exp(p\xi) + \cdots + a_{-q} \exp(-q\xi)}. \qquad (۵.۱)$$

برای تعیین مقادیر c، p جمله خطی از بالاترین مرتبه مشتق در معادله (۳.۱) را با جمله غیرخطی از بالاترین مرتبه، در همان معادله، موازنه می‌کنیم. برای تعیین مقادیر q، d نیز به طور مشابه عمل می‌کنیم. در مثال

بعد این موضوع را بیشتر توضیح خواهیم داد. برای اینکه ایده اصلی روش را توضیح دهیم نخست معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم[۲۶]:

$$u_t + u^۲ u_x + u_{xxx} = ۰. \tag{۶.۱}$$

این معادله، معادله‌ی اصلاح شده‌ی KdV [1] نامیده می‌شود که در فهم نقش پراکندگی غیرخطی و در شکل‌گیری ساختارهای شبیه به قطرات مایع ظاهر می‌شود. متغیر η را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta = kx + wt.$$

بنابراین با تغییر متغیر داده شده، معادله (۶.۱) بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$wu' + ku^۲u' + k^۳u''' = ۰. \tag{۷.۱}$$

توجه شود که مشتق‌گیری‌ها در (۷.۱) نسبت به η انجام می‌شوند.
روش تابع نمایی در مواقعی که قابل اعمال باشد، بسیار ساده و قدرتمند است. در این روش فرض بر این است که جواب معادله بتواند به صورت زیر بیان شود:

$$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^{d} a_n \exp(n\eta)}{\sum_{m=-p}^{q} b_m \exp(m\eta)}.$$

که در آن c، d، p، q اعداد صحیح مثبتی هستند که بعداً تعیین می‌شوند و a_n, b_m ثابت‌های نامعینی می‌باشند.
این جواب را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$u(\xi) = \frac{a_c \exp(c\eta) + \cdots + a_{-d} \exp(-d\eta)}{b_p \exp(p\eta) + \cdots + b_{-q} \exp(-q\eta)}. \tag{۸.۱}$$

برای تعیین مقادیر p, c در رابطه (۸.۱)، جمله خطی از بالاترین مرتبه مشتق در معادله (۷.۱) را با جمله غیرخطی از بالاترین مرتبه، در همان معادله، موازنه می‌کنیم. (منظور از جمله غیرخطی از بالاترین مرتبه، جمله‌ای است بصورت $u^n u^{(r)}$، که در آن $n + r$ بیشترین مقدار را دارد.) همانطور که می‌بینید در معادله (۷.۱)، u''' جمله خطی از بالاترین مرتبه مشتق و $u^۲u'$ جمله غیرخطی از بالاترین مرتبه است، که با محاسبه این مقادیر و ساده کردن محاسبات خواهیم داشت:

$$u''' = \frac{c_۱ \exp((۷p + c)\eta) + \cdots}{c_۲ \exp(۸p\eta) + \cdots}, \tag{۹.۱}$$

$$u^۲u' = \frac{c_۳ \exp((p + ۳c)\eta) + \cdots}{c_۴ \exp(۴p\eta) + \cdots} = \frac{c_۳ \exp((۵p + ۳c)\eta) + \cdots}{c_۴ \exp(۸p\eta) + \cdots}. \tag{۱۰.۱}$$

[1] Korteweg–de Vries

که در آن c_i ها ضرایب معلومی هستند و فقط برای سادگی به کار می‌روند. پس از موازنه بالاترین مرتبه تابع نمایی در معادله‌های (۹.۱) و (۱۰.۱) نتیجه زیر حاصل خواهد شد.

$$۷p + c = ۵p + ۳c \Longrightarrow p = c.$$

بطور مشابه برای تعیین مقادیر q، d پایین‌ترین مرتبه تابع نمایی که پایین‌ترین توان تابع نمایی در معادله (۷.۱) است که پس از جایگذاری رابطه (۸.۱) در آن معادله حاصل می‌شود، موازنه می‌کنیم.

$$u''' = \frac{\cdots + d_۱ \exp(-(۷q + d)\eta)}{\cdots + d_۲ \exp(-۸q\eta)}, \tag{۱۱.۱}$$

$$u^۲u' = \frac{\cdots + d_۳ \exp(-(q + ۳d)\eta)}{\cdots + d_۴ \exp(-۴q\eta)} = \frac{\cdots + d_۳ \exp(-(۵q + ۳d)\eta)}{\cdots + d_۴ \exp(-۸q\eta)}. \tag{۱۲.۱}$$

که در آن d_iها ضرایب معلومی هستند و فقط برای سادگی بکار می‌روند. پس از موازنه پایین‌ترین مرتبه تابع نمایی در معادله‌های (۱۱.۱) و (۱۲.۱) خواهیم داشت:

$$-(۷q + d) = -(۵q + ۳d) \Longrightarrow q = d.$$

برای سادگی قرار می‌دهیم:

$$p = c = ۱,\ q = d = ۱.$$

بنابراین رابطه (۸.۱) به رابطه زیرتبدیل می‌شود :

$$u(\eta) = \frac{a_۱ \exp(\eta) + a_۰ + a_{-۱} \exp(-\eta)}{b_۱ \exp(\eta) + b_۰ + b_{-۱} \exp(-\eta)}. \tag{۱۳.۱}$$

در حالتی که $b_۱ \neq ۰$ در رابطه (۱۳.۱) می توان $b_۱$ را برابر ۱ فرض نمود و این رابطه را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$u(\eta) = \frac{a_۱ \exp(\eta) + a_۰ + a_{-۱} \exp(-\eta)}{\exp(\eta) + b_۰ + b_{-۱} \exp(-\eta)}. \tag{۱۴.۱}$$

پس از جایگزینی رابطه (۱۴.۱) در معادله (۷.۱) و به کمک نرم افزار MAPLE به کسری می‌رسیم که در صورت و مخرج آن مجموعی از توابع نمایی با توان‌های مختلف وجود دارد. پس از ساده سازی و مرتب کردن جملات بر حسب توان‌های مختلف تابع نمایی به رابطه‌ای بصورت زیر می‌رسیم:

$$\frac{۱}{A}[c_۳ \exp(۳\eta) + c_۲ \exp(۲\eta) + c_۱ \exp(\eta) + c_۰ + c_{-۱} \exp(-\eta) + c_{-۲} \exp(-۲\eta) + c_{-۳} \exp(-۳\eta)] = ۰. \tag{۱۵.۱}$$

که در آن A بصورت زیر می باشد:

$$(\exp(\eta)+b_0+b_{-1}\exp(-\eta))^4.$$

و c_i ها جملاتی بر حسب ضرایب a_1، a_0، a_{-1}، b_0، b_{-1} به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}
c_3 = wa_1b_0+ka_1^3b_0-k^3a_0-wa_0-ka_1^2a_0+k^3a_1b_0,\\[2ex]
\begin{aligned}c_2 = {} & 8k^3a_1b_{-1}+2ka_1^3b_{-1}-4k^3a_1b_0^2-2wa_{-1}-2ka_1a_0^2+2wa_1b_{-1}+4k^3a_0b_0\\ & -2ka_1^2a_{-1}+2ka_1^2a_0b_0+2wa_1b_0^2-2wa_0b_0-8k^3a_{-1},\end{aligned}\\[2ex]
\begin{aligned}c_1 = {} & wa_1b_0^3+6wa_1b_0b_{-1}-wa_0b_0^2-k^3a_0b_0^2-18k^3a_1b_0b_{-1}-6ka_1a_0a_{-1}+ka_1a_0^2b_0\\ & -ka_0^3+23k^3a_0b_{-1}-wa_0b_{-1}-5wa_{-1}b_0+k^3a_1b_0^3-5k^3a_{-1}b_0+ka_1^2a_{-1}b_0+5ka_1^2a_0b_{-1},\end{aligned}\\[2ex]
\begin{aligned}c_0 = {} & 4wa_1b_{-1}^2-4ka_1a_{-1}^2+32k^3a_{-1}b_{-1}+4ka_1a_0^2b_{-1}-32k^3a_1b_{-1}^2+4k^3a_1b_0b_{-1}\\ & -4wa_{-1}b_{-1}-4k^3a_{-1}b_0^2-4ka_0^2a_{-1}-4wa_{-1}b_0^2+4ka_0^2a_{-1}b_{-1}+4wa_1b_0^2b_{-1},\end{aligned}\\[2ex]
\begin{aligned}c_{-1} = {} & 18k^3a_{-1}b_0b_{-1}-6ka_{-1}b_0b_{-1}-k^3a_{-1}b_0^3+k^3a_0b_{-1}b_0^2+wa_0b_{-1}^2-5ka_0a_{-1}^2\\ & +5wa_1b_0b_{-1}^2+wa_0b_{-1}b_0^2-wa_{-1}b_0^3-ka_1a_{-1}^2b_0-23k^3a_0b_{-1}^2\\ & -ka_1^2a_{-1}b_0+5k^3a_1b_0b_{-1}^2+ka_0^3b_{-1}+6ka_1a_0a_{-1}b_{-1},\end{aligned}\\[2ex]
\begin{aligned}c_{-2} = {} & 2wa_0b_{-1}^2b_0-2wa_{-1}b_{-1}^2-2ka_{-1}^3+2ka_1a_{-1}^2b_{-1}+2wa_1b_{-1}^3-4k^3a_0b_{-1}^3\\ & -4k^3a_0b_{-1}^2b_0-2wa_{-1}b_0^2b_{-1}+4k^3a_{-1}b_0^2b_{-1}-8k^3a_{-1}b_{-1}^2+2ka_0^2a_{-1}b_{-1}\\ & -2ka_0^2a_{-1}b_{-1}-2ka_0a_{-1}^2b_0+8k^3a_1b_{-1}^3,\end{aligned}\\[2ex]
c_{-3} = ka_0a_{-1}^2b_1+wa_0b_{-1}^3-ka_{-1}^3b_0+k^3a_0b_{-1}^3-wa_{-1}b_0b_{-1}^2-k^3a_{-1}b_0b_{-1}^2.
\end{cases}$$

پس از مساوی صفر قرار دادن ضرایب $\exp(n\eta)$ در معادله (۱۵.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} c_3=0,\ c_2=0,\ c_1=0,\ c_0=0,\\ c_{-3}=0,\ c_{-2}=0,\ c_{-1}=0. \end{cases} \tag{۱۶.۱}$$

پس از حل دستگاه (۱۶.۱) به کمک نرم‌افزار MAPLE نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} a_0=a_1b_0+\dfrac{3k^2b_0}{a_1},\ \ a_{-1}=\dfrac{b_0^2(3k^2+2a_1^2)}{8a_1}\\ b_{-1}=\dfrac{b_0^2(3k^2+2a_1^2)}{8a_1^2},\ w=-ka_1^2-k^3. \end{cases} \tag{۱۷.۱}$$

که در آن a_1، b_0، k پارامترهای آزاد هستند. پس از جایگذاری مقادیر (۱۷.۱) در (۱۴.۱) جوابی بصورت زیر برای معادله (۶.۱) خواهیم داشت:

$$u(x,t)=\frac{a_1\exp[kx-(ka_1^2+k^3)t]+a_1b_0+\dfrac{3k^2b_0}{a_1}+\dfrac{b_0^2(3k^2+2a_1^2)}{8a_1}\exp[-kx+(ka_1^2+k^3)t]}{\exp[kx-(ka_1^2+k^3)t]+b_0+\dfrac{b_0^2(3k^2+2a_1^2)}{8a_1^2}\exp[-kx+(ka_1^2+k^3)t]} \tag{۱۸.۱}$$

$$=a_1+\frac{\dfrac{3k^2b_0}{a_1}}{\exp[kx-(ka_1^2+k^3)t]+b_0+\dfrac{b_0^2(3k^2+2a_1^2)}{8a_1^2}\exp[-kx+(ka_1^2+k^3)t]}$$

عموماً k عددی حقیقی است و جواب بدست آمده بصورت (۱۸.۱) یک جواب منفرد عمومی است. در حالتی که k یک عدد موهومی باشد جواب منفرد بدست آمده می‌تواند به جواب متناوب (جواب متناوب همان جواب موج متناوب است که حرکت آن به صورت تناوبی تکرار می‌شود) یا جواب شبه فشرده تبدیل شود. اگر قرار دهیم $k=iK$ پس از بکار بردن این تبدیل داریم:

$$\begin{aligned}\exp[kx-(ka_1^2+k^3)t]&=\exp[iKx-i(Ka_1^2-K^3)t]\\&=\cos[Kx-(Ka_1^2-K^3)t]+i\sin[Kx-(Ka_1^2-K^3)t].\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\exp[-kx+(ka_1^2+k^3)t]&=\exp[-iKx+i(Ka_1^2-K^3)t]\\&=\cos[Kx-(Ka_1^2-K^3)t]-i\sin[Kx-(Ka_1^2-K^3)t].\end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۱۸.۱) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$u(x,t)=a_1+\frac{-\dfrac{3K^2b_0}{a_1}}{(1+\rho)\cos[Kx-(Ka_1^2-K^3)t]+b_0+i(1-\rho)\sin[Kx-(Ka_1^2-K^3)t]}. \tag{۱۹.۱}$$

که در آن $\rho=\dfrac{b_0^2(-3K^2+2a_1^2)}{8a_1^2}$.

اگر ما بدنبال جواب متناوب یا جواب شبه فشرده باشیم باید قسمت موهومی در مخرج کسر مربوط به معادله (۱۹.۱) راصفر کنیم و این نیازمند این است که داشته باشیم:

$$1-\rho=1-\frac{b_0^2(-3K^2+2a_1^2)}{8a_1^2}=0. \tag{۲۰.۱}$$

از حل معادله (۲۰.۱)، b_0 بصورت زیر بدست می‌آید:

$$b_{\circ} = \pm\sqrt{\frac{\text{۸}}{(-\text{۳}K^{\text{۲}} + \text{۲}a_{\text{۱}}^{\text{۲}})}}\ a_{\text{۱}}. \qquad (\text{۲۱.۱})$$

پس از جایگزینی b_0 از رابطه (۲۱.۱) در رابطه (۱۹.۱)، جواب ما منجر به یک جواب شبه فشرده می‌شود که بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= a_{\text{۱}} + \frac{\mp\text{۳}K^{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{۸}}{(-\text{۳}K^{\text{۲}} + \text{۲}a_{\text{۱}}^{\text{۲}})}}}{\text{۲}\cos[Kx - (Ka_{\text{۱}}^{\text{۲}} - K^{\text{۳}})t] \pm \sqrt{\frac{\text{۸}}{(-\text{۳}K^{\text{۲}} + \text{۲}a_{\text{۱}}^{\text{۲}})}}\ a_{\text{۱}}}. \qquad (\text{۲۲.۱}) \\ &= a_{\text{۱}} + \frac{\mp\text{۳}K^{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{۲}}{(-\text{۳}K^{\text{۲}} + \text{۲}a_{\text{۱}}^{\text{۲}})}}}{\cos[Kx - (Ka_{\text{۱}}^{\text{۲}} - K^{\text{۳}})t] \pm \sqrt{\frac{\text{۲}}{(-\text{۳}K^{\text{۲}} + \text{۲}a_{\text{۱}}^{\text{۲}})}}\ a_{\text{۱}}}. \end{aligned}$$

که در آن a_1، k پارامترهای آزاد هستند و باید داشته باشیم $\text{۲}a_{\text{۱}}^{\text{۲}} > \text{۳}K^{\text{۲}}$.

بنابراین روش تابع نمایی می‌تواند به آسانی جواب عمومی منفرد و جواب شبه فشرده معادلات موج را بدست آورد.

۳.۱ کاربرد روش تابع نمایی برای حل مسائل با مقدار مرزی مرتبه بالا

در این قسمت به بررسی مسائل مقدار مرزی مرتبه‌ی بالا، که از مطالعه‌ی فیزیک نجومی، هیدرودینامیک، هیدرومکانیک پایدار، مکانیک سیالات، ستاره شناسی، نظریه موج و پرتو، مهندسی و فیزیک کاربردی ناشی شده است، می‌پردازیم[۱، ۲، ۳، ۱۰، ۱۳، ۱۴، ۴۶، ۵۰]. اگر یک میدان مغناطیسی یکنواخت در جهت جاذبه‌ی زمین به یک سیال اعمال شود، آنگاه ممکن است، باعث ایجاد ناپایداری شود، این پدیده می‌تواند به وسیله‌ی یک مسأله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی هشتم یا دوازدهم مدل‌بندی شود. در حالی که ناپایداری که در انتقال گرمای معمولی اتفاق می‌افتد، می‌تواند بوسیله‌ی یک مسئله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی دهم، مدل‌بندی شود. همچنین مسئله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی هشتم، در ارتعاش تورسینال[۱] یک پرتو یکنواخت، به وجود می‌آید .

روش‌های مختلفی از جمله، تفاضلات متناهی، چندجمله‌ای‌ها، اسپلاین و تجزیه، برای حل این نوع مسائل توسعه یافتند[۱، ۲، ۳، ۱۰، ۱۳، ۱۴، ۴۶، ۵۰]. بیشتر این روش‌ها، در عمل نقص‌هایی همچون واگرایی نتایج در نقاط مجاور مرز و پیچیدگی محاسبه‌ی چندجمله‌ای‌های آدومیان را دربرداشتند. برای برطرف کردن این دشواری‌ها روش تابع نمایی پیشنهاد شد.

[۱] Toursinal

انگیزه‌ی ما از نگارش این فصل توسعه‌ی کاربرد این تکنیک قدرتمند، برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه‌ی بالا می‌باشد. چندین مثال برای روشن کردن این موضوع در ذیل آورده می‌شود[۴].

ابتدا، مسأله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی nام ذیل را

$$y^{(n)}(x) = f(x,y) \tag{۲۳.۱}$$

با شرایط مرزی

$$y^{(j-2)}(a) = A_j \ \ , j = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2}, \qquad y^{(j-2)}(b) = B_j, \ \ j = 2, 4, \cdots, n \tag{۲۴.۱}$$

در نظر می‌گیریم.همانطور که گفته شد روش تابع نمایی روی این فرض که جواب معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی به صورت زیر بیان می‌شود، بنا شده است.

$$y(x) = \frac{\sum_{n=-c}^{d} n \exp[nx]}{\sum_{m=-p}^{q} m \exp[mx]} \tag{۲۵.۱}$$

که در آن d ، c، q، p اعداد صحیح و مثبت هستند که بعداً مشخص می‌شوند و a_n وb_m ثابت‌های نامعلومند. از طرفی معادله‌ی(۲۵.۱) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$y(x) = \frac{a_c \exp[cx] + \cdots + a_{-d} \exp[-dx]}{b_p \exp[px] + \cdots + b_q \exp[-qx]} \tag{۲۶.۱}$$

برای مشخص کردن مقادیر c وp بالاترین مرتبه‌ی قسمت خطی معادله را با بالاترین مرتبه‌ی قسمت غیرخطی موازنه می‌کنیم.

۴.۱ کاربردهای عددی

در این قسمت روش تابع نمایی را برای حل مسائل با مقدار مرزی مرتبه‌ی بالا به کار می‌بریم.نتایج عددی حاصل خیلی دلگرم کننده است و کارایی روش پیشنهاد شده را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۴.۱. *مسأله مقدار مرزی مرتبه‌ی هشتم :*

$$y^{(viii)}(x) = e^{-x} y^2(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{۲۷.۱}$$

با شرایط مرزی

$$y(0) = y''(0) = y^{(iv)}(0) = y^{(vi)}(0) = 1, \qquad y(1) = y''(1) = y^{(iv)}(1) = y^{(vi)}(1) = e.$$

را در نظر می‌گیریم که جواب دقیق این مسأله برابر است با:

$$y(x) = e^x. \tag{۲۸.۱}$$

فرض می‌کنیم جواب مسأله به صورت زیر باشد

$$y(x) = \frac{a_c \exp[cx] + \cdots + a_{-d} \exp[-dx]}{b_p \exp[px] + \cdots + b_q \exp[-qx]}$$

طبق آنچه در بخش ۱ .۲ اشاره شد و با توجه به معادله‌ی (۱ .۲۷)، $y^{(viii)}$ بالاترین مرتبه قسمت خطی و $y^۲$ بالاترین مرتبه قسمت غیرخطی خواهد بود. لذا ساده‌سازی مناسب عبارات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$y^{(viii)} = \frac{c_۱ \exp[(۲۵۵p + c)x] + \cdots}{c_۲ \exp[۲۵۶px] + \cdots}, \tag{۲۹.۱}$$

$$y^۲ = \frac{c_۳ \exp[۲cx] + \cdots}{c_۴ \exp[۲px] + \cdots} = \frac{c_۳ \exp[(۲۵۴p + ۲c)x] + \cdots}{c_۴ \exp[۲۵۶px] + \cdots} \tag{۳۰.۱}$$

که برای سادگی، c_iها ضرایب را مشخص می‌کنند. به وسیله‌ی موازنه‌کردن بالاترین مرتبه‌ی تابع نمایی در(۱ .۲۹) و(۱ .۳۰) داریم

$$۲۵۵p + c = ۲۵۴p + ۲c, \tag{۳۱.۱}$$

که ایجاب می‌کند:

$$p = c. \tag{۳۲.۱}$$

مقادیرd و q نیز بوسیله‌ی موازنه‌ی پایین‌ترین مرتبه تابع نمایی در معادلات زیر

$$y^{(viii)} = \frac{\cdots + d_۱ \exp[(-۲۵۵q - d)x]}{\cdots + d_۲ \exp[-۲۵۶qx]}, \tag{۳۳.۱}$$

$$y^۲ = \frac{\cdots + d_۳ \exp[-۲dx]}{\cdots + d_۴ \exp[-۲qx]} = \frac{\cdots + d_۳ \exp[(-۲۵۴q - ۲d)x]}{\cdots + d_۴ \exp[-۲۵۶qx]}, \tag{۳۴.۱}$$

مشخص می‌شوند. حال با موازنه‌ی پایین‌ترین مرتبه‌ی تابع نمایی در (۱ .۳۳) و (۱ .۳۴) داریم

$$-۲۵۵q - d = -۲۵۴q - ۲d, \tag{۳۵.۱}$$

که منجر می‌شود به:

$$q = d. \tag{۳۶.۱}$$

- **حالت۱:** اگر $p=c=1$ و $q=d=1$ اختیار شود. معادله‌ی (۱.۲۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$y(x)=\frac{a_1\exp[x]+a_0+a_{-1}\exp[-x]}{b_1\exp[x]+b_0+b_{-1}\exp[-x]}. \tag{۱.۳۷}$$

پس از جایگزین کردن (۱.۳۷) در (۱.۲۷) داریم:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}[c_8\exp(8x)+c_7\exp(7x)+c_6\exp(6x)+c_5\exp(5x)+c_4\exp(4x)\\&+c_3\exp(3x)+c_2\exp(2x)+c_1\exp(x)+c_0+c_{-1}\exp(-x)\\&+c_{-2}exp(-2x)+c_{-3}\exp(-3x)+c_{-4}\exp(-4x)+c_{-5}\exp(-5x)\\&+c_{-6}\exp(-6x)+c_{-7}\exp(-7x)+c_{-8}\exp(-8x)+c_{-9}\exp(-9x)\\&+c_{-10}\exp(-10x)]=0,\end{aligned} \tag{۱.۳۸}$$

که در آن $c_i(i=-10,-9,-8,\cdots,6,7,8)$، $A=(b_1\exp(x)+b_0+b_{-1}\exp(-x))^9$ ثابت‌هایی هستند که بوسیله‌ی MAPLE محاسبه می‌شوند. حال اگر ضرایب $\exp(nx)$ را در رابطه (۱.۳۸) برابر صفر قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\{c_{-10}=0,\ c_{-9}=0,\ c_{-8}=0,\ c_{-7}=0,\ c_{-6}=0,\ c_{-5}=0,\ c_{-4}=0,\\&c_{-3}=0,c_{-2}=0,c_{-1}=0,c_0=0,c_1=0,c_2=0,c_3=0,\\&c_4=0,\ c_5=0,\ c_6=0,\ c_7=0,\ c_8=0.\}\end{aligned} \tag{۱.۳۹}$$

پس از حل دستگاه (۱.۳۹) به کمک نرم‌افزار MAPLE نتایج زیر بدست می‌آید:

$$\{a_{-1}=0,\ b_1=0,\ a_0=0,\ b_0=a_1,\ b_{-1}=0,\ a_1=a_1.\} \tag{۱.۴۰}$$

پس از جایگذاری مقادیر (۱.۴۰) در (۱.۳۷) جواب دقیق $y(x)=e^x$ را برای معادله (۱.۲۷) خواهیم داشت.

- **حالت ۲:** اگر $p=c=2$، $q=d=1$ اختیار شود. معادله‌ی (۱.۲۶) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$y(x)=\frac{a_2\exp[2x]+a_1\exp[x]+a_0+a_{-1}\exp[-x]}{b_2\exp[2x]+b_1\exp[x]+b_0+b_{-1}\exp[-x]}. \tag{۱.۴۱}$$

مطابق فرایند ذکر شده در حالت ۱ خواهیم داشت:

$$\{a_{-1} = 0,\ a_0 = 0,\ a_1 = b_0,\ a_2 = a_2,\ b_{-1} = 0,\ b_0 = b_0,\ b_1 = a_2,\ b_2 = 0.\} \qquad (42.1)$$

که باجایگذاری این مقادیر در رابطه (۱ .۴۱)، جواب ذیل به دست می‌آید:

$$y(x) = \frac{a_2 e^{2x} + b_0 e^x}{a_2 e^x + b_0} = \frac{e^x(a_2 e^x + b_0)}{a_2 e^x + b_0},$$

که در آن $a_2 e^x + b_0 \neq 0$. لذا جواب دقیق معادله (۱ .۲۷) به صورت $y(x) = e^x$ خواهد بود.

مثال ۱.۴.۲. مسأله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی دهم :

$$y^{(10)}(x) = e^{-x} y^2(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad (43.1)$$

را با شرایط مرزی

$$y(0) = 1, \qquad y''(0) = y^{(iv)}(0) = y^{(vi)}(0) = y^{(viii)}(0) = 1,$$
$$y(1) = e, \qquad y''(1) = y^{(iv)}(1) = y^{(vi)}(1) = y^{(viii)}(1) = e.$$

در نظر می‌گیریم که جواب دقیق برای این مسأله $y(x) = e^x$ می‌باشد.

فرض کنی جواب مسأله به صورت زیر باشد:

$$y(x) = \frac{a_c \exp[cx] + \cdots + a_{-d} \exp[-dx]}{b_p \exp[px] + \cdots + b_q \exp[-qx]}$$

طبق رویه موازنه کردن در مثال قبل، $p = c$ و $q = d$ به دست می‌آید.

- **حالت۱:** اگر $p = c = 1$ و $q = d = 1$ اختیار شود . معادله‌ی(۱ .۲۶) به صورت زیر خواهد بود

$$y(x) = \frac{a_1 \exp[x] + a_0 + a_{-1} \exp[-x]}{b_1 \exp[x] + b_0 + b_{-1} \exp[-x]}. \qquad (44.1)$$

پس از جایگزین کردن (۱.۴۴) در (۱.۴۳) داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}[c_{10}\exp(10x)+c_9\exp(9x)+c_8\exp(8x)+c_7\exp(7x)+c_6\exp(6x)+c_5\exp(5x)\\
&+c_4\exp(4x)+c_3\exp(3x)+c_2\exp(2x)+c_1\exp(x)+c_0+c_{-1}\exp(-x)\\
&+c_{-2}\exp(-2x)+c_{-3}\exp(-3x)+c_{-4}\exp(-4x)+c_{-5}\exp(-5x)\\
&c_{-6}\exp(-6x)+c_{-7}\exp(-7x)+c_{-8}\exp(-8x)+c_{-9}\exp(-9x)\\
&+c_{-10}\exp(-10x)+c_{-11}\exp(-11x)+c_{-12}\exp(-12x)]=0, \qquad (1.45)
\end{aligned}$$

که در آن $A=(b_1\exp(x)+b_0+b_{-1}\exp(-x))^{11}$ ،$c_i(i=-12,-11,-10,\cdots,8,9,10)$ ثابت‌هایی هستند که بوسیله‌ی MAPLE محاسبه شده‌اند.

حال اگر ضرایب $\exp(nx)$ را در رابطه (۱.۴۵) برابر صفر قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\{c_{-12}=0,\ c_{-11}=0,\ c_{-10}=0,\ c_{-9}=0,\ c_{-8}=0,\ c_{-7}=0,\ c_{-6}=0,\\
&c_{-5}=0,\ c_{-4}=0,\ c_{-3}=0,\ c_{-2}=0,\ c_{-1}=0,\ c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=0,\\
&c_3=0,\ c_4=0,\ c_5=0,\ c_6=0,\ c_7=0,\ c_8=0,\ c_9=0,\ c_{10}=0\} \qquad (1.46)
\end{aligned}$$

پس از حل دستگاه (۱.۴۶) به کمک نرم‌افزار MAPLE نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\{a_{-1}=0,\ b_1=0,\ a_0=0,\ b_0=a_1,\ b_{-1}=0,\ a_1=a_1.\} \qquad (1.47)$$

پس از جایگذاری مقادیر (۱.۴۷) در (۱.۴۴) جواب دقیق $y(x)=e^x$ را برای معادله (۱.۴۳) خواهیم داشت.

- ***حالت ۲:*** اگر $p=c=2$، $q=d=1$ اختیار شود. معادله‌ی (۱.۲۶) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$y(x)=\frac{a_2\exp[2x]+a_1\exp[x]+a_0+a_{-1}\exp[-x]}{b_2\exp[2x]+b_1\exp[x]+b_0+b_{-1}\exp[-x]}. \qquad (1.48)$$

مطابق فرآیند ذکر شده در حالت ۱ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\{a_{-1}=a_{-1},\ a_0=0,\ a_1=a_1,\ a_2=0,\\
&b_{-1}=0,\ b_0=a_1,\ b_2=0.\}
\end{aligned}$$

که باجایگذاری این مقادیر در رابطه (۱.۴۸) جواب دقیق به صورت $y(x)=e^x$ خواهدبود.

مثال ۳.۴.۱. *مسأله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی دوازده:*

$$y^{(12)}(x) = 2e^x y^2(x) + y'''(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{49.1}$$

را با شرایط مرزی

$$y(0) = y''(0) = y^{(iv)}(0) = y^{(vi)}(0) = y^{(viii)}(0) = y^{(10)}(0) = 1$$
$$y(1) = y''(1) = y^{(iv)}(1) = y^{(vi)}(1) = y^{(viii)}(1) = y^{(10)}(1) = e.$$

در نظر می‌گیریم که جواب دقیق برای این مسأله $y(x) = e^{-x}$ می‌باشد.

فرض کنیم جواب مسأله به صورت زیر باشد

$$y(x) = \frac{a_c \exp[cx] + \cdots + a_{-d} \exp[-dx]}{b_p \exp[px] + \cdots + b_{-q} \exp[-qx]}$$

طبق رویه‌ی موازنه‌کردن در مثال قبل، $p = c$ و $q = d$ به دست می‌آید.

- ***حالت۱:*** *اگرا $p = c = 1$ و $q = d = 1$ اختیار شود . معادله‌ی (۲۶.۱) به شکل زیر خواهد بود:*

$$y(x) = \frac{a_1 \exp[x] + a_0 + a_{-1} \exp[-x]}{b_1 \exp[x] + b_0 + b_{-1} \exp[-x]}. \tag{50.1}$$

پس از جایگزین کردن (۵۰.۱) در (۴۹.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}[c_{14} \exp(14x) + c_{13} \exp(13x) + c_{12} \exp(12x) + c_{11} \exp(11x) + c_{10} \exp(10x) + c_9 \exp(9x) \\
&\quad + c_8 \exp(8x) + c_7 \exp(7x) + c_6 \exp(6x) + c_5 \exp(5x) + c_4 \exp(4x) + c_3 \exp(3x) \\
&\quad + c_2 \exp(2x) + c_1 \exp(x) + c_0 + c_{-1} \exp(-x) + c_{-2} \exp(-2x) \\
&\quad + c_{-3} \exp(-3x) + c_{-4} \exp(-4x) + c_{-5} \exp(-5x) + c_{-6} \exp(-6x) \\
&\quad + c_{-7} \exp(-7x) + c_{-8} \exp(-8x) + c_{-9} \exp(-9x) + c_{-10} \exp(-10x)] \\
&\quad + c_{-11} \exp(-11x) + c_{-12} \exp(-12x)] = 0,
\end{aligned} \tag{51.1}$$

که درآن $c_i(i = -12, -11, -10, \cdots, 12, 13, 14)$، $A = (b_1 \exp(x) + b_0 + b_{-1} \exp(-x))^{13}$ ثابت‌هایی هستند که بوسیله‌ی MAPLE محاسبه شده‌اند.