دانشگاه شیخ بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

قضایای قوی همگرایی برای نابرابری وردشی، مسائل تعادل و نقطه ثابت

پژوهشگر:

مینا مردانی قهفرخی

استاد راهنما:

دکتر مجید فخار

استاد مشاور:

دکتر جعفر زعفرانی

دی ماه ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

آنان که از نگاهشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی آموختم...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های بی کران او ندانند و کوشندگان، حق او گزاردن نتوانند.

در آغاز وظیفه ی خود می دانم از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر مجید فخار که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ گونه یاری در این عرصه بر من دریغ ننمودند و با من همراه شدند، سپاس گزاری نمایم، گرچه گام های استوارشان سال ها و سال ها از من جلوتر بود.

از استاد صبور و با تقوا، جناب آقای دکتر جعفر زعفرانی، که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند؛ از سرکار خانم دکتر مریم هاشمی به عنوان داور داخل و از سرکار خانم دکتر طوبی جبروتیان به عنوان داور خارج، که قبول زحمت نموده و پایان نامه اینجانب را بازخوانی نمودند، از استاد فرزانه و دلسوز جناب آقای دکتر علی دانایی به عنوان مدیریت محترم کرسی گروه؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و خدای را بسی شاکرم که از روی لطف و کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم، والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودم چراکه این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند، دستم را گرفته اند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر فراز و نشیب به من آموختند و تشکر می کنم از برادر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

مینا مردانی قهفرخی

دی ماه ۱۳۹۱

چکیده

نابرابری‌های وردشی، مسائل‌تعادل و نقطه ثابت در بسیاری از علوم همانند مکانیک، فیزیک، بهینه‌سازی، کنترل، برنامه‌ریزی غیرخطی، اقتصاد، تعادل حمل‌ونقل، علوم‌مهندسی و... نقش مهمی را بازی می‌کنند. بنابراین پیداکردن روش بارستی برای این مسائل بسیار مهم و کاربردی است. در این پایان‌نامه یک روش بارستی(تکراری) جدید برای پیدا کردن عضو مشترک از مجموعه جواب‌های مشترک یک خانواده‌ی باپایان از مسائل تعادل با استفاده از نگاشت‌های یکنوا و همچنین مجموعه جواب‌های مشترک متناهی از نابرابری‌های وردشی و از مجموعه نقاط ثابت یک خانواده‌ی نامتناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی در فضای هیلبرت معرفی شده است که شرط بهینگی برای مسائل مینیمم‌سازی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی

مسئله تعادل، نابرابری وردشی، مسئله‌بهینه‌سازی، نگاشت‌غیرانبساطی، نگاشت‌یکنوا .

فهرست مطالب

مقدمه

اگر H یک فضای هیلبرت و M یک زیرمجموعه‌ی محدب و بسته از H باشد آن‌گاه برای $x \in H$ دو خاصیت زیر معادل می‌باشند:

$$\begin{cases} (۱) \quad tx \in M \qquad : \qquad \|x - tx\| = \min_{y \in M} \|x - y\|, \\ \\ (۲) \quad tx \in M \qquad : \qquad \langle tx - x, tx - y \rangle \leq ۰, \qquad \forall y \in M, \end{cases}$$

که خاصیت اول را مسئله‌ی بهترین تقریب (نزدیکترین نقطه) و خاصیت دوم را نابرابری وردشی می‌نامند.
فرض کنید K زیر مجموعه‌ی فضای نرم‌دار X و $f : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ مسئله‌ی تعادل به دست آوردن $\bar{x} \in K$ است که

$$f(\bar{x}, y) \geq ۰ \quad \forall y \in K.$$

در سال ۲۰۰۰ مودافی [۱] [۲۱] روش‌های تقریب ناروانی برای مسائل‌تعادل و در سال ۲۰۰۴ زو [۲] [۴۱] روش تقریب ناروانی برای نگاشت‌های غیرانبساطی را معرفی کردند. پس از آن‌ها در سال ۲۰۰۸ کولائو[۳] ، مارینو[۴] و زو [۱۲] برای پیداکردن عضوی مشترک از مجموعه جواب‌های یک خانواده‌ی باپایان از نگاشت‌های غیرانبساطی و مجموعه جواب‌های مسائل تعادل، یک دنباله‌ی بارستی صریح را معرفی کردند و ثابت نمودند دنباله‌ی بارستی مذکور به جواب نابرابری وردشی همگرا است. در سال بعد چنگ [۵] ، لی [۶] و چان[۷] [۱۱] مقاله‌ای با عنوان یک روش بارستی جدید برای مسائل‌تعادل و نقطه ثابت با استفاده از نگاشت‌های غیرانبساطی و نگاشت‌های یکنوا مطرح کردند و به اثبات قضیه قوی همگرایی پرداختند و از آن‌جایی که راه حل و دنباله‌های بارستی ارائه شده توانست باعث توسعه‌ی مسائل بهینه‌سازی و کاربرد وسیعی از ریاضیات در علوم دیگری همانند فیزیک، علوم‌مهندسی و... شود، در همان سال و سال‌های بعد در مقالات متعددی این روش‌های بارستی توسعه پیداکرد و روش‌های بارستی جدیدی با شرایط خاص و متفاوت مطرح شد.

[۱] Moudafi
[۲] Xu
[۳] Colao
[۴] Marino
[۵] Chang
[۶] Lee
[۷] Chan

(برای مثال [۹، ۱۸، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۳۶، ۳۷])

هدف این پایان‌نامه بررسی چند روش بارستی برای مسائل تعادل، نقطه ثابت و نابرابری وردشی می‌باشد و قضیه‌ی مربوط به هرکدام از این روش‌ها را بیان و اثبات نموده‌ایم.

این پایان‌نامه در سه فصل تدوین شده است.

فصل اول، شامل دو بخش می‌باشد که در بخش۱.۱ به بیان تعاریف وقضایایی ازآنالیز تابعی و بهینه‌سازی می‌پردازیم و در بخش ۲.۱ تعاریف و قضایایی که به طور مشترک درفصل دو و سه از آن‌ها استفاده می‌نماییم را بیان می‌کنیم.

فصل دوم، شامل سه بخش می‌باشد در بخش ۱.۲روش بارستی کلی برای نگاشت‌های غیرانبساطی در فضای هیلبرت را بیان می‌نماییم و قضیه‌ی مربوط به روش فوق را نیز ثابت می‌کنیم. در بخش ۲.۲ دنباله‌ای بارستی برای مسائل تعادل و نقطه ثابت در فضای هیلبرت را معرفی کرده و قضیه‌ی مربوط به آن را ثابت می‌نماییم. در بخش ۳.۲ روش بارستی کلی برای مسائل تعادل و نقطه ثابت در فضای هیلبرت را معرفی می‌کنیم که از ترکیب دو روش بارستی در بخش ۱.۲ و ۲.۲ به دست آمده و قضیه‌ی مربوط به آن را ثابت می‌نماییم.

در فصل سه، چهار بخش را مطرح کرده‌ایم. بخش ۱.۳شامل قضایا و لم‌هایی است که برای اثبات قضیه‌ی بخش ۲.۳ به آن‌ها نیازمندیم. در بخش ۲.۳قضیه‌ای تحت عنوان قضیه قوی همگرایی را بیان و اثبات می‌کنیم که تفاوت عمده‌ی این قضیه با قضایای بخش‌های ۲.۲ و ۳.۲ حذف یک شرط اساسی از آن است. در بخش ۳.۳نتایج قضیه‌ی بخش ۲.۳ را بیان می‌کنیم و در بخش ۴.۳ دو کاربرد از قضیه قوی همگرایی را بیان می‌نماییم.

فصل ۱
مفاهیم اولیه

این فصل شامل دو بخش است. در بخش ۱.۱ به بیان تعاریف و قضایایی از آنالیزتابعی و بهینه‌سازی می‌پردازیم و در بخش ۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی را بیان می‌کنیم که به طورمشترک در فصل‌های دوم و سوم موردنیاز می‌باشند. باتوجه به این‌که اثبات این قضایا در کتاب‌های مربوطه آمده است تنها به ذکر منابع اکتفا می‌گردد. منابع اصلی در این فصل [۳، ۴، ۲۸، ۳۶، ۳۷] می‌باشند.

۱.۱ تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی و بهینه‌سازی

تعریف۱.۱.۱

فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ اعدادحقیقی یا مختلط)باشد. یک ضرب داخلی روی X، نگاشت $\langle .\,,.\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{F}$است و دارای خواص زیر می‌باشد:

$$(۱)\qquad \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \qquad \forall x,y,z\in X$$

$$(۲)\qquad \langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle \qquad \forall x,y\in X \quad ,\forall \alpha\in\mathbb{F}$$

$$(۳)\qquad \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \qquad \forall x,y\in X$$

$$(۴)\qquad \langle x,x\rangle \geq ۰, \langle x,x\rangle = ۰ \Longleftrightarrow x = ۰ \forall x\in X$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتایج زیر به دست می‌آیند:

ضرب داخلی نسبت به عامل اول، خطی است.

$$(۵)\quad \langle \alpha x+\beta y,z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle \quad \forall x,y,z\in X \quad , \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}$$

ضرب داخلی نسبت به عامل دوم، خطی مزدوج است.

$$(۶)\quad \langle x,\alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y,x\rangle} = \bar{\alpha}\overline{\langle y,x\rangle} = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle \quad \forall x,y\in X \quad ,\forall \alpha\in\mathbb{F}$$

$$(۷)\quad \langle x,\alpha y+\beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \bar{\beta}\langle x,z\rangle \quad \forall x,y,z\in X \quad ,\forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}$$

نرم حاصل از ضرب داخلی عبارت است از:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

متریک حاصل از ضرب داخلی عبارت است از:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}.$$

تعریف۲.۱.۱

یک فضای ضرب داخلی یاپیش هیلبرت X، یک فضای برداری با یک ضرب داخلی تعریف شده روی X است.

تذکر۱.۱.۱

فضاهای ضرب داخلی، فضاهایی نرم‌دار هستند.

تعریف۳.۱.۱

به یک فضای نرم دار، که هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد، فضای کامل می‌گوییم.

تعریف۴.۱.۱

یک فضای نرم دار کامل را فضای باناخ گوییم.

تعریف۵.۱.۱

یک فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت گوییم و معمولا فضاهای هیلبرت را با نماد H، نشان می‌دهند.

چندخاصیت از فضای هیلبرت

(۱) در فضای هیلبرت نابرابری کوشی شوارتز برقرار است.

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

(۲) در فضای هیلبرت رابطه‌ی متوازی‌الاضلاع برقرار است.

$$\|x-y\|^{۲} + \|x+y\|^{۲} = ۲(\|x\|^{۲} + \|y\|^{۲}).$$

قضیه۱.۱.۱

اگر H یک فضای هیلبرت و M یک زیر مجموعه‌ی محدب وبسته از H ($M \subseteq H$) باشد آن‌گاه برای $x \in H$ دو خاصیت زیر معادل می‌باشند:

$$\begin{cases} (۱) \quad tx \in M \quad : \quad \|x - tx\| = \min\limits_{y \in M} \|x - y\|, \\ (۲) \quad tx \in M \quad : \quad \langle tx - x, tx - y\rangle \leq ۰, \quad \forall y \in M, \end{cases}$$

که خاصیت اول را مسئله‌ی بهترین تقریب (نزدیکترین نقطه) و خاصیت دوم را نابرابری وردشی می‌نامند.

برهان.[۳].

تعریف۶.۱.۱

فرض کنید K زیر مجموعه‌ی فضای نرم‌دار X و $f: K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ مسئله‌ی تعادل به دست آوردن $\bar{x} \in K$ است که

$$f(\bar{x}, y) \geq ۰ \quad \forall y \in K.$$

تعریف۷.۱.۱

فرض کنید $S \neq \emptyset$ و $\tau \subset 2^S$ به قسمی که سه اصل زیر برقرار باشند:

(۱) $\emptyset \in \tau$ و $S \in \tau$

(۲) هرگاه $G_\alpha \in \tau$ برای هر $\alpha \in \Lambda$ آن‌گاه $\bigcup\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset \tau$

(۳) هرگاه $G_i \in \tau$ برای $i \in 1, \cdots, n$ آن‌گاه $\bigcap\limits_{i=1}^{\alpha} G_i \in \tau$

در این صورت τ یک توپولوژی در S است و عناصر τ به «مجموعه‌های باز» موسوم‌اند.
و جفت مرتب $\langle S, \tau \rangle$ را یک فضای توپولوژیک نامیم.

تعریف ۸.۱.۱

فرض کنید S فضای توپولوژیک وτ یک توپولوژی روی آن باشد. مجموعه‌ی γ از همسایگی‌های نقطه‌ی $p \in S$ یک پایه‌ی موضعی است اگر هر همسایگی p شامل یک عضو از γ باشد.

تعریف۹.۱.۱

(X, τ) را یک فضای توپولوژی خطی یا برداری گوییم اگر هر دو عملگر جمع و ضرب اسکالر روی X پیوسته باشند در این حالت τ یک توپولوژی خطی روی X است.

تعریف ۱۰.۱.۱

در تعاریف زیر چند نوع از فضاهای برداری توپولوژیک را معرفی می‌نماییم. در این تعاریف X فضای برداری توپولوژیک باتوپولوژی τ است.

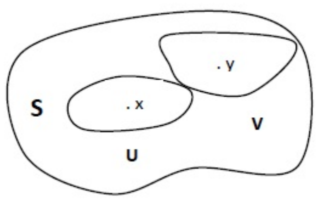
(۱) X موضعا محدب است اگر یک پایه‌ی موضعی $\Re$ موجود باشد که اعضای آن محدب باشند.

(۲) X موضعا کراندار است اگر صفر یک همسایگی کراندار داشته باشد.

(۳) X موضعا فشرده است اگر صفر یک همسایگی داشته باشد که بستار آن فشرده باشد.

تعریف۱۱.۱.۱

فضای $\langle S, \tau \rangle$ یک فضای هاسدورف است اگر و فقط اگر $x, y \in S$ و $x \neq y$ ایجاب کند که $V, U \in \tau$ وجود داشته باشند به قسمی که $x \in U$ و $y \in V$ و $V \cap U = \emptyset$.



شکل ۱.۱: ناحیه هاسدورف

تعریف۱.۱.۱۲

زیرمجموعه‌ی X از $\mathbb{R}^n$ محدب است اگر

$$\forall x, y \in X \quad , \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 \quad : \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in X.$$

تعریف۱.۱.۱۳

تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب است اگر به ازای هر $x, y \in X$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم :

$$f\Big(\lambda x + (1-\lambda) y\Big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{1.1}$$

تعریف۱.۱.۱۴

تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ شبه محدب است اگر و فقط اگر

$$\forall x, y \in X \quad , \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad : \quad f\Big(\lambda x + (1-\lambda) y\Big) \leq \max\Big\{f(x), f(y)\Big\}. \tag{2.1}$$

تذکر۱.۱.۲

توجه داشته باشید که برای $x \neq y$ و $\lambda \in (0, 1)$ چنانچه نابرابری (۱.۱) $\Big($(۲.۱)$\Big)$ اکید باشد آن‌گاه تابع f اکیدا محدب $\Big($ اکیدا شبه محدب $\Big)$ است.

تعریف۱.۱.۱۵

فرض کنید تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ روی مجموعه‌ی باز $X \subset \mathbb{R}^n$ دیفرانسیل پذیر باشد در این صورت f روی X محدب‌نما است اگر

$$\forall x, y \in X \qquad \nabla f(x).(y-x) \geq 0 \implies f(y) \geq f(x).$$

تعریف۱.۱.۱۶

تابع f قویا محدب است اگر

$$f(y) - f(x) \geq \Big\langle \nabla f(x), y - x \Big\rangle + \rho \|y - x\|^2 \qquad \rho > 0.$$

تعریف۱.۱.۱۷

تابع f ضعیفا محدب است اگر

$$f(y) - f(x) \geq \Big\langle \nabla f(x), y - x \Big\rangle + \rho \|y - x\|^2 \qquad \rho < 0.$$

تعریف۱.۱.۱۸

تابع f را نیم پیوسته‌ی بالایی یا « usc »گویند هرگاه

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

تعریف۱.۱.۱۹

تابع f نیم پیوسته‌ی پایینی یا « lsc »گویند هرگاه

$$\liminf_{x \to x_\circ} f(x) \geq f(x_\circ).$$

تعریف ۱.۱.۲۰

X^*، فضای برداری دوگان از فضای برداری توپولوژیک X است اگر عناصر آن روی X توابع خطی پیوسته باشند.

تعریف۱.۱.۲۱

غلاف محدب مجموعه‌ی $S \subseteq \mathbb{R}^n$ کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل S است که با $Conv(S)$ یا CoS نشان داده می شود.

$$Conv(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \quad : \quad \sum \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad x_i \in S \right\} \quad , \quad S \subseteq \mathbb{R}.$$

۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

توضیح:

در تمامی تعاریف و قضایای این بخش مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) H یک فضای هیلبرت حقیقی است.

(۲) C یک زیر مجموعه‌ی غیرتهی، محدب و بسته از H است.

تعریف۱.۲.۱

فرض کنید S یک نگاشت روی H $(S : H \longrightarrow H)$(خودنگاشت) باشد در این صورت Sیک نگاشت غیرانبساطی است اگر

$$\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in H. \tag{۳.۱}$$

مثال ۱.۲.۱

$\sin x$ ، $\cos x$ و $|x|$ نمونه‌ای از نگاشت‌های غیرانبساطی در فضای اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشند.

تعریف۲.۲.۱

نگاشت $T_r : H \longrightarrow C$ یک نگاشت نسبتا غیرانبساطی است اگر

$$\forall x, y \in H \qquad \|T_r x - T_r y\|^{۲} \leq \langle T_r x - T_r y, x - y\rangle. \tag{۴.۱}$$

تذکر۱.۲.۱

هر نگاشت نسبتاغیرانبساطی، غیرانبساطی است اما عکس آن همیشه برقرار نیست.

برهان. ابتدا نشان می دهیم هر نگاشت نسبتاغیرانبساطی، غیرانبساطی است فرض کنید T_r یک نگاشت نسبتاغیرانبساطی باشد اکنون با توجه به نابرابری (۴.۱) داریم:

$$\|T_r x - T_r y\|^{۲} \leq \langle T_r x - T_r y, x - y\rangle \leq \|T_r x - T_r y\|\|x - y\| \leq \|x - y\|^{۲}.$$

در این صورت اگر $T_r x \neq T_r y$ آن‌گاه T_r غیرانبساطی است.

اکنون برای این‌که نشان دهیم هر نگاشت غیرانبساطی، نسبتا غیرانبساطی نمی‌باشد یک مثال نقض ارائه می‌دهیم.

اگر $Sx = -x$ آن‌گاه با توجه نابرابری (۳.۱) می‌توان دریافت Sx یک نگاشت غیرانبساطی است و این در حالی است که Sx در نابرابری (۴.۱) صدق نمی‌کند و در این صورت نگاشتی نسبتاغیرانبساطی نمی‌باشد.

□

تعریف۱.۲.۳
فرض کنید S یک نگاشت غیرانبساطی روی H و $u \in H$ موجود باشد به قسمی که $Su = u$ آن‌گاه u نقطه ثابت S است.

مجموعه‌ی نقاط ثابتِ S را با $F(S)$ یا $Fix(S)$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱.۲.۴
نگاشت $A : C \longrightarrow H$ یکنوا است اگر

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq 0, \qquad \forall x, y \in C. \tag{۱.۵}$$

تذکر۱.۲.۲
چنانچه نابرابری (۱.۵) اکید باشد آن‌گاه A اکیدا یکنوا است.

تذکر۱.۲.۳
فرض کنید A نگاشتی یکنوا باشد اگر

$$\exists u \in C \quad s.t \quad \langle v - u, Au \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C.$$

آن‌گاه u جواب نابرابری وردشی است و مجموعه جواب‌های این نابرابری وردشی را با $VI(C, A)$ نشان می‌دهند.

تعریف۱.۲.۵
نگاشت $T : C \longrightarrow H$ ، k-قویا یکنوا نامیده می‌شود اگر

$$\exists k > 0 \quad s.t \quad \forall x, y \in C \quad \langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq k\|x - y\|^2. \tag{۱.۶}$$

تعریف ۱.۲.۶
نگاشت $T : C \longrightarrow H$ را قویا یکنوای α - وارون گویند اگر عددحقیقیِ مثبت α موجود باشد به طوری‌که

$$\forall x, y \in C \quad \Big\langle T(x) - T(y), x - y \Big\rangle \geq \alpha\|T(x) - T(y)\|^2.$$

تعریف ۱.۲.۷
عملگر $B : H \longrightarrow H$ قویا مثبت با ضریب $\bar{\beta} > 0$ است اگر

$$\langle Bx, x \rangle \geq \bar{\beta}\|x\|^2.$$

تعریف۱.۲.۸
تابع $\alpha : H \longrightarrow \mathbb{R}$ همگنِ مثبت از درجه‌ی p است هرگاه

$$\forall t > 0 \quad \alpha(tz) = t^p\alpha(z).$$

که $p > ۱$ یک ثابت می‌باشد.

تعریف ۹.۲.۱

اگر نگاشت $\eta : C \times C \longrightarrow H$ و تابع همگن مثبت $\alpha : H \longrightarrow \mathbb{R}$ موجود باشند در این صورت نگاشت $T : C \longrightarrow H$ یک نگاشت $\alpha - \eta$ یکنوای آرام است اگر

$$\Big\langle Tx - Ty, \eta(x, y)\Big\rangle \geq \alpha(x - y) \qquad \forall x, y \in C. \tag{۷.۱}$$

تذکر۴.۲.۱

(۱) اگر

$$\forall x, y \in C \qquad \eta(x, y) = x - y.$$

آن‌گاه طبق نابرابری (۷.۱) داریم:

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq \alpha(x - y) \qquad \forall x, y \in C.$$

در این صورت T یک نگاشت α -یکنوای آرام نامیده می شود.

(۲) اگر

$$\forall x, y \in C \qquad \eta(x - y) = x - y.$$

و

$$\forall z \in H \qquad \alpha(z) = k\|z\|^p, \quad k > ۰, \quad p > ۱.$$

آن‌گاه طبق نابرابری (۷.۱) داریم:

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq k\|x - y\|^p \qquad \forall x, y \in C.$$

در این صورت T یک نگاشت p-یکنوا است.

(۳) اگر در قسمت قبل $p = ۲$ آن‌گاه T یک نگاشت $k-$ قویا یکنوا نامیده می‌شودکه قبلا در تعریف (۵.۲.۱) بیان شد.

(۴) اگر

$$\forall x, y \in C \qquad \eta(x, y) = x - y.$$

و

$$\alpha \equiv ۰.$$

آن‌گاه هر نگاشت یکنوا، $\eta-\alpha$ یکنوای آرام است .

مثال۲.۲.۱

فرض کنید $C=(-\infty,\infty)$ و $Tx=-x$ و

$$\eta(x,y)=\begin{cases}-C(x-y) & x\geq y;\\ C(x-y) & x<y,\end{cases}$$

که $C>\circ$ یک ضریب است و در این صورت T نگاشت $\eta-\alpha$ یکنوای آرام است که $\alpha(z)$ نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\alpha(z)=\begin{cases}Cz^{۲} & z\geq\circ;\\ -Cz^{۲} & z<\circ,\end{cases}$$

تعریف۱۰.۲.۱

نگاشت $f:H\longrightarrow H$ یک انقباض با ثابت k نامیده می‌شود هرگاه عدد ثابت $\circ\leq k<۱$ موجود باشد به قسمی که

$$\|fx-fy\|\leq k\|x-y\|.$$

تعریف۱۱.۲.۱

نگاشت $S:C\longrightarrow C$ انقباضی‌نما نامیده می‌شود اگر

$$\forall x,y\in C\qquad \|Sx-Sy\|^{۲}\leq\|x-y\|^{۲}+\|(I-S)x-(I-S)y\|^{۲}. \tag{۸.۱}$$

یا به طور معادل

$$\forall x,y\in C\qquad \Big\langle(I-S)x-(I-S)y,x-y\Big\rangle\geq\circ. \tag{۹.۱}$$

تذکر۵.۲.۱

چنانچه نابرابری‌های (۸.۱) یا (۹.۱) اکید باشند آن‌گاه S یک نگاشت اکیدا انقباضی‌نما است.

تذکر۶.۲.۱

فرض کنید S یک نگاشت انقباضی‌نما و A نگاشتی یکنوا باشد به قسمی که

$$A=I-S\qquad,\qquad A^{-۱}(\circ)=F(S),$$

آن‌گاه

$$F(S)=VI(C,A).$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $F(S) \subseteq VI(C,A)$. فرض کنید $u \in F(S)$ لذا

$$\begin{aligned} Su = u &\Longrightarrow u - Su = 0 \\ &\Longrightarrow (I-S)u = 0 \\ &\Longrightarrow Au = 0 \\ &\Longrightarrow \langle v-u, Au\rangle = 0. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به تعریف نابرابری وردشی که در قضیه‌ی (۱.۱.۱) بیان شد می‌توان نتیجه گرفت :

$$u \in VI(C,A).$$

حال باید ثابت کنیم $VI(C,A) \subseteq F(S)$.
اگر $u \in VI(C,A)$ آن‌گاه $\langle v-u, Au\rangle \geq 0$ چون طبق فرض مسئله داشتیم $A = I - S$ در این صورت

$$\langle v-u, (I-S)u\rangle \geq 0.$$

اکنون فرض کنید $v = Su$ بنابراین داریم:

$$\langle Su-u, (I-S)u\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle Su-u, u-Su\rangle \geq 0.$$

و نتیجه می‌شود:

$$\|u - Su\| \leq 0. \tag{۱۰.۱}$$

از طرفی می‌دانیم :

$$\|u - Su\| \geq 0. \tag{۱۱.۱}$$

از این‌رو با توجه به (۱۰.۱) و (۱۱.۱) داریم :

$$\begin{aligned} \|u - Su\| = 0 &\Longrightarrow Su - u = 0 \\ &\Longrightarrow Su = u \\ &\Longrightarrow u \in F(S). \end{aligned}$$

□

تعریف۱۲.۲.۱

فرض کنید E یک فضای باناخ با دوگان E^* و K یک زیر مجموعه‌ی غیرتهی از E باشد و دو نگاشت T و η به صورت زیرباشند:

$$T : K \longrightarrow E^* \qquad , \qquad \eta : K \times K \longrightarrow E,$$

آن‌گاه نگاشت $T : K \longrightarrow E^*$، η -نیمه پیوسته است هرگاه
برای هر نقطه‌ی $x, y \in K$ تابع $f : [0, 1] \longrightarrow (-\infty, \infty)$ که به صورت زیر تعریف شده است در 0^+ پیوسته باشد.

$$f(t) = \Big\langle T(1 - t)x + ty, \eta(x, y)\Big\rangle.$$

تعریف۱۳.۲.۱
فرض کنید E یک فضای باناخ و K زیر مجموعه‌ی غیرتهی از E باشد. نگاشت $F : K \longrightarrow 2^E$ نگاشت KKM [1] نامیده می‌شود هرگاه

$$\forall x_i \in E \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad Co\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq \cup_{i=1}^{n} F(x_i).$$

که 2^E خانواده‌ای از همه‌ی زیر مجموعه‌های غیر تهی E است.

تعریف۱۴.۲.۱
فرض کنید $\{S_n\}$ یک خانواده‌ی متناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی روی C و $\{\theta_n\}$ یک دنباله‌ی حقیقی باشد به قسمی که $0 \leq \theta_n < 1$، و برای هر $n \geq 1$ نگاشت $W_n : C \longrightarrow C$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\begin{aligned}
&U_{n,n+1} = I\\
&U_{n,n} = \theta_n S_n U_{n,n+1} + (1 - \theta_n)I\\
&U_{n,n-1} = \theta_{n-1} S_{n-1} U_{n,n} + (1 - \theta_{n-1})I\\
&\qquad\vdots\\
&U_{n,k} = \theta_k S_k U_{n,k+1} + (1 - \theta_k)I\\
&U_{n,k-1} = \theta_{k-1} S_{k-1} U_{n,k} + (1 - \theta_{k-1})I\\
&\qquad\vdots\\
&U_{n,2} = \theta_2 S_2 U_{n,3} + (1 - \theta_2)I\\
&W_n = U_{n,1} = \theta_1 S_1 U_{n,2} + (1 - \theta_1)I.
\end{aligned}$$

آن‌گاه W_n یک نگاشت غیرانبساطی است وW-نگاشت تولیدشده توسط $S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}, S_n$ و $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}, \theta_n$ نامیده می‌شود.

[1] K. K. Marzukiewicz