۳۰ /۳/ ۱۳۷۸

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان :

نیم پیوستگی گروههای خودریختی مختلط

استاد راهنما:

ارسلان شادمان

نگارش :

محمد باقری

اسفند ماه ۱۳۷۷

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی محض** **آقای محمد باقری** تحت عنوان :

نیم پیوستگی گروههای خود ریختی مختلط

در تاریخ ۷۷/۱۲/۲۴ **دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.

هیأت داوران براساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، پایان نامه ایشان را برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض معادل با ۶ واحد با نمره ۱۹ (نوزده) با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر ارسلان شادمان	دانشیار	تهران	
۲ - استاد مشاور	دکتر مسعود صباغان	استادیار	تهران	
۳- استاد داور	دکتر یعقوب فرجامی	استادیار	تهران	

سرپرست تحصیلات تکمیلی گروه	مدیر گروه	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رحیم زارع نهندی	محمد رضا درفشه	رسول اخروی

۲۵۰۸۳

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

این پایان نامه به منظور اخذ درجه کارشناسی ارشد تنظیم و منبع اصلی آن در مقدمه ذکر گردیده است. در نوشتن این پایان نامه از راهنمایی های استاد بزرگوار جناب آقای دکتر ارسلان شادمان که استاد راهنمای اینجانب می‌باشند، استفاده‌های فراوان کرده‌ام و خود را مرهون الطاف و زحمات ایشان می‌دانم. بدیهی است که هر چه کمبود و لغزش در آن یافت می‌شود همگی را متوجه خود دانسته واز خوانندگان محترمی که این کمبودها را گوشزد فرمایند سپاسگزار خواهم بود همچنین از این که جناب آقای دکتر مسعود صباغان و جناب آقای دکتر یعقوب فرجامی قبول فرمودند که در نوشتن این پایان نامه استاد مشاور باشند سپاسگزاری می‌نمایم. از تمامی اساتید و شرکت کنندگان محترمی که در جلسه دفاع از این پایان نامه حضور بهم می‌رسانند کمال تشکر را دارم.

محمد باقری

اسفند ماه ۱۳۷۷

چکیده

در این پایان نامه دو مقاله ارائه می‌شود یکی از آنها به فراگیری دامنه‌ها می‌پردازد که نوشتهٔ برومافریدمان است و در مجلهٔ پروسیدینگ انجمن ریاضی امریکا به سال ۱۹۸۶ منتشر گردیده است و دیگری نوشتهٔ برومافریدمان و اوژنی پولتسکی است که در مجلهٔ ماتماتیشه آنالن به سال ۱۹۹۴ منتشر شده است. مقالهٔ اول به ساختن دامنه فراگیر می‌پردازد. که در پایان نامهٔ آقای احمد زیره نیز ارائه شده است و مقاله دوم با استفاده از دامنه فراگیر به بررسی تقارن یک دامنه دلخواه در $\mathbf{C}^n$ و نیم پیوستگی گروه خودریختیهای مختلط می‌پردازد که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می‌گیرد. بررسی موضوع اشاره به موضوعهای مختلف از قبیل گروههای لی، خمینه‌های ریمان، متریک کوبایاشی، خمینه‌های هذلولوی، درجهٔ توابع و اندازه روی خمینه‌ها دارد که در فصل کلیات گنجانده شده است. سه فصل دیگر پایان نامه وارد موضوع اصلی می‌شود و قضایای اساسی را در بردارد. خواننده‌ای می‌تواند از پایان نامه استفاده کند که با مقدمات آنالیز مختلط و هندسه آشنایی داشته باشد.

بررسی گروه خودریختیهای شیئی مفروض X در یک رسته موضوع جالب و غالباً پیچیده‌ای است. در آنالیز و هندسهٔ مختلط، نگاشتهای تمامریخت بین خمینه‌های مختلط منجر به بررسی رستهٔ خمینه‌های مختلط می‌شود و در این رسته گروه خودریختیهای شیئی X را با Aut X نمایش می‌دهند. البته رستهٔ وسیعتری نیز هست که مرکب است از فضاهای مختلط و نگاشتهای تمامریخت بین آنها و کتاب جدید آخیزر[2] به بررسی گروه Aut X پرداخته است هنگامی که X نه تنها یک خمینهٔ مختلط، بلکه یک فضای مختلط است. این بررسی اساساً به آنجا کشیده می‌شود که نقش گروههای لی در آنالیز مختلط را روشن سازد. برخی فضاها بسیار خشک و شکننده‌اند بدین معنی که گروه خودریختیهایشان تعداد اندکی عضو دارد ودر حالت "صُلب" گروه Aut X منحصر به یگانه عضو {نگاشت همانی X} است. اما حالتهایی نیز هست که گروه Aut X نمی‌تواند به هیچ وجه ساختار یک گروه لی متناهی - البعد را بپذیرد مانند $X = \mathbf{C}^2$ از این رو، و خصوصاً پس از آنکه گوی یکهٔ $\mathbf{C}^n$ به وسیلهٔ گروه خودریختیهایش مشخص گردید و دانستند که یگانه دامنهٔ کراندار در $\mathbf{C}^n$ (با مرز هموار تا درجه‌ای) که اکیداً شبه محدب باشد وگروه خودریختیهایش فشرده نباشد فقط گوی یکه است در دههٔ ۱۹۷۰، توجه ریاضیدانان به گروه خودریختیها از سر گرفته شد. الی کارتان در اوایل قرن توجه ریاضیدانان را به دسته‌بندی دامنه‌های $\mathbf{C}^n$ جلب کرده و پسرش هانری کارتان یکی از قضایای جالب در این زمینه را به اثبات رسانده بود: برای هر دامنهٔ کراندار $X \subset \mathbf{C}^n$، گروه Aut X یک گروه لی حقیقی است. افراد دیگری به تخمین بُعدِ این گروه پرداختند و سپس هم چنین معلوم شد که به ازای هر گروه لی فشرده G یک عدد طبیعی n و یک دامنهٔ کراندار X در $\mathbf{C}^n$ موجودند به قسمی که گروه خودریختیهای این دامنه دقیقاً آن گروه لی مفروض باشد. یعنی $\mathrm{Aut}\ X = G$ زیبائیهایی از این دست، موجب شد که در دههٔ اخیر، شاخهٔ "آنالیز هندسی" شاهد شکوفایی خاصی شود. مجله‌ای بنام آنالیز هندسی به درج مقالات در سطح بسیار بالا وغالباً در حجم چند ده صفحه پا به عرصهٔ حیات گذاشت، ریاضیدانان خوش قلمی

هم چون استیون کرانتس به نگارش کتابی تحت عنوان "آنالیز هندسی" پرداخت و البته تعداد موثری از کارهای تحقیقاتی خود را نیز قبل و بعد از انتشار کتاب به همین زمینه اختصاص داده بودند.

هنگامی که درس آنالیز مختلط کارشناسی ارشد را می‌گذراندم اندکی از این مسائل جسته -گریخته به گوشم خورد و وقتی درس آنالیز هندسی را تعقیب کردم بیشتر به طرف این مسائل کشیده شدم. از میان مقالات متعددی که توسط استاد محترم درس جناب آقای دکتر شادمان گردآوری شده بود به مطالعهٔ چند منبع بیشتر علاقه‌مند شدم و در حالی که پیش از آن دو دل بودم در چه زمینه‌ای کار کنم، تصمیم گرفتم با وجود مشکل بودن و پیچیدگی مطالب، پایان نامهٔ خود را بر مبنای یکی از کارهای این زمینه تنظیم نمایم.

فرض کنیم X یک دامنهٔ کراندار در $\mathbb{C}^n$ باشد و $G = \text{Aut } X$. اگر X را اندکی تغییر دهیم، $\text{Aut } X$ به چه وضعی در می‌آید؟ ایده جالبی که در آغاز مقاله‌های مورد مطالعه‌ام مطرح شده است می‌گوید: «غالباً تصور می‌شود که تغییر X موجب از بین رفتن تقارنهای آن می‌شود و هیچگاه نمی‌توان توقع داشت که یک تغییر کوچک در X موجب درست شدن تقارنهای جدیدی باشد».

تعبیر تقارن X در آنالیز مختلط آن است که گروه $\text{Aut } X$ اعضای بیشتری داشته باشد. اما بی‌درنگ در همان مقالات ادعا می‌شود که ما می‌خواهیم نشان دهیم که در دامنه‌های مختلط موضوع بر عکس است و به ازای هر دامنهٔ X می‌توان دامنه هایی مانند X_j ساخت به طوری که X_jها X را فراگیرند و گروه $G_j = \text{Aut } X_j$ آنقدر غنی باشد که دست کم گروه $Z_j = \frac{Z}{jZ}$ را شامل شود. این که فراگیری به چه معنایی است خود موضوع مقالهٔ مستقلی بوده است که توسط نویسندگان همین مقالات معرفی شده است. بدین ترتیب، من مجبور شدم به کلیاتی راجع به این موضوعها فکر کنم و اندکی اطلاعات خود را در زمینهٔ آنها شفافیت بخشم. در همین زمان، آقای احمد زیره نیز تعدادی از مقالات نامبرده را بررسی کرد و قسمت دیگری از کار مربوط به گروه خودریختیها را ارائه نمود. هر چند کار ما

متفاوت است، اما قسمتی از فصل دوم مربوط به ساختن دامنه فراگیر در هر دو مشترک است توجه به ساختار دامنه فراگیر برای مطالعه فصل دوم لازم است. از این رو، بخش مشترکی در پایان نامه‌هایمان به فراگیری اختصاص یافته است. باید توجه کرد که نیم پیوستگی گروه Aut X برای توپولوژی مخصوصی که شرح خواهیم داد معتبر است و قبلاً، خانم دکتر د.ما.D.M ثابت کرده بود که بین گروه ایزوتروپیها و گروه خودریختیها از این نظر تفاوت وجود دارد.

فصلهای پایان نامه به این شرح اند که کلیات در فصل اول گرد آمده است. در این فصل سعی کرده‌ایم مفاهیم و صورت قضایا روشن باشد و برخی از قضایا را نیز اثبات کرده‌ام اما به عنوان یک سیاست کلی سعی نمودم حداقل حجم را به این مطالب اختصاص دهم وگرنه هرکدام یک شرح مثنوی می‌خواست. در فصل دوم فراگیری دامنه‌ها و بحث مربوط به تقارن دامنه‌ها آمده است. فصل سوم به اثبات نیم پیوستگی بالایی گروه خودریختیها اختصاص یافته است. در فصل چهارم به مطالعه و بررسی خواص گروه خودریختیهای یک خمینهٔ هذلولوی پرداخته‌ایم. سه فصل اخیر که اساس کار پایان نامه است، شامل برهان کامل قضایای اصلی است، برهانی که طولانی است و از حیث فنی نیز مستلزم دقت است. باید اضافه کنم که پیچیدگی این قضایا به آن اندازه بود که از درک و ارائهٔ آنها لذت ببرم و در فرصت کوتاه دو نیمسال که روی آنها کار کردم به توسعهٔ معلومات خود در زمینهٔ آنالیز هندسی بپردازم، اما آن که نظیر قضایا برای فضاهای مختلط را بررسی شود و یا به تغییر اساسی اثباتها بپردازم، مجال بیشتری می‌خواست و اگر توفیق رفیق راه شود،کار را به آینده موکول می‌کنم.

در خاتمه، رهیافت خود به این مباحث را مدیون درسهای آنالیز مختلط، آنالیز هندسی، و موضوعهای سمینار آنالیز و هندسهٔ مختلط دانشگاه تهران هستم که همهٔ آنها را استاد راهنمایم جناب آقای دکتر شادمان به عنوان ره آورد سفر فرصت مطالعاتی به ما ارائه نمودند. امیدوارم با ارائه این کار نشان داده باشم که زحمات ایشان در این مسیر نتیجه بخش بوده است.

بخش ۱ گروه خودریختیهای یک خمینهٔ مختلط

در این بخش، نخست نماد گذاریهای متداول نظریهٔ توابع چند متغیرهٔ مختلط را ارائه می‌کنیم. سپس به تعریف خمینهٔ مختلط که یک موضوع کاملاً کلاسیک است می‌پردازیم. نگاشتهای دو سو تمامریخت، از یک خمینهٔ M به M، یا به اصطلاح خوریختیهای مختلط M، تشکیل یک گروه می‌دهند. نهایتاً در این بخش آنچه را برای درک مقدماتی این گروه لازم است می‌آوریم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی و نمادگذاری

فرض کنیم $\Omega \subseteq \mathbf{C}^n$ یک مجموعه باز و $f: \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $a \in \Omega$ و $1 \leq i \leq n$، $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{f(a+\lambda e_i) - f(a)}{\lambda}$ موجود باشد در این صورت f را یک تابع تمامریخت در Ω گوئیم. مجموعه تمام توابع تمامریخت در Ω را با $H(\Omega)$ نمایش می‌دهیم. بوضوح $H(\Omega)$ یک جبر است.

فرض کنیم r_iها اعداد حقیقی مثبت و $r = (r_1,...,r_n)$ و $a = (a_1,...,a_n)$ و a_iاعداد مختلط دلخواه باشند قرار می‌دهیم $D(a,r) = \{z \in \mathbf{C}^n \; ; \; | z_i - a_i | < r_i, \; 1 \leq i \leq n\}$ و $U^n = D(0,1)$. فرض کنیم $z=(z_1,...,z_n)$ و $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ که α_i اعداد صحیح نامنفی هستند قرار می‌دهیم:

$$\alpha! = \alpha_1!....\alpha_n!$$

و $$z^\alpha = z_1^{\alpha_1}....z_n^{\alpha_n}$$

فرض کنیم $f \in H(\Omega)$ و $\overline{U^n} \subseteq \Omega$

برای $z = (z', z_n)$ که $z' = (z_1,...,z_{n-1})$ مطابق فرمول کشی برای توابع یک

متغیره داریم:

$$f(z) = f(z', z_n) = \int_T f(z',w_n)(1-\overline{w}_n z_n)^{-1}\, d\lambda(w_n)$$

که در آن T دایره یکه است $d\lambda$ اندازهٔ لبگ نرمال روی T است. با تکرار این عمل برای تابع $f(z',w_n)$ و برای هر مؤلفه خواهیم داشت:

$$\forall z \in U^n; \qquad f(z) = \int_{T^n} f(w) \prod_{j=1}^{n} (1-\overline{w}_j z_j)^{-1}\, d\lambda(w)$$

چون $\prod_{j=1}^{n} (1-\overline{w}_j z_j)^{-1} = \sum_{\alpha} w^{\alpha} z^{\alpha}$ برد α تمام اندیسهای nتایی با درایه‌های نامنفی از اعداد صحیح است خواهیم داشت $f(z) = \sum_{\alpha} \gamma(\alpha) z^{\alpha}$ که در آن $\gamma(\alpha)= \int_{T^n} f(w)\overline{w}^{\alpha}\, d\lambda(w)$ کـه سـری فـوق بـطور مـطلق و یکـنواخت روی زیر مجموعه‌های فشرده‌های U^n به f(z) همگراست اگر Ω شامل D(p,r) باشد بطور مشابه برای هر $z \in D(p,r)$ خواهیم داشت:

$$f(z)= \sum_{\alpha} \gamma(a)(z-p)^{\alpha}.$$

۲.۱ نتیجه: هر تابع تمامریخت بطور موضعی به صورت سری توانی قابل نمایش است.

یادآوری: فرض کنیم $z_j = x_j + iy_j$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

۳.۱ خواص مقدماتی

i) - برای هر $f \in H(\Omega)$ مشتقات جزئی f از هر مرتبه‌ای وجود دارد و

$$(D^{\alpha}f)(p) = \alpha!\ \gamma(\alpha)$$

که در آن $f(z) = \sum_{\alpha} \gamma(\alpha)\, z^{\alpha}$

ii)- اگر برای یک زیر مجموعه باز از Ω، $f(\Omega) = 0$ و Ω همبند باشد در این صورت $f \equiv 0$

iii)- اگر $f \in H(\Omega)$ و Ω همبند و $|f|$ ماکزیمم موضعی در Ω داشته باشد f ثابت است.

iv)- اگر **K** مجموعه فشرده از Ω باشد ثابت $A(\Omega,\mathbf{K},\alpha)$ وجود دارد بطوریکه

$$\| D^{\alpha} f \|_{K} < A(\Omega,\mathbf{K},\alpha)\ \| f \|_{\Omega}$$

v)- فرض کنیم $f_j \in H(\Omega)$ و $f_j \longrightarrow f$ بطور یکنواخت روی فشرده‌ها، در این صورت $f \in H(\Omega)$ و $D^{\alpha}f_j \longrightarrow D^{\alpha}f$ بطور یکنواخت روی فشرده‌ها همگراست.

۴.۱. قضیه مُنتل

اگر Γ یک خانواده از توابع بطور موضعی کراندار از توابع تمامریخت در Ω باشد در این صورت هر دنباله در Γ یک زیر دنباله بطور یکنواخت همگرا روی فشرده‌ها خواهد داشت.

۵.۱. گزاره

فرض کنیم Ω_1 و Ω_2 مجموعه‌های باز در $\mathbf{C}^n$ و $\mathbf{C}^m$ و $f_1,\dots,f_m \in H(\Omega)$ باشند در این صورت هرگاه $F:\Omega_1 \longrightarrow \mathbf{C}^m$ و $F=(f_1,\dots,f_m)$ تابع F را تمامریخت در Ω_1 نامیم. و با $F \in H(\Omega_1)$ نمایش می‌دهیم. اگر $G:\Omega_2 \longrightarrow \mathbf{C}^k$ و $G \in H(\Omega_2)$ و $F(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$ در این صورت $GoF \in H(\Omega_1)$.

اثبات تمام مطالب گذشته را می‌توان در کتاب رودین [19] پیدا کرد.

تعریف: اگر تابع $F:\Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ تمامریخت یک به یک و پوشا و دارای وارون تمامریخت باشد در این صورت F را دوسو تمامریخت گوئیم.

فرض کنیم $F:\Omega \longrightarrow C^m$ تمامریخت باشد و $a_{jk}=(D_kf_j)(z)$ و $z\in\Omega$ تعریف می‌کنیم $A=(a_{jk})=F'(z)$ اگر $m=n$ ژاکوبین مختلط F در z را با $(JF)(z)=\det A$ و ژاکوبین حقیقی F را با $(J_RF)(z)=|JF|^2$ نمایش می‌دهیم.

۶.۱ قضیه نگاشت معکوس. فرض کنیم $p\in\Omega\subseteq C^m$ و $F:\Omega \longrightarrow C^m$ تمامریخت و $F'(p)$ معکوس‌پذیر باشد. در این صورت همسایگی V از p و W از F(p) وجود دارد بطوریکه F روی V یک به یک بتوی W و وارون F روی W تمامریخت است. برعکس اگر F روی Ω یک به یک باشد $F'(p)$ روی Ω وارون‌پذیر است.

۷.۱ تعریف. یک خمینه مختلط M، یک فضای توپولوژیک هاوسدورف با اطلس مختلط $\{(U_i,\phi_i);\ i\in I\}$ از جفتهای (U_i,ϕ_i) می‌باشد که U_i مجموعه‌های باز از M و ϕ_i همریختی‌های یک به یک و پوشا از U_i بتوی زیر مجموعه‌های باز از C^n می‌باشد بطوریکه $M=\bigcup_{i\in I}U_i$ و نیز برای هر $j\in I$ و i با $U_i\cap U_j\neq\phi$، $\phi_j\circ\phi_i^{-1}:\phi_i(U_i\cap U_j)\longrightarrow\phi_j(U_i\cap U_j)$ یک نگاشت دو سو تمامریخت باشد. گاهی خمینه مختلط را با (M,ϕ_i) یا به اختصار با M نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم (M,ϕ_i) و (N,ψ_j) دو خمینه مختلط باشند گوئیم نگاشت پیوسته $F:M\longrightarrow N$ تمامریخت است. اگر برای هر نقطه $p\in M$ و نگاشت ϕ_i که دامنه‌اش شامل نقطه p باشد و نگاشت ψ_j که دامنه‌اش شامل نقطه f(p) می‌باشد. تابع $\psi_j\circ f\circ\phi_i^{-1}$ تمامریخت باشد.

فرض کنیم $f:M\longrightarrow N$ تمامریخت و f پوشا و یک به یک بوده و نیز وارون f تمامریخت باشد در این صورت f را دو سو تمامریخت می‌نامیم. اگر $M=N$ باشد f را

خود ریختی M می‌نامیم. مجموعه تمام خود ریختیهای M را با $AutM$ نمایش می‌دهیم.

اگر $f: M \longrightarrow N$ تمامریخت و یک به یک و وارون f نیز تمامریخت باشد f را نشاننده تمامریخت می‌نامیم.

برای مثال مجموعه‌های باز در C^n خمینه‌های مختلط بوده و گروه خودریختیهای گوی یکه را شناسایی می‌کنیم.

۸.۱ قضیهٔ (کارتان). فرض کنیم Ω یک ناحیه کراندار در C^n باشد (ناحیه مجموعه باز همبند است) و $F: \Omega \longrightarrow \Omega$ تمامریخت و برای $p\in\Omega$، $F(p) = p$ و $F'(p) = I$

در این صورت $\forall z\in\Omega; F(z) = z$

اثبات: بدون کم کردن کلیت $p = 0$ فرض می‌کنیم چون Ω باز و کراندار است پس $r_1,r_2 \in R$ موجود است بطوریکه $r_1 B \subseteq \Omega \subseteq r_2 B$ (B گوی یکه در C^n می‌باشد).

چون F تمامریخت در Ω می‌باشد پس

$\forall z; |z| < r_1$، $F(z) = \sum_\alpha \gamma(\alpha) z^\alpha$

فرض کنیم F_s مجموع تمام چند جمله‌ایها در $\sum_\alpha \gamma(\alpha) z^\alpha$ از درجه s باشد چون $F(0)=0$ پس $F(z) = z + \sum_{s=2}^{+\infty} F_s(z)$ فرض کنیم $F^k = F^{k-1} \circ F$ به استقراء خواهیم داشت:

$F^k = z + kF_2(z) +$ عباراتی از درجه بالاتر -

$$\| kF_2 \|_B = \| \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} . D^\alpha F^k(0) z^\alpha \|_{r_1 B} \qquad (۱)$$

چون $\Omega \longrightarrow F^k: \Omega$ پس داریم

$$\| D^\alpha F^k(0) \|_{r_1 B} \leq A(\alpha, 0, r_1 B) \ \| F^k \|_{r_1 B} \leq r_2 A(\alpha, 0, r_1 B) \qquad (۲)$$

و لذا بر طبق (۱) و (۲) برای هر $k\in N$ $\| kF_2 \|_B < \infty$ پس $\| F_2 \|_{r_1 B}$ و لذا $F_2 \equiv 0$

به همین ترتیب $F_k\equiv 0$ پس $F = z$. □

دامنهٔ $\Omega \subseteq \mathbf{C}^n$ را دوار گوئیم اگر برای هر $z\in\Omega$ و $\theta \in \mathbf{R}$ داشته باشیم $e^{i\theta} z \in \Omega$.

۹.۱ قضیه. فرض کنیم Ω_1,Ω_2 دو ناحیه دوار از $\mathbf{C}^n$ و $0\in\Omega_1\cap \Omega_2$ و F یک نگاشت دو سو تمامریخت از Ω_1 به Ω_2 باشد و $F(0)=0$ و Ω_1 ناحیه کراندار باشد در این صورت F یک تبدیل خطی است.

اثبات: فرض کنیم $G = F^{-1}$ و $A = F'(0)$ چون $G(F(z))=z$ و $G'(0)A=I$ پس فرض کنیم $G'(0)= A^{-1}$

$\forall z\in\Omega_1, H(z) = G(e^{-i\theta} F(e^{i\theta}z))$ در این صورت H نگاشتی تمامریخت از Ω_1 به Ω_2 است و $H(0) = 0$ و $H'(0)=I$ بر طبق قضیه ۸.۱ $H(z)=z$ پس باید داشته باشیم

$$\forall\theta ; F(e^{i\theta} z) = e^{i\theta} F (z)$$

داریم

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k (z)$$

$$e^{i\theta} F(z) = F(e^{i\theta} z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k (e^{i\theta} z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\theta} F_k (z)$$

در نتیجه

$$\Sigma e^{i\theta} F^k(z) = \Sigma e^{ik\theta} F_k(z).$$

در نتیجه

$$(e^{i\theta} - e^{ik\theta}) F_k(z) = 0$$

پس $F_k=0$ برای $k\geq 2$, و لذا $F(z) = az$.

□

فرض کنیم $a \in B$ و $P_a : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$ با $p_a z = \frac{<z,a>}{<a,a>}.a$ اگر $a\neq 0$ و $P_0=0$ و $Q_a z= z - p_a z$ و $S_a = (1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌کنیم.

$$\phi_a z = \frac{a-p_a z - s_a Q_a z}{1-<z,a>}.$$

اگر $\Omega = \{z\in \mathbb{C}^n;\ \langle z,a\rangle \neq 1\}$ در ایـن صـورت $\phi_a : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ تمامریخت است چون $a \in B$ و لذا $\Omega \supseteq \overline{B}$ نمادهای P و Q و S را به ترتیب به جای P_a و Q_a و S_a استفاده می‌کنیم.

۱۰.۱. قضیه. برای هر $a\in B$ ، ϕ_a دارای خواص زیر می‌باشد

i)- $\phi_a(0) = a$ و $\phi_a(a) = 0$

ii)- $\phi'_a(0) = -S^2P - SQ$ و $\phi'_a(a) = -\frac{P}{S^2} - \frac{Q}{S}$

iii)- تسـاوی $1-\langle\phi_a z,\phi_a w\rangle = \dfrac{(1-\langle a,a\rangle)(1-\langle z,w\rangle)}{(1-\langle z,a\rangle)(1-\langle a,w\rangle)}$ بـرای هـر $z,w\in\overline{B}$ اتفاق می‌افتد.

iv)- تساوی $1-|\phi_a z|^2 = \dfrac{(1-|a|^2)\,(1-|z|^2)}{(1-\langle z,a\rangle)^2}$ برای هر $z\in\overline{B}$ اتفاق می‌افتد.

v)- ϕ_a یک همریختی از $\overline{B}$ بتوی $\overline{B}$ است و $\phi_a\in \mathrm{Aut}(B)$.

اثبات: i)-روشن است.

برای ii) داریم

$$\begin{aligned}
\phi_a(z) &= \frac{a-Pz-SQz}{1-\langle z,a\rangle}\\
&= (1+\langle z,a\rangle + \langle z,a\rangle^2 + \ldots)\,(a-(P+SQ)\,z)\\
&= \phi_a(0) + \langle z,a\rangle a - (P+SQ)\,z + O(|z|^2)\\
&= \phi_a(0) + |a|^2\,Pz - (P+SQ)\,z + O(|z|^2)\\
&= \phi_a(0) - S^2Pz - SQz + O(|z|^2).
\end{aligned}$$