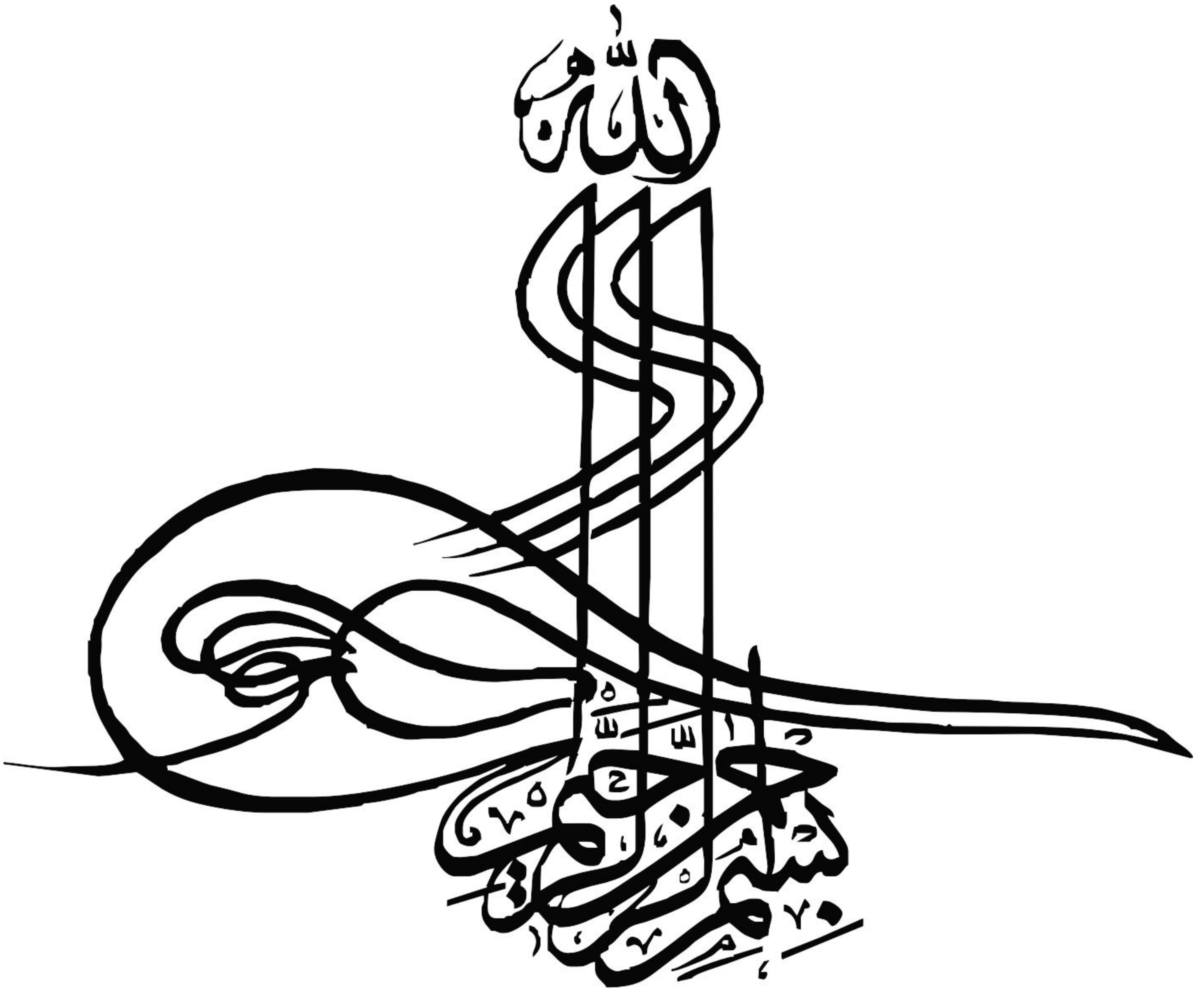
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

(گرایش کاربردی)

عنوان :

تعیین سبد سهام بهینه براساس نظریه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی

از:

فرزانه پیری

استاد راهنما:

دکتر مازیار صلاحی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر. توانشان رفت تا به توانایی برسم. مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه جاویدان زندگی من است.

اسطوره های زندگیم، پناه خستگی ام و امید بودنم :

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

گذراندن مراحل اجرایی و تدوین این پایان نامه پس از الطاف الهی مدیون راهنمایی و همفکری بزرگوارانی است که بی تردید بدون همراهی آنان طی این طریق با مشکلات فراوانی همراه بود، لذا بر خود لازم می‌دانم مراتب سپاس خود را به کلیه کسانی که در مراحل مختلف این پژوهش مرا یاری نمودند، اعلام دارم.

بدین وسیله از خانواده عزیزم که همواره مشوق راه دانشم بوده‌اند و در تمام دوران زندگیم یار و همراه من بوده‌اند، سپاسگزارم.

از استاد فرزانه، صبور و باتقوا؛ جناب آقای دکتر مازیار صلاحی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقایان دکتر سعید کتابچی و دکتر فرشید مهردوست که با کمال لطف، زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و همچنین از جناب آقای دکتر محمدرضا یاقوتی نماینده محترم تحصیلات تکمیلی، بسیار سپاسگزارم.

از دوستان عزیزم خانم‌ها ساناز ابراهیمی، ملیحه بهبودی، الهام صمدی، ناهید درستکار، بهناز زنجانی، الهام حسن پور و همه دوستانی که مرا در این راه یاری کردند، بسیار سپاسگزارم و همواره روزهایی سرشار از موفقیت و سربلندی را برایشان آرزومندم.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

چکیده:

تعیین سبد سهام بهینه براساس نظریه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی

فرزانه پیری

هدف انتخاب سبد سهام، توزیع سرمایه روی یک مجموعه از فرصت‌های سرمایه‌گذاری برای ماکزیمم کردن درآمد در حین مدیریت ریسک است. ریسک و درآمد کمیت‌هایی هستند که به عنوان پارامترهای ورودی مدل‌های پیشنهاد شده برای تخصیص بهینه سرمایه مورد استفاده قرار می‌گیرند. ولی این کمیتها در زمان فرمول‌بندی و حل مسأله به طور دقیق معلوم نیستند و برای حل مسأله باید تخمین زده شوند که این تخمین‌ها ممکن است خطای بزرگی را به همراه داشته باشند.

در این پایان‌نامه، هدف ما بررسی و مقایسه مدل‌های استوار مسائل بهینه‌سازی سبد سهام تحت ریسک تخمین در درآمد میانگین است. برای این منظور، ابتدا تکنیک‌های مختلف محاسبه ریسک را معرفی می‌کنیم و مسائل بهینه‌سازی سبد سهام مربوط به آن‌ها را شرح می‌دهیم .سپس با استفاده از مجموعه‌های عدم قطعیت بازه‌ای و بیضی‌گون برای درآمد میانگین و همچنین استفاده از ارزش در معرض ریسک شرطی برای اندازه‌گیری ریسک تخمین در درآمد میانگین، مدل استوار مسائل بهینه‌سازی سبد سهام را بیان می‌کنیم. همچنین مثال‌های متعددی به منظور تشریح بیشتر مدل‌ها ارائه شده است.

کلید واژه:
بهینه‌سازی سبد سهام، بهینه‌سازی استوار، ارزش در معرض ریسک شرطی، بهینه‌سازی مخروطی

Abstract:

Optimal Portfolio Selection using Value at Risk and Conditional Value at Risk

Farzaneh Piri

In the portfolio selection, the goal is to distribute the capital on a set of investment opportunities to maximize return while managing risk. Risk and return are quantities that are used as input parameters for the optimal allocation of the capital in the suggested models. But these quantities are not known at the time of the formulation and solving problem. Thus they should be estimated to solve the problem which might lead to large error.

In the present thesis, we will study and compare robust models for portfolio optimization problems under the estimation risk in mean return. To do so, first we introduce different risk measures and describe related portfolio optimization problems. Then, using interval and ellipsoidal uncertainty sets for mean return and conditional value at risk to measure the estimation risk in mean return, we present robust models of portfolio optimization problems. Moreover, several examples are presented to further describe models.

Key words:

Portfolio Optimization, Robust Optimization, Conditional Value at Risk, Conic Optimization

پیشگفتار:

امروزه بخش قابل توجهی از دارایی‌های سرمایه‌گذاران در قالب سهام شرکت‌های پذیرفته شده در بورس می‌باشد. ماهیت فعالیت‌های تجاری و سرمایه‌گذاری به گونه‌ای است که کسب بازدهی مستلزم تحمل ریسک است. لذا سرمایه‌گذاران و مدیران مالی مؤسسات همواره علاقمند هستند سود ناشی از سرمایه‌گذاری را حداکثر و ریسک آن را حداقل نمایند. از این رو بهینه‌سازی سبد سهام به عنوان یک امر ضروری در سرمایه‌گذاری نمایان و منجر به خلق مدل‌ها و نظریه‌های زیادی در این زمینه شده است [۱۶]. یکی از معروف‌ترین نظریه‌ها، نظریه انتخاب بهینه سبد سهام ارائه شده توسط هری مارکویتز در سال ۱۹۵۲ است [۱۸]. مدل میانگین-واریانس مارکویتز طی سال‌ها به عنوان چارچوب استاندارد برای مسائل انتخاب سبد سهام بهینه بوده است، هرچند به دلیل ریسک تخمین در پارامترهای غیرقطعی مدل و همچنین در نظر گرفتن واریانس به عنوان ریسک، استفاده از آن محدود شده است.

در این پایان‌نامه با تمرکز روی عدم قطعیت درآمد میانگین، مدل‌های استوار برای مسائل بهینه‌سازی سبد سهام را ارائه خواهیم کرد. برای این هدف، به مفاهیم و قضایای مقدماتی در زمینه‌های جبر خطی، نظریه آمار و مسائل بهینه‌سازی نیاز داریم که در فصل اول به بیان آن‌ها می‌پردازیم. در فصل دوم، مدل میانگین-واریانس مارکویتز را مورد بررسی قرار می‌دهیم و با توجه به اهمیت موضوع، روش‌های دیگری برای محاسبه ریسک معرفی کرده و مدل‌های به دست آمده با استفاده از آن‌ها را ارائه می‌دهیم. در نهایت، با توجه به عدم قطعیت پارامترهای ورودی مسائل مطرح شده و مشکل بودن تخمین دقیق آن‌ها به خصوص تخمین درآمد میانگین، فصل سوم را به بررسی مدل‌های استوار مسائل بهینه‌سازی سبد سهام اختصاص داده و با ارائه مثال‌هایی به تجزیه و تحلیل و مقایسه آن‌ها می‌پردازیم.

فصل ۱

مقدماتی از جبر خطی، بهینه‌سازی و آمار

در این فصل برخی مفاهیم پایه‌ای مربوط به جبر خطی، بهینه‌سازی و آمار را که در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند، بیان می‌کنیم.

۱ - ۱ مقدماتی از جبر خطی

تعریف ۱ - ۱ - ۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ معین مثبت نامیده می‌شود هرگاه برای هر بردار مخالف صفر x داشته باشیم:

$$x^T Ax > 0.$$

ماتریس A نیمه معین مثبت است اگر به ازای هر x داشته باشیم $x^T Ax \geq 0$.

برخی خواص ماتریس‌های معین مثبت

۱. یک ماتریس متقارن A معین مثبت است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت باشند.

۲. یک ماتریس متقارن A معین مثبت است اگر و فقط اگر همه کهادهای اصلی آن مثبت باشند.

۳. اگر $A = (a_{ij})\,, i, j = 1, \ldots, n$ معین مثبت باشد، آنگاه به ازای همه مقادیر i داریم $a_{ii} > 0$.

۴. اگر $A = (a_{ij})\,, i, j = 1, \ldots, n$ معین مثبت باشد، آنگاه بزرگترین عنصر (از لحاظ اندازه) همه ماتریس باید بر روی قطر آن قرار داشته باشد.

۵. یک ماتریس متقارن غالب قطری با عناصر قطری مثبت، معین مثبت است.

۱ - ۱ - ۱ فضاهای نرم‌دار

تعریف ۱ - ۱ - ۲. فرض کنید V یک فضای برداری در $\mathbb{R}$ باشد، در اینصورت تابع $f : V \to \mathbb{R}$ یک نرم در V نامیده می‌شود هرگاه در خواص زیر صدق کند:

۱. $f(\nu) \geq 0$ به ازای هر $\nu \in V$ و همچنین $f(\nu) = 0$ اگر و فقط اگر $\nu = 0$.

۲. $f(\alpha\nu) = |\alpha| f(\nu)$ به ازای هر $\nu \in V$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$.

۳. $f(\nu + \omega) \leq f(\nu) + f(\omega)$ به ازای هر $\nu, \omega \in V$.

هر فضای برداری که دارای نرم باشد فضای نرم‌دار نامیده می‌شود.

۱-۱-۲ نرم‌های برداری

فرض کنید $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ یک بردار n بعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد. آنگاه یک نرم برداری که توسط نماد $\| x \|$ نمایش داده می‌شود، یک تابع پیوسته از x با مقدار حقیقی تعریف شده بر روی $\mathbb{R}^n$ است که دارای خواص زیر است:

۱. $\| x \| > 0$ به ازای هر بردار مخالف صفر x و $\| x \| = 0$ اگر x یک بردار صفر باشد.

۲. $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$ به ازای هر بردار x در $\mathbb{R}^n$ و به ازای همه اسکالرهای α.

۳. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ به ازای هر بردار x و y در $\mathbb{R}^n$.

به سادگی می‌توان نشان داد که توابع زیر نرم‌های برداری هستند.

۱. نرم مجموع یا نرم یک:

$$\| x \|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

۲. نرم اقلیدسی یا نرم دو:

$$\| x \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

۳. نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم:

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

در حالت کلی، اگر $p \geq 1$ آنگاه p-نرم یا نرم هولدر[1] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| x \|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

۱-۱-۳ نرم‌های ماتریسی

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه مشابه نرم برداری یک نرم ماتریسی $\| A \|$ با خواص زیر تعریف می‌شود.

۱. $\| A \| \geq 0$، $\| A \| = 0$ اگر و فقط اگر A یک ماتریس صفر باشد.

۲. $\| \alpha A \| = |\alpha| \, \| A \|$ به ازای هر اسکالر α.

[1] Holder

۳. $\| A+B \| \leq \| A \| + \| B \|$.

با مفروض بودن ماتریس A و یک نرم برداری $\| . \|_p$، یک عدد نامنفی که به صورت زیر تعریف می‌شود در همه خواص یک نرم ماتریسی صدق می‌کند:

$$\| A \|_p = \max_{x \neq ۰} \frac{\| Ax \|_p}{\| x \|_p}.$$

این نرم یک نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری است که به نام p-نرم ماتریس A نیز شهرت دارد.

قضیه ۱-۱-۳. *اگر $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$، آنگاه*

۱. $\| A \|_۱ = \max_{۱ \leq j \leq n} \sum_{i=۱}^{m} |a_{ij}|$*، که نرم مجموع ستونی ماکزیمم نامیده می‌شود.*

۲. $\| A \|_\infty = \max_{۱ \leq i \leq m} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|$*، که نرم مجموع سطری ماکزیمم نامیده می‌شود.*

۳. $\| A \|_۲ = \sqrt{\lambda_{max}\left(A^T A\right)}$*، که در آن $\lambda_{max}\left(A^T A\right)$ برابر با ماکزیمم مقدار ویژه $A^T A$ است و نرم طیفی یا نرم دو نام دارد.*

برهان. رجوع شود به [۱۲]. □

۱-۲ تحدب

تحدب یک مفهوم مهم در ریاضیات و به خصوص در بهینه‌سازی است که برای توصیف برخی توابع و مجموعه‌ها استفاده می‌شود. فرض کنید x و y دو نقطه در $\mathbb{R}^n$ باشند. آنگاه برای هر $\lambda \in [۰,۱]$، نقطه $\lambda x + (۱-\lambda)y$ یک ترکیب محدب از x و y نامیده می‌شود. مجموعه همه ترکیب‌های محدب x و y پاره‌خط متصل‌کننده این دو نقطه است.

تعریف ۱-۲-۱. زیرمجموعه S از $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه محدب نامیده می‌شود هرگاه:

$$\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [۰,۱] \Longrightarrow \lambda x + (۱-\lambda)y \in S.$$

به طور هندسی، مجموعه S محدب است اگر برای هر زوج نقطه x و y در S، پاره‌خط واصل این دو نقطه کاملاً در مجموعه S قرار گیرد.

مثال ۱-۲-۲. مجموعه‌های زیر نمونه‌هایی از مجموعه‌های محدب هستند.

۱. $\{(x_۱, x_۲) : x_۱^۲ + x_۲^۲ \leq ۱\}$.

۲. $\{x : Ax = b\}$، که در آن A یک ماتریس $m \times n$ و b یک m بردار است.

۳. $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$، که در آن A یک ماتریس $m \times n$ و b یک m بردار است.

۴. $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$، که در آن A یک ماتریس $m \times n$ و b یک m بردار است.

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنید S یک مجموعه محدب باشد، تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب نامیده می‌شود هرگاه:

$$\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1] \Longrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \qquad (1-1)$$

این نامساوی می‌تواند چنین تعبیر شود: $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ که در آن $\lambda \in [0,1]$، ارتفاع وتر واصل بین دو نقطه $(x, f(x))$ و $(y, f(y))$ را در نقطه $\lambda x + (1-\lambda)y$ نشان می‌دهد. به دلیل اینکه $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$، پس ارتفاع وتر حداقل به بزرگی ارتفاع خود تابع است. اگر نامساوی (۱-۱) به صورت اکید باشد، آنگاه تابع f یک تابع اکیداً محدب خواهد بود. همچنین تابع f را مقعر می‌نامیم، اگر $-f$ محدب باشد.

۱-۳ مقدماتی از بهینه‌سازی

۱-۳-۱ برنامه‌ریزی خطی

یکی از رایج‌ترین و ساده‌ترین مسائل بهینه‌سازی، مسأله بهینه‌سازی خطی یا برنامه‌ریزی خطی (LP[1]) است که یک تابع هدف خطی را با محدودیت‌های تساوی یا نامساوی خطی بهینه می‌کند. اگر تابع هدف و یا حداقل یکی از محدودیت‌ها خطی نباشد، آنگاه مسأله یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP[2]) است. فرم استاندارد یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \qquad (1-2)$$

[1] Linear Programming [2] Nonlinear Programming

که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $b \in \mathbb{R}^m$ و $c \in \mathbb{R}^n$ معلوم هستند و $x \in \mathbb{R}^n$ متغیر تصمیم است. همچنین دوگان مسأله (۱-۲) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \max_{y,s} \quad & b^T y \\ s.t. \quad & A^T y \le c. \end{aligned} \qquad (۱-۳)$$

روابط متعددی بین این دو مسأله وجود دارد که در ادامه برخی از آن‌ها را بیان می‌کنیم.

لم ۱-۳-۱. *(قضیه ضعیف دوگانی) به ازای هر جواب شدنی مسأله برنامه‌ریزی خطی اولیه (۱-۲)، x، و به ازای هر جواب شدنی مسأله دوگان (۱-۳)، y، همواره داریم:*

$$c^T x \ge b^T y.$$

به ویژه، مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مسأله اولیه، کران بالای تابع هدف بهینه مسأله دوگان است. به طریق مشابه، مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مسأله دوگان، کران پایین مقدار تابع هدف بهینه مسأله اولیه است.

برهان. رجوع شود به [۵]. □

از لم فوق می‌توان نتایج زیر را گرفت:

نتیجه ۱-۳-۲. *اگر $x_\circ$ و $y_\circ$ به ترتیب جواب‌های شدنی مسائل اولیه و دوگان باشند به نحوی که $c^T x_\circ = b^T y_\circ$، آنگاه $x_\circ$ و $y_\circ$ جواب‌های بهینه مسائل نظیرشان هستند.*

نتیجه ۱-۳-۳. *اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان مقدار تابع هدف نامتناهی داشته باشد، آنگاه دیگری جواب شدنی ندارد.*

شرایط بهینگی KKT[۱] می‌گوید شرط لازم و کافی برای این‌که x^* نقطه بهینه مسأله (۱-۲) باشد آن است که y^* وجود داشته باشد به طوری که

۱. $Ax^* = b, x^* \ge \circ$،

۲. $A^T y^* \le c$،

۳. $x_i^* \left(c - A^T y^*\right)_i = \circ, \forall i = ۱, \ldots, n$.

[۱] Karush-Kuhn-Tucker

این منجر به لم زیر می‌شود که به خاصیت دوگان قوی مشهور است.

لم ۱-۳-۴. *اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان جواب بهینه داشته باشد، آنگاه هر دو مسأله جواب بهینه دارند و مقادیر تابع هدف بهینه آن‌ها مساوی است.*

با استفاده از نتایج حاصل شده، قضیه اساسی دوگانی به صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱-۳-۵. *برای مسائل برنامه‌ریزی خطی اولیه و دوگان، دقیقاً یکی از عبارات زیر صحیح است:*

۱. *دو مسأله دارای جواب‌های بهینه x^* و y^* با $c^Tx^* = b^Ty^*$ هستند.*

۲. *یک مسأله مقدار تابع هدف نامتناهی دارد، در حالی که دیگری نشدنی است.*

۳. *هر دو مسأله نشدنی هستند.*

برهان. رجوع شود به [۵]. □

۱-۳-۲ برنامه‌ریزی درجه دوم

یک مسأله بهینه‌سازی کلی‌تر، مسأله بهینه‌سازی درجه دوم یا برنامه‌ریزی درجه دوم (QP[۱]) است که در دسته مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی قرار دارد و در آن تابع هدف یک تابع درجه دو از متغیرها است. این دسته از مسائل نیز همانند مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌توانند در فرم‌های مختلفی بیان شوند. فرم استاندارد QP به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ s.t. \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{۱-۴}$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $b \in \mathbb{R}^m$، $c \in \mathbb{R}^n$ و $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ معلوم هستند و $x \in \mathbb{R}^n$ متغیر تصمیم است. از آنجایی که $x^TQx = \frac{1}{2}x^T(Q+Q^T)x$، بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که Q متقارن است. اگر Q یک ماتریس نیمه معین مثبت باشد، تابع هدف مسأله (۱-۴) یک تابع هدف محدب و در نتیجه مسأله، یک مسأله بهینه‌سازی محدب است. با توجه به نظریه دوگانی لاگرانژ، دوگان این مسأله به صورت زیر به

[۱] Quadratic Programming

دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \max_{x,y,s} \quad & -\frac{1}{2}x^T Qx + b^T y \\ s.t. \quad & -Qx + A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{aligned} \qquad (۱-۵)$$

همچنین شرایط بهینگی KKT برای مسائل QP به صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱-۳-۶. *برای مسأله QP و دوگان آن، x و y و s بهینه هستند اگر و فقط اگر*

۱. $Ax = b, x \geq 0$،

۲. $-Qx + A^T y + s = c, s \geq 0$،

۳. $x^T s = 0$.

برهان. رجوع شود به [۲۵]. □

۱-۳-۳ بهینه‌سازی مخروطی

نوعی دیگر از مسائل بهینه‌سازی، بهینه‌سازی مخروطی (CO[۱]) است که در این بخش به توضیح آن خواهیم پرداخت.

تعریف ۱-۳-۷. مجموعه C یک مخروط است هرگاه:

$$\forall x \in C, \forall \lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \in C.$$

تعریف ۱-۳-۸. مجموعه C یک مخروط محدب است هرگاه مخروط و محدب باشد.

تعریف ۱-۳-۹. مخروط C را نوک‌تیز[۲] گوییم هرگاه هیچ خطی را در بر نداشته باشد و یا به عبارتی دیگر $C \cap (-C) = \{0\}$.

[۱] Conic Optimization [۲] Pointed