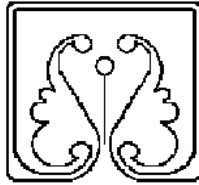


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه گیلان
دانشکده علوم ریاضی

«رساله دکتری ریاضی کاربردی»

عنوان

الگوریتم مونت کارلو نیرومند برای مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته
و کاربرد آن در تحلیل آماری چند متغیره

نگارش

فرشید مهردوست

استاد راهنما

دکتر بهروز فتحی واجارگاه

شهریور 1390

تقدیم به

همسرم برای صبوری و همراهیش

و

پسر عزیزم پویان

تشکر و قدردانی

«من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق»

سپاس پروردگاری را که اگر بندگانش را از شناختن آیین سپاسگزاری بر عطایای پیاپی که برایشان کامل ساخته، محروم می ساخت در نعمت‌هایش تصرف می کردند و سپاس نمی‌گزاردند و در روزیش دست می‌گشودند و شکر نمی‌کردند و اگرچنین می بود از حدود انسانست به مرز بهیمیت می رفتند. پس خداوند را شاکرم که ابتدا و انجام این رساله مرا وامدار عزیزانی کرد که سپاس و قدردانی از ایشان را بر خود لازم می‌دانم.

مراتب قدردانی و تشکر خود را از استاد راهنمای بزرگوام جناب آقای دکتر بهروز فتحی، که از ابتدا تا پایان این رساله، با صبوری و آرامش راهنمایی‌های ارزنده خویش را از من دریغ ننمودند، ابراز می‌دارم. از داوران گرانقدر آقایان دکتر خرم، دکتر کتابچی و دکتر صمیمی که داوری و بازبینی رساله را عهده دار بودند و همچنین از خانواده عزیزم و دوستان گرامی، که در طول دوران تحصیل همواره مشوق و راهنمای من بوده‌اند کمال تشکر و سپاس را دارم.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
چ	فهرست جدول‌ها
ح	فهرست شکل‌ها
خ	چکیده فارسی
د	چکیده انگلیسی
1	پیش‌گفتار
2	فصل اول: پیش‌نیازها و مقدمات
2	1-1 متغیرهای تصادفی
3	2-1 امید ریاضی متغیرهای تصادفی
4	3-1 نامساوی مارکف
4	4-1 نامساوی چبیشف
4	5-1 قانون قوی اعداد بزرگ
4	6-1 قضیه حد مرکزی
5	7-1 فرایندهای تصادفی
5	8-1 فرایند مارکف
6	9-1 فرایند وینر
7	10-1 برآوردیاب
7	11-1 میانگین توان دوم خطا
7	12-1 الگوریتم تصادفی
7	13-1 پیچیدگی محاسباتی الگوریتم تصادفی
7	14-1 مرز بالایی مجانبی یک الگوریتم (نماد O)
8	15-1 الگوریتم تصادفی نیرومند
9	فصل دوم: شبیه‌سازی و روش‌های مونت کارلو
10	1-2 شبیه‌سازی فرایند وینر اصلاح شده و محاسبه انتگرال‌های ایتو و استراتونویچ
13	2-2 انتگرال‌های تصادفی
15	3-2 مزیت‌های روش مونت کارلو
15	4-2 الگوریتم‌های تکراری مونت کارلو
16	5-2 اعداد تصادفی و شبه تصادفی
17	6-2 روش‌های مختلف تولید اعداد تصادفی
17	7-2 مولدهای هم‌نهشتی خطی

- 19 8-2 آزمونهای یکنواختی و استقلال
- 19 9-2 مولدهای اعداد شبه تصادفی
- 20 10-2 دنباله هالتون
- 20 11-2 دنباله سوپول
- 21 12-2 الگوریتم مونت کارلو موازی
- 22 13-2 کارایی الگوریتم مونت کارلو موازی
- 23 14-2 الگوریتم مونت کارلو برای حل انتگرال‌های چندگانه
- 24 15-2 الگوریتم شبه مونت کارلو برای حل انتگرال‌های چندگانه
- 25 16-2 روش‌های کاهش واریانس در شبیه‌سازی مونت کارلو
- 25 17-2 روش متغیرهای کنترلی چندگانه و ساده
- 26 18-2 روش متغیرهای متضاد
- 27 19-2 روش متغیرکنترلی چندگانه نیرومند

30 فصل سوم: روش‌های مونت کارلو در محاسبات ماتریسی

- 31 1-3 الگوریتم‌های تکراری مونت کارلو
- 33 2-3 الگوریتم مونت کارلو برای محاسبه $J(u) = \int_D h(x)u(x)dx = \langle h, u \rangle$
- 34 3-3 الگوریتم مونت کارلو در حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ و تعیین وارون ماتریس

42 فصل چهارم: الگوریتم‌های مونت کارلو در حل مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته

- 43 1-4 مقدارویژه و بردارویژه (زوج ویژه) تعمیم یافته
- 43 2-4 الگوریتم تکراری مونت کارلو وارون
- 45 3-4 الگوریتم مونت کارلو افزایشده
- 46 4-4 روش تهی سازی برای یافتن زوج ویژه‌های بیشتر
- 48 5-4 الگوریتم مونت کارلو ترکیبی برای محاسبه مقدارویژه غالب
- 52 6-4 همگرایی الگوریتم و بررسی خطا
- 54 7-4 نتایج عددی
- 56 8-4 الگوریتم مونت کارلو نیرومند برای یافتن زوج ویژه تعمیم یافته
- 56 9-4 متوازن سازی ماتریس
- 56 10-4 الگوریتم یک طرفه مبتنی بر روش کرلیف
- 59 11-4 الگوریتم مونت کارلو برای محاسبه مقدار ویژه
- 61 12-4 نتایج عددی
- 62 13-4 الگوریتم شبه مونت کارلو برای محاسبه کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه تعمیم یافته
- 62 14-4 الگوریتم شبه مونت کارلو حلال
- 64 15-4 نتایج عددی
- 66 16-4 تخمین عدد شرطی ماتریس با استفاده از الگوریتم شبه مونت کارلو

68	17-4 نتایج عددی
70	18-4 تحلیل پیچیدگی زمانی الگوریتم های مونت کارلو
72	فصل پنجم: روش مونت کارلو نیرومند در تجزیه مولفه های اصلی
73	1-5 مولفه های اصلی
75	2-5 کاهش بعد داده ها با استفاده از روش تجزیه مولفه های اصلی
78	3-5 بازسازی داده های اولیه (اصلی)
79	4-5 فشرده سازی تصویر
80	5-5 رویکرد الگوریتم مونت کارلو در تعیین مقادیر ویژه برای تجزیه مولفه های اصلی
81	6-5 نتایج عددی
82	نتیجه گیری و پیشنهاد
83	مأخذ و مراجع
85	پیوست: پیاده سازی شبه کدها با نرم افزار MATLAB
96	واژه نامه

فهرست جدول‌ها

18	جدول (1-2) اعداد تصادفی تولید شده با مولد مثال 1-2
18	جدول (2-2) اعداد تصادفی تولید شده با مولد مثال 2-2
27	جدول (3-2) مقایسه روش مونت کارلو و روش مونت کارلو بر پایه روش های کاهش واریانس
28	جدول (4-2) مقایسه روش مونت کارلو و روش مونت کارلو بر پایه روش های کاهش واریانس
46	جدول (1-4) محاسبه سه مقدار کوچکترین (تعداد تکرارهای زنجیر مارکوف $N = 80$)
47	جدول (2-4) محاسبه سه مقدار کوچکترین براساس تکرارهای مختلف زنجیر مارکوف
47	جدول (3-4) زمان‌های محاسبه شده برای الگوریتم افرازشده و استاندارد
54	جدول (4-4) مقدار ویژه غالب براساس تعداد مسیرها
55	جدول (5-4) مقدار ویژه غالب تعداد مسیرها
55	جدول (6-4) مقدار ویژه غالب بر اساس تعداد جملات ماتریس حلال
55	جدول (7-4) مقدار ویژه غالب براساس بعد ماتریس
61	جدول (8-4) محاسبه مقدار ویژه غالب براساس تعداد زنجیرها
61	جدول (9-4) محاسبه مقدار ویژه غالب بعد از متوازن سازی و قبل از آن
65	جدول (10-4) محاسبه مقدار ویژه ماکزیمم و مینیمم مثال 1-4
65	جدول (11-4) محاسبه مقدار ویژه ماکزیمم و مینیمم ماتریس‌های مختلف
65	جدول (12-4) محاسبه مقدار ویژه ماکزیمم و مینیمم براساس بعد ماتریس
68	جدول (13-4) محاسبه عدد شرطی ماتریس مثال 2-4
68	جدول (14-4) محاسبه عدد شرطی ماتریس‌های مختلف

فهرست شکل‌ها

- 11 شکل (1-2) شبیه سازی حرکت براونی
- 12 شکل (2-2) شبیه سازی حرکت براونی اصلاح شده
- 12 شکل (3-2) شبیه سازی حرکت براونی اصلاح شده و میانگین آنها
- 21 شکل (4-2) نحوه اجرای دستورات عملی ها در سیستم سری
- 21 شکل (5-2) نحوه اجرای دستورات عملی ها در سیستم موازی
- 28 شکل (6-2) مقایسه روش متضاد و روش نیرومند
- 28 شکل (7-2) مقایسه روش نیرومند و مونت کارلو استاندارد
- 28 شکل (8-2) مقایسه روش متضاد و روش نیرومند
- 28 شکل (9-2) مقایسه روش نیرومند و مونت کارلو استاندارد
- 29 شکل (10-2) مقایسه روش نیرومند و استاندارد
- 47 شکل (1-4) خط رگرسیون برای برازش زمان محاسباتی
- 47 شکل (2-4) مقایسه زمان محاسباتی روش مونت کارلو و مونت کارلو افراز شده
- 55 شکل (3-4) مقایسه روش مونت کارلو و روش QR
- 55 شکل (4-4) خطای نسبی روش مونت کارلو
- 61 شکل (5-4) مقایسه مونت کارلو نیرومند و مونت کارلو استاندارد
- 61 شکل (6-4) مقایسه مونت کارلو نیرومند و مونت کارلو استاندارد
- 66 شکل (7-4) نقاط تولید شده توسط دنباله هالتون
- 66 شکل (8-4) نقاط تولید شده توسط تابع $Rand$
- 66 شکل (9-4) مقایسه خطای نسبی مولدهای مختلف
- 66 شکل (10-4) نقاط تولید شده توسط دنباله سوپول
- 69 شکل (11-4) برازش زمانی بر اساس بعد ماتریس
- 69 شکل (12-4) برازش زمانی بر اساس بعد ماتریس
- 69 شکل (13-4) برازش زمانی بر اساس بعد ماتریس
- 78 شکل (1-5) داده‌های نرمال شده
- 78 شکل (2-5) داده‌های اصلی (ولیه)
- 78 شکل (3-5) داده‌ها در امتداد بردارهای ویژه
- 78 شکل (4-5) داده‌های اصلی و نرمال شده
- 79 شکل (5-5) سه مولفه R, G, B یک تصویر
- 81 شکل (6-5) تصویر اصلی (Size= 249856 bytes)
- 81 شکل (7-5) مولفه فشرده شده (Size= 36864 bytes و $p=100$)
- 81 شکل (8-5) مولفه فشرده شده (Size= 36864 bytes و $p=100$)
- 81 شکل (9-5) تصویر فشرده شده (Size= 36864 bytes و $p=100$)
- 81 شکل (10-5) تصویر فشرده شده (Size= 36864 bytes و $p=100$)



دانشگاه گیلان
دانشکده علوم ریاضی
www.guilan.ac.ir/math

چکیده

الگوریتم مونت کارلو نیرومند برای مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته و کاربرد آن در تحلیل آماری چند متغیره

فرشید مهردوست

یافتن زوج ویژه¹ (مقادیر ویژه - بردار ویژه) مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته یکی از موضوعات مهم و اساسی در علوم و مهندسی می باشد. روش های مختلفی مانند الگوریتم های زیرفضای کرلیف، آرنولدی و لانزوس برای یافتن زوج ویژه تعمیم یافته وجود دارند. الگوریتم های مونت کارلو زنجیر مارکف یکی از روش های جایگزین برای این منظور است. در این رساله تعدادی الگوریتم مونت کارلو برای محاسبه زوج ویژه تعمیم یافته ارائه داده ایم. مثال های عددی متنوع نشان می دهد الگوریتم مونت کارلو نیرومند یک الگوریتم کارا در این زمینه است. در انتها، الگوریتم پیشنهادی را برای تحلیل مولفه های اصلی² و به ویژه در فشردن سازی تصویر به کار برده ایم.

کلید واژه: مونت کارلو نیرومند، زنجیر مارکف، زوج ویژه تعمیم یافته، آمار چند متغیره، تحلیل مولفه های اصلی

¹ Eigenpair

² Principal Component Analysis (PCA)



University of Guilan
Faculty of Mathematical Sciences
www.guilan.ac.ir/math

Abstract

Robust Monte Carlo algorithm for generalized eigenvalue problem and its application in multivariate statistical analysis

Farshid Mehrdoust

Finding eigenpairs¹ of generalized eigenvalue problem is one of important and essential subject in science and engineering. There are several methods (e.g. Krylov subspace and Lanczos methods) for obtaining generalized eigenpairs. The Monte Carlo algorithm is an alternative method for this problem. In this thesis, we present some Monte Carlo algorithm for calculating generalized eigenpairs. Several numerical examples show that the robust Monte Carlo algorithm can be applied as an efficient algorithm in this matter. Finally, the proposed algorithm has been employed for the principal component analysis method and especially in image compression.

Key words: Robust Monte Carlo, Markov Chain, Generalized Eigenpair, Multivariate Statistics, Principal Component Analysis

¹ Eigenvalue-eigenvector

پیش‌گفتار

روش‌های مونت کارلو یک ابزار قدرتمند برای یافتن جواب تقریبی مسایل تصادفی و غیر تصادفی (قطعی) در علوم مختلف محسوب می‌شوند. یافتن مقدار ویژه و بردار ویژه (زوج ویژه) تعمیم یافته یکی از مسائل با اهمیت می‌باشد و دارای کاربردهای فراوانی در علوم مختلف است. هدف اصلی در این رساله، گسترش الگوریتم مونت کارلو زنجیر مارکف و همچنین الگوریتم شبه مونت کارلو زنجیر مارکف در حل مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته و نیز بیان کاربردی آن در تحلیل آماری چند متغیره، به ویژه موضوع فشرده سازی تصویر می باشد. ساختار کلی این رساله به صورت زیر است از آنجایی که دو موضوع فرایندهای تصادفی و الگوریتم‌های تصادفی مونت کارلو موضوعات اصلی این رساله هستند، در فصل نخست برخی نمادگذاری‌ها، مفاهیم اساسی و نیز قضایای مشهور در این زمینه‌ها آورده شده است.

در فصل دوم، به بررسی الگوریتم‌های مونت کارلو در حل انتگرال‌های چندگانه پرداخته و سپس با استفاده از روش‌های کاهش واریانس یک الگوریتم نیرومند (توانمند)، به نام الگوریتم متغیرکنترلی چندگانه نیرومند، برای محاسبه انتگرال‌های چندگانه ارائه شده است.

فصل سوم این رساله در واقع دیباچه‌ای از الگوریتم‌های مونت کارلو زنجیر مارکف در مسائل جبرخطی عددی است که در آن مطالب پیشین درخصوص حل دستگاه معادلات خطی و همچنین یافتن وارون یک ماتریس بیان شده است.

فصل چهارم به مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته و در حقیقت موضوع اساسی این رساله اختصاص دارد. در [3, 26, 28] روش مونت کارلو در مسأله مقدار ویژه معمولی $Ax = Ix$ و برای یافتن بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه ارائه شده بود. در این رساله الگوریتم‌های مونت کارلو زنجیر مارکف و همچنین شبه مونت کارلو زنجیر مارکف، برای حل مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته $Ax = IBx$ توسعه داده شده است.

در این رساله نشان می‌دهیم که، روش‌های مورد نظر می‌توانند برای محاسبه تعداد p - کوچکترین (p - بزرگترین) زوج ویژه تعمیم یافته با یک دقت مناسب به کار روند. همچنین موضوع مهم در این رهگذر ارائه یک الگوریتم ترکیبی است که با ایجاد پیش شرط سازی در ماتریس‌های ورودی باعث کاهش خطای احتمالی (تصادفی) می‌شود. این موضوع توسط روش‌های متوازن سازی ماتریس صورت می‌گیرد و الگوریتم نیرومند (توانمند) زنجیر مارکف مونت کارلو طراحی شده است.

سرانجام در فصل آخر این رساله، روش‌های ارائه شده را در روش تجزیه مولفه‌های اصلی، که یکی از روش‌های مشهور بازسازی و فشرده سازی تصویر می‌باشد، مورد استفاده قرار داده‌ایم. توانمندی الگوریتم‌های مونت کارلو برای یافتن زوج ویژه‌های مورد استفاده در تجزیه مولفه‌های اصلی در مقایسه با الگوریتم‌های مشابه و متداول مانند روش تجزیه مقدار تکین¹ می‌تواند در این بخش مورد توجه باشد.

نتایج نظری و شبه کدهای² بیان شده در هر فصل به وسیله مثال‌های عددی با استفاده از نرم افزار MATLAB بر روی یک سیستم تک پردازنده³ آزمایش شده‌اند و کارایی الگوریتم‌های ارائه شده، به ویژه پیچیدگی زمانی آنها، در مقایسه با روش‌های مشابه تصادفی و غیرتصادفی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند.

مطالب و موضوعات مورد بحث این رساله بالاخص در فصول دوم، چهارم و پنجم در مجلات بین‌المللی ریاضی و علوم کامپیوتر چاپ شده‌اند [6, 11, 15, 16, 18, 20, 27].

¹ Singular value decomposition (SVD)

² Pseudocode

³ Intel(R) , Core(TM)2 CPU, 1.83 GHz

فصل اول

پیش نیازها و مقدمات

مقدمه

در این فصل، قصد داریم مروری کوتاه بر مفاهیم اصلی مطالب مورد نیاز در فصل های آتی این رساله داشته باشیم. بدین ترتیب که تا حد امکان بتوان مطالب فصل های دوم تا پنجم این رساله را با کمترین نیاز به مراجع دیگر به راحتی دنبال کرد. هرچند برای مطالعه عمیق تر در زمینه های فرایندهای تصادفی و روش های مونت کارلو این مراجعه ضروری به نظر می رسد. مراجع [1-4] را ببینید.

1-1 متغیرهای تصادفی

سه تایی (Ω, \mathbf{F}, P) را که در آن Ω یک مجموعه (فضای نمونه ای)، \mathbf{F} یک \mathbf{S} -میدان¹ (فضای پیشامدها) از زیر مجموعه های Ω و P اندازه احتمال روی (Ω, \mathbf{F}) است را یک فضای احتمال گویند. به عبارت دیگر P تابع احتمال از \mathbf{F} به بازه $[0, 1]$ است.

تابع $\mathbf{i} : \Omega \rightarrow X$ با این ویژگی که برای هر مجموعه بورل B از \mathbf{i} داشته باشیم $X^{-1}(B) \in \mathbf{F}$ را یک متغیر تصادفی گوییم.

¹ \mathbf{S} - field

تابع توزیع $F: \mathbb{I} \rightarrow [0,1]$ مربوط به متغیر تصادفی X را به ازای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \in (-\infty, x]\}$$

متغیر تصادفی X را گسسته گویند اگر برد آن حداکثر شمارا باشد. برای متغیرهای تصادفی گسسته داریم

$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} P\{X = t\}$$

برای متغیر تصادفی X ، اگر برای هر $x \in \mathbb{I}$ ، $P(X = x) = 0$ باشد آن گاه X را یک متغیر تصادفی پیوسته گویند. علاوه بر آن X را پیوسته مطلق گویند اگر تابع نامنفی f از \mathbb{I} به \mathbb{I} موجود باشد که برای هر $B \in \mathbf{F}$ ،

$$P(X \in B) = \int_B f(x) dx$$

در این صورت f را تابع چگالی (احتمال) متغیر تصادفی X ، نامند.

برای متغیرهای تصادفی X و Y تابع توزیع توام، $F_{X,Y}$ ، به صورت زیر تعریف می شود

$$F_{X,Y}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

متغیرهای تصادفی X و Y را مستقل گویند اگر به ازای هر x و y داشته باشیم

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

2-1 امید ریاضی متغیر تصادفی

امید یا میانگین متغیر تصادفی X ، که با نماد $E[X]$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx & \text{X پیوسته} \\ \sum_x xP\{X = x\} & \text{X گسسته} \end{cases}$$

واریانس متغیر تصادفی X ، به صورت

$$S_X^2 = \text{var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

تعریف می شود. انحراف معیار را با $S_X = (\text{var}[X])^{\frac{1}{2}}$ نمایش می دهیم.

اگر (X, Y) یک متغیر تصادفی دوبعدی با تابع چگالی احتمال $f(x, y)$ باشد، امید تابع $h(x, y)$ را با نماد $E[h(x, y)]$ نمایش می دهیم و در صورت وجود برابر است با

$$E[h(x, y)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy & \text{(X, Y) پیوسته} \\ \sum_x \sum_y h(x, y) f(x, y) & \text{(X, Y) گسسته} \end{cases}$$

دو متغیر تصادفی X و Y را ناهمبسته گویند، اگر کوواریانس آنها که به صورت زیر تعریف می‌شود صفر باشد.

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

از این مطلب نتیجه می‌شود که متغیرهای مستقل ناهمبسته اند.²

یکی از ویژگی‌های امید ریاضی و واریانس آن است که

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

$$\text{var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{var}[X_i] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \text{cov}(X_i, X_j)$$

3-1 نامساوی مارکف³

اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد، آنگاه برای هر $0 < c < \infty$ و $0 < p < \infty$ داریم

$$P(X \geq c) \leq \frac{E[X^p]}{c^p}$$

4-1 نامساوی چبیشف⁴

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین $m = E[X]$ و انحراف معیار S باشد، در این صورت برای $0 < c < \infty$ داریم

$$P(|X - m| \geq cS) \leq \frac{1}{c^2}$$

5-1 قانون قوی اعداد بزرگ

اگر X_1, X_2, \dots, X_n مستقل و هم‌توزیع با میانگین $m < \infty$ باشند، آنگاه

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = m\right\} = 1$$

اگر قرار دهیم $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ، قانون قوی اعداد بزرگ بیان می‌کند که با احتمال یک، $\frac{S_n}{n}$ به $E[X_i]$ همگراست.

6-1 قضیه حد مرکزی

اگر X_1, X_2, \dots, X_n مستقل و هم‌توزیع با میانگین m و واریانس S^2 باشند، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - nm}{S\sqrt{n}} \leq a\right\} = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

این قضیه بیان می‌کند که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\frac{S_n}{n}$ دارای توزیع مجانبی نرمال استاندارد است.

² توجه داریم که عکس این مطلب لزوماً درست نیست.

³ Markov

⁴ Chebychev

ملاحظه 1-1 فرض کنیم x_1 و x_2 دو عدد دلخواه باشند. براساس قضیه حد مرکزی می توان نوشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ x_1 < \frac{1}{s\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - m) < x_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

قرار می دهیم $x_1 = -x_2 = x$ ، در این صورت داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m) \right| < \frac{x s}{\sqrt{n}} \right\} = \Phi(x)$$

که در آن $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2p}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. برای n بزرگ می توان نوشت

$$\left\{ \left| \bar{X}_N - m \right| < \frac{x s}{\sqrt{n}} \right\} \approx \Phi(x)$$

7-1 فرایندهای تصادفی

یک فرایند تصادفی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است و با $X = \{X(t)\}_{t \in T}$ نمایش می دهیم. یعنی، به ازای هر t در مجموعه اندیس گذار T ، $X(t)$ یک متغیر تصادفی است. اگر مجموعه اندیس گذار T شمارا باشد، X را یک فرایند تصادفی گسسته زمان و اگر T پیوسته باشد آن را پیوسته زمان گوئیم.

در ادامه بحث، به عنوان نمونه دو فرایند مشهور «فرایند مارکف⁵» و «فرایند وینر⁶» را بیان می کنیم.

8-1 فرایند مارکف

گیریم Ω فضای نمونه ای و P یک اندازه احتمال روی آن باشد. فرایند تصادفی $\{X_n\}_{n \geq 0}$ با فضای حالت شمارای E را در نظر بگیرید. یعنی، برای هر $w \in \Omega$ و $n \geq 0$ ، $X_n(w)$ را عضوی از مجموعه شمارای E فرض کنید. اگر $X_n = i$ ، آنگاه گوئیم «فرایند در زمان n در حالت i » است.

فرایند تصادفی $\{X_n\}_{n \geq 0}$ را یک زنجیر مارکف می گوئیم هرگاه برای همه مقادیر $n \geq 0$ و به ازای حالت های $j, i, i_{n-1}, \dots, i_1, i_0 \in E$

$$p(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

این احتمال که آن احتمال تغییر وضعیت از i به j در یک گام گفته می شود، در حالت کلی به n بستگی دارد. زنجیر مارکف را همگن گوئند هرگاه این احتمال به n بستگی نداشته باشد و آن را با p_{ij} نمایش می دهند. برابری بالا بیان می کند که در زنجیر مارکف، توزیع شرطی هر حالت آینده مانند X_{n+1} با معلوم بودن حالت های گذشته X_0, \mathbf{K}, X_{n-1} و حالت فعلی X_n از حالت های گذشته مستقل است و فقط بستگی به حالت فعلی دارد.

⁵ Markov process

⁶ Wiener process

چون احتمال ها نامنفی اند و باید فرایند از حالتی به حالت دیگر تغییر وضعیت دهد، داریم

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1, \quad i \in E$$

ماتریس احتمال های تغییر وضعیت یک مرحله ای زنجیر مارکف همگن را به صورت $P = [p_{ij}]_{i,j=1}^n$ تعریف می کنیم. احتمال تغییر وضعیت n مرحله ای یک زنجیر مارکف همگن را با $p_{ij}^{(n)}$ نمایش می دهیم و برابر احتمال آنکه فرایندی که در حالت i است، پس از n تغییر وضعیت دیگر در حالت j باشد، تعریف می کنیم. یعنی برای هر $m \in \mathbb{N}$

$$p_{ij}^n = p(X_{n+m} = j | X_m = i), \quad n \geq 0, \quad i, j \in E$$

البته $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \geq 0$ در این صورت گوییم زنجیر مارکف بازگشتی مثبت (ارگودیک⁷) است. یک وضعیت i در زنجیر را جاذب گویند، اگر زنجیر در آن وضعیت با احتمال یک متوقف شود. یعنی داشته باشیم $p_{ii} = 1$.

فرایند تصادفی $\{X(t)\}_{t \in T}$ نمونه های مستقل دارد هرگاه به ازای هر n و هر انتخاب $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ در T متغیرهای تصادفی

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

مستقل باشند و گوییم دارای نمونه های ماناست اگر $X(t+s) - X(t)$ برای هر $t \in T$ هم توزیع باشد.

9-1 فرایند وینر

فرایند تصادفی $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{I}}$ با پارامتر σ^2 را فرایند وینر (حرکت براونی⁸) گوییم اگر

$$W(0) = 0 \quad (1)$$

(2) دارای نمونه های مانا و مستقل باشد.

(3) برای $0 \leq s \leq t$ ، $W(t) - W(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2(t-s)$ باشد، به عبارت دیگر

$$W(t) - W(s) : \sigma \sqrt{t-s} N(0,1)$$

این فرایند در زمینه های مختلفی از قبیل آزمونهای آماری نیکویی برازش، تحلیل سطوح قیمت ها در بازار کالاها و مکانیک کوانتم کاربردهای شایان توجه دارد. در فصل بعد یکی از کاربردهای این فرایند را در حل انتگرال های تصادفی خواهیم دید.

⁷ Ergodic

⁸ Brownian motion

10-1 برآوردیاب⁹

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی (متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع) باشد که توزیع آنها به پارامتر مجهول q بستگی دارد. هر تابعی از این نمونه که به پارامتر بستگی نداشته باشد را برآوردیاب q گویند. برای مثال، $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ یک برآوردیاب برای میانگین واقعی m و \bar{x}_n یک مشاهده از برآوردیاب m است.

11-1 میانگین توان دوم خطا¹⁰

فرض کنیم $\hat{t} = q(X_1, X_2, \dots, X_n)$ یک برآوردیاب $t(q)$ باشد. کمیت $E[\hat{t} - t(q)]^2$ ، میانگین توان دوم خطای برآوردیاب $\hat{t} = q(X_1, X_2, \dots, X_n)$ تعریف می شود و آن را با $MSE(\hat{t})$ نمایش می دهیم. می توان نوشت

$$MSE(q) = \text{var}[\Theta] + \{t(q) - E[\Theta]\}^2$$

جمله $t(q) - E[\hat{t}]$ را اریبی برآوردیاب \hat{t} گویند که می تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. اگر جمله $t(q) - E[\hat{t}]$ برابر صفر باشد، برآوردیاب مورد نظر را برآوردیاب ناریب¹¹ گویند. برای مثال، فرض کنیم X_1, X_2, \dots, X_n نمونه ای تصادفی از $N(m, S^2)$ باشد. داریم $E[\bar{X}_n] = m$ ، بنابراین \bar{X}_n یک برآوردیاب ناریب m است.

12-1 الگوریتم تصادفی

به طور کلی یک الگوریتم را تصادفی گویند اگر رفتارش نه تنها با ورودی اش بلکه با مقادیر تولید شده توسط یک مولد عدد تصادفی تعیین شود. بنابراین در این رده از الگوریتم ها مولد تولید اعداد تصادفی نقش اساسی خواهد داشت. از مزیت های الگوریتم تصادفی می توان به سادگی و کارایی آن اشاره نمود.

13-1 پیچیدگی محاسباتی الگوریتم تصادفی

اگر t زمان متوسط یا تعداد اعمال مورد نیاز برای محاسبه یک مقدار از متغیر تصادفی و N تعداد شبیه سازی یا تعداد مشاهدات متغیر تصادفی باشد، پیچیدگی محاسباتی یک الگوریتم تصادفی عبارت است از $C_N = tN$.

14-1 مرز بالایی مجانبی یک الگوریتم (نماد O)

برای تابع پیچیدگی $f(n)$ ، عبارت $O(f(n))$ عبارت است از مجموعه توابع پیچیدگی $g(n)$ که برای آنها یک ثابت حقیقی مثبت c و یک عدد صحیح نامنفی N وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \geq N$ ،

$$g(n) \leq cf(n)$$

در واقع نماد «ای بزرگ» رفتار مجانبی یک تابع را توصیف می کند.

⁹ Estimator¹⁰ Mean square error¹¹ Unbiased estimator

15-1 الگوریتم تصادفی نیرومند¹²

الگوریتم‌ها را می‌توان به دو دسته کلی الگوریتم‌های قطعی¹³ و الگوریتم‌های تصادفی¹⁴ تقسیم نمود. الگوریتم‌های تصادفی مانند الگوریتم‌های مونت کارلو جواب یک مسأله را با استفاده از محاسبه تقریبی امید ریاضی متغیر تصادفی تخمین می‌زنند. به عبارت دیگر، یک الگوریتم تصادفی بر مبنای یک متغیر تصادفی $\Theta^{(k)}$ ، که در آن k بعد مسأله مورد نظر است، طراحی می‌شود. این رده از الگوریتم‌ها را نیرومند (توانمند) گویند، هرگاه با افزایش بعد مسأله، انحراف معیار متغیر تصادفی افزایش نیابد. به عبارت دیگر مقدار مثبتی مانند M وجود داشته باشد که

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{s}\{\Theta^{(k)}\} \leq M$$

¹² Robust¹³ Deterministic¹⁴ Randomized

فصل دوم

شبیه سازی و روش های مونت کارلو

مقدمه

شبیه سازی، تقلیدی از عملکرد فرایند یا سیستم واقعی، با گذشت زمان است. شبیه سازی که معمولاً بر روی کامپیوتر با استفاده از دنباله ای از اعداد تصادفی صورت می گیرد، به ایجاد ساختگی تاریخچه سیستم و بررسی آن به منظور دستیابی به نتیجه گیری هایی در مورد ویژگی های عملکرد سیستم واقعی مربوط می شود. شبیه سازی، زمانی که یک مسأله به روش تحلیلی قابل حل نیست و یا یافتن جواب آن بسیار دشوار است می تواند به کار رود. از آنجایی که شبیه سازی یک تخمین از پارامتر (های) مجهول مسأله مورد نظر را به دست می دهد، همواره دارای خطا خواهد بود. بنابراین کاهش خطا و یا افزایش دقت تخمین پارامتر (ها) یک موضوع اساسی و مهم در این موضوع می باشد. شبیه سازی به طور کلی به دو دسته شبیه سازی تصادفی¹ و شبیه سازی قطعی² تقسیم می شود.

¹ Stochastic simulation

² Deterministic simulation