بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

«رساله دکتری ریاضی کاربردی»

عنوان

الگوریتم مونت کارلو نیرومند برای مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته و کاربرد آن در تحلیل آماری چند متغیره

نگارش

فرشید مهردوست

استاد راهنما

دکتر بهروز فتحی واجارگاه

شهریور 1390

تقدیم به

همسرم برای صبوری و همراهیش

و

پسر عزیزم پویان

تشکرو قدردانی

«من لم یشکرالمخلوق لم یشکرالخالق»

سپاس پروردگاری را که اگر بندگانش را از شناختن آیین سپاسگزاری برعطایای پیاپی که برایشان کامل ساخته، محروم می ساخت در نعمت‌هایش تصرف می کردند و سپاس نمی‌گزاردند و در روزیش دست می‌گشودند و شکر نمی‌کردند و اگرچنین می بود ازحدود انسانست به مرز بهیمیت می رفتند. پس خداوند را شاکرم که ابتدا و انجام این رساله مرا وامدار عزیزانی کرد که سپاس و قدردانی از ایشان را برخود لازم می‌دانم.

مراتب قدردانی و تشکر خود را از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر بهروز فتحی، که از ابتدا تا پایان این رساله، با صبوری و آرامش راهنمایی‌های ارزنده خویش را از من دریغ ننمودند، ابراز می‌دارم.

از داوران گرانقدر آقایان دکتر خرم، دکتر کتابچی و دکتر صمیمی که داوری و بازبینی رساله را عهده دار بودند و همچنین از خانوادهٔ عزیزم و دوستان گرامی، که در طول دوران تحصیل همواره مشوق و راهنمای من بوده‌اندکمال تشکر و سپاس را دارم.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

www.guilan.ac.ir/math

چکیده

الگوریتم مونت کارلو نیرومند برای مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته و کاربرد آن در تحلیل آماری چند متغیره

فرشید مهردوست

یافتن زوج ویژه[1] (مقادیرویژه- بردارویژه) مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته یکی از موضوعات مهم و اساسی در علوم و مهندسی می باشد. روش های مختلفی مانند الگوریتم‌های زیرفضای کریلف، آرنولدی و لانزوس برای یافتن زوج ویژه تعمیم یافته وجود دارند. الگوریتم‌های مونت کارلو زنجیر مارکف یکی ازروش‌های جایگزین برای این منظور است. در این رساله تعدادی الگوریتم مونت کارلو برای محاسبه زوج ویژه تعمیم یافته ارائه داده‌ایم. مثال های عددی متنوع نشان می دهد الگوریتم مونت کارلو نیرومند یک الگوریتم کارا در این زمینه است. در انتها، الگوریتم پیشنهادی را برای تحلیل مولفه های اصلی[2] و به ویژه در فشرده سازی تصویر به کار برده‌ایم.

کلید واژه: مونت کارلو نیرومند، زنجیر مارکف، زوج ویژه تعمیم یافته، آمار چند متغیره، تحلیل مولفه‌های اصلی

[1] Eigenpair
[2] Principal Component Analysis (PCA)

University of Guilan
Faculty of Mathematical Sciences
www.guilan.ac.ir/math

Abstract

Robust Monte Carlo algorithm for generalized eigenvalue problem and its application in multivariate statistical analysis

Farshid Mehrdoust

Finding eigenpairs[1] of generalized eigenvlaue problem is one of important and essential subject in science and engineering. There are several methods (e.g. Krylov subspace and Lanczos methods) for obtaining generalized eigenpairs. The Monte Carlo algorithm is an alternative method for this problem. In this thesis, we present some Monte Carlo algorithm for calculating generalized eigenpairs. Several numerical examples show that the robust Monte Carlo algorithm can be applied as an efficient algorithm in this matter. Finally, the proposed algorithm has been employed for the principal component analysis method and especially in image compression.

Key words: Robust Monte Carlo, Markov Chain, Generalized Eigenpair, Multivariate Statistics, Principal Component Analysis

[1] Eigenvalue-eigenvector

پیش‌گفتار

روش‌های مونت کارلو یک ابزار قدرتمند برای یافتن جواب تقریبی مسایل تصادفی و غیر تصادفی (قطعی) در علوم مختلف محسوب می‌شوند. یافتن مقدار ویژه و بردار ویژه (زوج ویژه) تعمیم یافته یکی از مسائل با اهمیت می‌باشد و دارای کاربردهای فراوانی در علوم مختلف است. هدف اصلی در این رساله، گسترش الگوریتم مونت کارلو زنجیر مارکف و همچنین الگوریتم شبه مونت کارلو زنجیر مارکف در حل مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته و نیز بیان کاربردی آن در تحلیل آماری چند متغیره، به ویژه موضوع فشرده سازی تصویر می باشد. ساختار کلی این رساله به صورت زیر است

از آنجایی‌که دو موضوع فرایندهای تصادفی و الگوریتم‌های تصادفی مونت کارلو موضوعات اصلی این رساله هستند، در فصل نخست برخی نمادگذاری‌ها، مفاهیم اساسی و نیز قضایای مشهور دراین زمینه ها آورده شده است.

در فصل دوم، به بررسی الگوریتم‌های مونت کارلو در حل انتگرال‌های چندگانه پرداخته و سپس با استفاده از روش های کاهش واریانس یک الگوریتم نیرومند (توانمند)، به نام الگوریتم متغیرکنترلی چندگانه نیرومند، برای محاسبه انتگرال‌های چندگانه ارائه شده است.

فصل سوم این رساله در واقع دیباچه‌ای از الگوریتم‌های مونت کارلو زنجیر مارکف در مسائل جبرخطی عددی است که در آن مطالب پیشین درخصوص حل دستگاه معادلات خطی و همچنین یافتن وارون یک ماتریس بیان شده است.

فصل چهارم به مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته و در حقیقت موضوع اساسی این رساله اختصاص دارد. در [3, 26, 28] روش مونت کارلو در مسأله مقدارویژه معمولی $Ax = lx$ و برای یافتن بزرگترین و کوچکترین مقادیرویژه ارائه شده بود. در این رساله الگوریتم‌های مونت کارلو زنجیر مارکف و همچنین شبه مونت کارلو زنجیر مارکف، برای حل مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته $Ax = lBx$ توسیع داده شده است.

در این رساله نشان می دهیم که، روش های مورد نظر می توانند برای محاسبه تعداد p - کوچکترین (p - بزرگترین) زوج ویژه تعمیم یافته با یک دقت مناسب به کار روند. همچنین موضوع مهم در این رهگذر ارائه یک الگوریتم ترکیبی است که با ایجاد پیش شرط سازی در ماتریس های ورودی باعث کاهش خطای احتمالی (تصادفی) می شود. این موضوع توسط روش های متوازن سازی ماتریس صورت می گیرد و الگوریتم نیرومند (توانمند) زنجیر مارکف مونت کارلو طراحی شده است.

سرانجام در فصل آخر این رساله، روش های ارائه شده را در روش تجزیه مولفه‌های اصلی، که یکی از روش‌های مشهور بازسازی و فشرده سازی تصویر می باشد، مورد استفاده قرار داده‌ایم. توانمندی الگوریتم‌های مونت کارلو برای یافتن زوج ویژه های مورد استفاده در تجزیه مولفه های اصلی در مقایسه با الگوریتم های مشابه و متداول مانند روش تجزیه مقدار تکین[1] می تواند در این بخش مورد توجه باشد.

نتایج نظری و شبه کدهای[2] بیان شده در هر فصل به وسیله مثال‌های عددی با استفاده از نرم افزار MATLAB بر روی یک سیستم تک پردازنده[3] آزمایش شده‌اند و کارایی الگوریتم‌های ارائه شده، به ویژه پیچیدگی زمانی آنها، در مقایسه با روش‌های مشابه تصادفی و غیرتصادفی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند.

مطالب و موضوعات مورد بحث این رساله بالاخص در فصول دوم، چهارم و پنجم در مجلات بین المللی ریاضی و علوم کامپیوتر چاپ شده‌اند [6, 11, 15, 16, 18, 20, 27].

---

[1] Singular value decomposition (SVD)
[2] Pseudocode
[3] Intel(R) , Core(TM)2 CPU, 1.83 GHz

فصل اول

پیش نیازها و مقدمات

مقدمه

دراین فصل، قصد داریم مروری کوتاه برمفاهیم اصلی مطالب مورد نیاز در فصل های آتی این رساله داشته باشیم. بدین ترتیب که تا حد امکان بتوان مطالب فصل های دوم تا پنجم این رساله را با کمترین نیاز بـه مراجـع دیگـر بـه راحتـی دنبال کرد. هرچند برای مطالعه عمیق تر در زمینه‌های فراینـدهای تصـادفی و روش هـای مونـت کـارلو ایـن مراجعـه ضروری به نظر می رسد. مراجع [1-4] را ببینید.

1-1 متغیرهای تصادفی

سه تایی $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ را که در آن Ω یک مجموعه (فضای نمونه‌ای)، $\mathbf{F}$ یک s - میدان[1] (فضای پیشامدها) از زیر مجموعه‌های Ω و P اندازه احتمال روی $(\Omega, \mathbf{F})$ است را یک فضای احتمال گویند. به‌عبارت دیگر P تابع احتمال از $\mathbf{F}$ به بازه $[0,1]$ است.

تابع $X : \Omega \to$ ¡ با این ویژگی که برای هر مجموعه بورل B از ¡ داشته باشیم $X^{-1}(B) \in \mathbf{F}$، را یک متغیر تصادفی گوییم.

---

[1] s - field

تابع توزیع $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ مربوط به متغیرتصادفی X را به ازای هرعدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\in(-\infty,x]\}$$

متغیرتصادفی X را گسسته گویند اگر برد آن حداکثر شمارا باشد. برای متغیرهای تصادفی گسسته داریم

$$F_X(x)=\sum_{t\le x}P\{X=t\}$$

برای متغیر تصادفی X، اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$، $P(X=x)=0$ باشد آن‌گاه X را یک متغیر تصادفی پیوسته گویند. علاوه برآن X را پیوسته مطلق گویند اگر تابع نامنفی f از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ موجود باشد که برای هر $B\in\mathbf{F}$،

$$P(X\in B)=\int_B f(x)dx$$

در این‌صورت f را تابع چگالی (احتمال) متغیر تصادفی X، نامند.

برای متغیرهای تصادفی X و Y تابع توزیع توام، $F_{X,Y}$، به صورت زیرتعریف می شود

$$F_{X,Y}(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

متغیرهای تصادفی X و Y را مستقل گویند اگر به ازای هر x و y داشته باشیم

$$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

2-1 امید ریاضی متغیر تصادفی

امید یا میانگین متغیرتصادفی X، که با نماد $E[X]$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xdF_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx & \text{X پیوسته}\\ \sum_x xP\{X=x\} & \text{X گسسته}\end{cases}$$

واریانس متغیرتصادفی X، به صورت

$$\sigma_X^2=\mathrm{var}[X]=E[X-E[X]][Y-E[Y]]=E[X^2]-E[X]^2$$

تعریف می شود. انحراف معیار را با $\sigma_X=(\mathrm{var}[X])^{\frac{1}{2}}$ نمایش می دهیم.

اگر (X,Y) یک متغیر تصادفی دوبعدی با تابع چگالی احتمال $f(x,y)$ باشد، امید تابع $h(x,y)$ را با نماد $E[h(x,y)]$ نمایش می‌دهیم و در صورت وجود برابراست با

$$E\left[h(x,y)\right]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)f(x,y)dxdy & \text{(X,Y) پیوسته}\\ \sum_x\sum_y h(x,y)f(x,y) & \text{(X,Y) گسسته}\end{cases}$$

دو متغیرتصادفی X و Y را ناهمبسته گویند، اگر کوواریانس آنها که به صورت زیر تعریف می‌شود صفر باشد.

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$$

از این مطلب نتیجه می شود که متغیرهای مستقل نا همبسته اند[2].

یکی از ویژگی‌های امید ریاضی و واریانس آن است که

$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i]=\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$\operatorname{var}[\sum_{i=1}^{n} X_i]=\sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}[X_i]+2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \operatorname{cov}(X_i,X_j)$$

1-3 نامساوی مارکف[3]

اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد، آنگاه برای هر $0<c<\infty$ و $0<p<\infty$داریم

$$P(X \geq c)\leq \frac{E[X^p]}{c^p}$$

1-4 نامساوی چبیشف[4]

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین $m=E[X]$ و انحراف معیار s باشد، دراین‌صورت برای $0<c<\infty$ داریم

$$P(|X-m|\geq cs)\leq \frac{1}{c^2}$$

1-5 قانون قوی اعداد بزرگ

اگر $X_1,X_2,...,X_n$ مستقل و هم‌توزیع با میانگین $m<\infty$ باشند، آنگاه

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\mathbf{L}+X_n}{n}=m\right\}=1$$

اگر قرار دهیم $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$، قانون قوی اعداد بزرگ بیان می کند که با احتمال یک، $\frac{S_n}{n}$ به $E[X_i]$ همگراست.

1-6 قضیه حد مرکزی

اگر $X_1,X_2,...,X_n$ مستقل و همتوزیع با میانگین m و واریانس s^2 باشند، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{X_1+X_2+\mathbf{L}+X_n-nm}{s\sqrt{n}}\leq a\}=\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2p}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

این قضیه بیان می کند که وقتی $n\to\infty$، $\frac{S_n}{n}$ دارای توزیع مجانبی نرمال استاندارد است.

---

[2] توجه داریم که عکس این مطلب لزوما درست نیست.

[3] Markov

[4] Chebychev

ملاحظه 1-1 فرض کنیم x_1 و x_2 دو عدد دلخواه باشند. براساس قضیه حد مرکزی می‌توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x_1 < \frac{1}{s\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m) < x_2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

قرار می‌دهیم $x_1 = -x_2 = x$، دراین‌صورت داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right| < \frac{x\,s}{\sqrt{n}}\right\} = \Phi(x)$$

که در آن $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2p}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. برای n بزرگ می توان نوشت

$$\left\{\left|\bar{X}_N - m\right| < \frac{x\,s}{\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi(x)$$

7-1 فرایندهای تصادفی

یک فرایند تصادفی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است و با $X = \{X(t)\}_{t\in T}$ نمایش می دهیم. یعنی، به ازای هر t در مجموعه اندیس گذار T، $X(t)$ یک متغیرتصادفی است. اگر مجموعه اندیس گذار T شمارا باشد، X را یک فرایند تصادفی گسسته زمان و اگر T پیوسته باشد آن را پیوسته زمان گوییم.

در ادامه بحث، به عنوان نمونه دو فرایند مشهور « فرایند مارکف[5] » و « فرایند وینر[6] » را بیان می کنیم.

8-1 فرایند مارکف

گیریم Ω فضای نمونه ای و P یک اندازه احتمال روی آن باشد. فرایند تصادفی $\{X_n\}_{n\geq 0}$ با فضای حالت شمارای E را در نظر بگیرید. یعنی، برای هر $w\in\Omega$ و $n\geq 0$، $X_n(w)$ را عضوی از مجموعه شمارای E فرض کنید. اگر $X_n = i$، آنگاه گوییم « فرایند در زمان n در حالت i » است.

فرایند تصادفی $\{X_n\}_{n\geq 0}$ را یک زنجیر مارکف می گوییم هرگاه برای همه مقادیر $n\geq 0$ و به ازای حالت های $j, i, i_{n-1}, \ldots, i_1, i_0 \in E$،

$$p(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

این احتمال که آن احتمال تغییر وضعیت از i به j در یک گام گفته می‌شود، در حالت کلی به n بستگی دارد. زنجیر مارکف را همگن گویند هرگاه این احتمال به n بستگی نداشته باشد و آن را با p_{ij} نمایش می‌دهند.

برابری بالا بیان می کند که در زنجیر مارکف، توزیع شرطی هر حالت آینده مانند X_{n+1} با معلوم بودن حالت های گذشته $X_0, \mathbf{K}, X_{n-1}$ و حالت فعلی X_n از حالت های گذشته مستقل است و فقط بستگی به حالت فعلی دارد.

---

[5] Markov process
[6] Wiener process

چون احتمال ها نامنفی‌اند و باید فرایند از حالتی به حالت دیگر تغییر وضعیت دهد، داریم

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1, \ i \in E$$

ماتریس احتمال های تغییر وضعیت یک مرحله‌ای زنجیر مارکف همگن را به صورت $P = [p_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ تعریف می‌کنیم. احتمال تغییر وضعیت n مرحله ای یک زنجیر مارکف همگن را با $p_{ij}^{(n)}$ نمایش می دهیم و برابر احتمال آنکه فرایندی که درحالت i است، پس از n تغییر وضعیت دیگر درحالت j باشد، تعریف می کنیم. یعنی برای هر $m \in \mathbb{N}$،

$$p_{ij}^{n} = p(X_{n+m} = j \mid X_m = i), \quad n \geq 0, \quad i, j \in E$$

البته $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. اگر $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} \geq 0$ دراین صورت گوییم زنجیر مارکف بازگشتی مثبت (ارگودیک[7]) است. یک وضعیت i در زنجیر را جاذب گویند، اگر زنجیر در آن وضعیت با احتمال یک متوقف شود. یعنی داشته باشیم $p_{ii} = 1$.

فرایند تصادفی $\{X(t)\}_{t \in T}$ نموهای مستقل دارد هرگاه به ازای هر n و هر انتخاب $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ در T متغیرهای تصادفی

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

مستقل باشند و گوییم دارای نموهای ماناست اگر $X(t+s) - X(t)$ برای هر $t \in T$ هم توزیع باشد.

1-9 فرایند وینر

فرایند تصادفی $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ با پارامتر σ^2 را فرایند وینر(حرکت براونی[8]) گوییم اگر

1) $W(0) = 0$

2) دارای نموهای مانا و مستقل باشد.

3) برای $0 \leq s \leq t$، $W(t) - W(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2(t-s)$ باشد، به عبارت دیگر

$$W(t) - W(s) \sim \sigma\sqrt{t-s}\,N(0,1)$$

این فرایند در زمینه های مختلفی از قبیل آزمونهای آماری نیکویی برازش، تحلیل سطوح قیمت ها در بازار کالاها و مکانیک کوانتم کاربردهای شایان توجه دارد. در فصل بعد یکی از کاربردهای این فرایند را در حل انتگرال های تصادفی خواهیم دید.

---

[7] Ergodic

[8] Brownian motion

1- 10 برآوردیاب[9]

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی (متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع) باشد که توزیع آنها به پارامتر مجهول q بستگی دارد. هر تابعی از این نمونه که به پارامتر بستگی نداشته باشد را برآوردیاب q گویند. برای مثال، $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ یک برآوردیاب برای میانگین واقعی m و $\overline{x}_n$ یک مشاهده از برآوردیاب m است.

11-1 میانگین توان دوم خطا[10]

فرض کنیم $\hat{t} = q(X_1, X_2, ..., X_n)$ یک برآوردیاب $t(q)$ باشد. کمیت $E[\hat{t} - t(q)]^2$، میانگین توان دوم خطای برآوردیاب $\hat{t} = q(X_1, X_2, ..., X_n)$ تعریف می شود وآن را با $MSE(\hat{t})$ نمایش می دهیم. می‌توان نوشت

$$MSE(q) = \mathrm{var}[\Theta] + \{t(q) - E[\Theta]\}^2$$

جمله $t(q) - E[\hat{t}]$ را اریبی برآوردیاب $\hat{t}$ گویند که می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. اگر جمله $t(q) - E[\hat{t}]$ برابر صفر باشد، برآوردیاب مورد نظر را برآوردیاب نااریب[11] گویند. برای مثال، فرض کنیم $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از $N(m, s^2)$ باشد. داریم $E[\overline{X}_n] = m$، بنابراین $\overline{X}_n$ یک برآوردیاب نااریب m است.

12-1 الگوریتم تصادفی

به طور کلی یک الگوریتم را تصادفی گویند اگر رفتارش نه تنها با ورودی اش بلکه با مقادیر تولید شده توسط یک مولد عدد تصادفی تعیین شود. بنابراین در این رده از الگوریتم ها مولد تولید اعداد تصادفی نقش اساسی خواهد داشت. از مزیت های الگوریتم تصادفی می توان به سادگی و کارایی آن اشاره نمود.

13-1 پیچیدگی محاسباتی الگوریتم تصادفی

اگر t زمان متوسط یا تعداد اعمال مورد نیاز برای محاسبه یک مقدار از متغیر تصادفی و N تعداد شبیه سازی یا تعداد مشاهدات متغیر تصادفی باشد، پیچیدگی محاسباتی یک الگوریتم تصادفی عبارت است از $C_N = tN$.

14-1 مرز بالایی مجانبی یک الگوریتم (نماد O)

برای تابع پیچیدگی $f(n)$، $O(f(n))$ عبارت است از مجموعه توابع پیچیدگی $g(n)$ که برای آنها یک ثابت حقیقی مثبت c و یک عدد صحیح نامنفی N وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \geq N$،

$$g(n) \leq cf(n)$$

در واقع نماد «اُی بزرگ» رفتار مجانبی یک تابع را توصیف می کند.

---

[9] Estimator
[10] Mean square error
[11] Unbiased estimator

15-1 الگوریتم تصادفی نیرومند[12]

الگوریتم ها را می توان به دو دسته کلی الگوریتم های قطعی[13] و الگوریتم های تصادفی[14] تقسیم نمود. الگوریتم هـای تصادفی مانند الگوریتم‌های مونت کارلو جواب یک مسأله را با استفاده از محاسبه تقریبی امیـد ریاضـی متغیرتصـادفی تخمین می‌زنند. به‌عبارت دیگر، یک الگوریتم تصادفی بر مبنای یک متغیر تصادفی $\Theta^{(k)}$، که درآن k بعد مسأله مورد نظراست، طراحی می شود. این رده از الگوریتم‌ها را نیرومند (توانمند) گویند، هرگاه با افزایش بعد مسأله، انحراف معیار متغیر تصادفی افزایش نیابد. به‌عبارت دیگر مقدار مثبتی مانند M وجود داشته باشد که

$$\lim_{k\to\infty} s\,\{\Theta^{(k)}\} \le M$$

[12] Robust
[13] Deterministic
[14] Randomized

فصل دوم

شبیه سازی و روش های مونت کارلو

مقدمه

شبیه سازی، تقلیدی از عملکرد فرایند یا سیستم واقعی، با گذشت زمان است. شبیه سازی که معمولاً بر روی کامپیوتر با استفاده از دنباله ای از اعدادتصادفی صورت می گیرد، به ایجاد ساختگی تاریخچه سیستم و بررسی آن به منظور دستیابی به نتیجه گیری‌هایی درمورد ویژگی های عملکرد سیستم واقعی مربوط می‌شود. شبیه سازی، زمانی که یک مسأله به روش تحلیلی قابل حل نیست و یا یافتن جواب آن بسیار دشوار است می تواند به کار رود. از آنجایی که شبیه سازی یک تخمین از پارامتر(های) مجهول مسأله مورد نظر را به دست می دهد، همواره دارای خطا خواهد بود. بنابراین کاهش خطا و یا افزایش دقت تخمین پارامتر(ها) یک موضوع اساسی و مهم در این موضوع می باشد. شبیه سازی به طور کلی به دو دسته شبیه سازی تصادفی[1] و شبیه سازی قطعی[2] تقسیم می شود.

---

[1] Stochastic simulation
[2] Deterministic simulation