دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در ریاضی محض

عنوان

p-قاب ها و قاب ها در فضاهای باناخ

استاد راهنما

دکتر علی اکبر عارفی جمال

استاد مشاور

دکتر طیبه لعل شاطری

پژوهشگر

لیلی محمدخانی

تابستان ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید،

و به پاس محبت های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

قدردانی

به نام خداوندی آغاز می‌کنم که سر آغاز همه آغازها اوست. آسان کننده هر دشواری، زیبا کننده هر خواسته و سرچشمه هر خوبی است. با سپاس به درگاه ایزد لایزال و بی‌همتا که همواره نور امید را در دلم زنده نگه داشت و این قدرت را به من ارزانی داشت تا این مهم به انجام رسد. حال که با فضل و عنایت او موفق به تنظیم و تدوین این پایان نامه شدم، بر خود واجب می‌دانم از تمامی بزرگوارانی که در به فرجام رسانیدن آن از سرچشمه بذل و معرفتشان بهره برده‌ام، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. با این که می‌دانم فراتر از توان بیان من است ولی امیدوارم مراتب امتنان و احترام مرا برساند.

در این جا وظیفه خود می‌دانم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال که با راهنمایی های خود راهگشای اینجانب بوده و با صبر و حوصله فراوان گره از مشکلاتم گشودند، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. هم چنین از سرکار خانم دکتر طیبه لعل شاطری که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل کردند، متشکرم و از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر رجبعلی کامیابی گل و آقای دکتر قدیر صادقی که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند صمیمانه قدردانی می‌کنم. هم چنین لازم می‌دانم که از جناب آقای دکتر محمد جانفدا که چه در دوره ارشد و چه در دوره کارشناسی از اندرزهای علمی ایشان بهره فراوان بردم، سپاس گذاری نمایم.

اکنون که خداوند مرا به اتمام دوره‌ای دیگر از تحصیلاتم توفیق کرامت فرموده، شایسته است که از پدر و مادر عزیزم که سعادت و سرافرازی امروز را مدیون فداکاری ها و زحمات بی‌دریغشان هستم، صمیمانه قدردانی نمایم.

چکیده فارسی

یکی از موضوعات گسترده و عمیق در آنالیز نوین قاب ها هستند که توسط بسیاری مورد بحث و مطالعه قرار گرفتند. قاب ها که در فضای هیلبرت تعمیمی از پایه های متعامد یکه هستند به سرعت توسعه یافتند و کارایی خود را نشان داده‌اند. به عنوان نمونه قاب های موجك و گابور امروزه بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته‌اند. در این پایان نامه قاب ها در فضای باناخ جدایی پذیر X را مطالعه می‌کنیم و p-قاب ها و قاب های عملگری برای فضاهای باناخ را معرفی می‌کنیم که البته هدف خود را بیشتر بر روی p-قاب ها متمرکز کرده و سعی می‌کنیم نتایج به دست آمده در فضاهای هیلبرت را به فضاهای باناخ گسترش دهیم. در نهایت دوگان قاب ها در فضاهای باناخ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای یك قاب در فضای هیلبرت، عملگر قاب نقش بسزایی در یافتن دوگان آن دارد، اما عملگر قاب برای p-قاب ها در فضای باناخ وجود ندارد لذا علاقه مند به معرفی دوگان آن ها بدون استفاده از این عملگر هستیم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

قاب ها برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین [۱] و شفر [۲] ارائه شدند. بعدها یونگ[۳] کتابی کامل و دقیق را در زمینه قاب ها منتشر کرد. نظریه قاب ها در پردازش سیگنال ها، پردازش تصاویر، آنالیز داده ها و بسیاری از شاخه های علوم به کار می‌روند. در این پایان نامه قصد داریم قاب ها را در فضایی خارج از فضای هیلبرت بررسی کنیم. در سال ۱۹۹۰ گروچنگ[۴]، الدروبی[۵]، سان[۶] و تانگ[۷] مطالعه قاب ها را برای فضای باناخ شروع کردند، آن ها دو مفهوم قاب برای فضای باناخ ارائه دادند: p-قاب ها $(1 < p < \infty)$ و قاب های باناخ. در این جا با p-قاب ها و قاب های عملگری برای فضای باناخ آشنا می‌شویم، نشان داده می‌شود که قاب ها، g-قاب ها، قاب های عملگری برای فضای هیلبرت و X_d-قاب ها حالت خاصی از قاب

[۱] Duffin

[۲] Schaeffer

[۳] Young

[۴] Grochenig

[۵] Aldroubi

[۶] Sung

[۷] Tang

های عملگری هستند، بنابراین مفهوم قاب های عملگری برای فضاهای باناخ تقریبا تعمیم تمام مفاهیم این قاب ها است. این پایان نامه شامل سه فصل است، در فصل اول برخی مفاهیم مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم و به صورت اجمالی به بیان قاب ها در فضای هیلبرت و هم چنین خواص فضاهای باناخ می‌پردازیم.
در فصل دوم ابتدا p-قاب ها را معرفی می‌کنیم و به بررسی خواص آن ها در فضای باناخ جدایی پذیر X می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که می‌توان عناصر X و X^* را به صورت ترکیب خطی اعضای یك p-قاب تجزیه کرد. سپس پایه q-ریس را تعریف کرده و تحت نتیجه ای نشان می‌دهیم هر پایه q-ریس یك p-قاب است، اما عکس آن برقرار نیست و برای آن به یك شرط اضافی احتیاج داریم. در ادامه به معرفی قاب دیگری از قاب های باناخ به نام قاب عملگری می‌پردازیم و ضمن ارائه قضایای اساسی و چند مثال به ارتباط بین یك قاب عملگری مستقل و پایه ریس عملگری خواهیم پرداخت.
در فصل سوم به معرفی قاب های دوگان در فضای باناخ می‌پردازیم که شامل سه بخش است. در بخش اول دوگان p-قاب را تعریف می‌کنیم و تحت یك قضیه با دوگان پایه q-ریس آشنا می‌شویم. اما یك p-قاب در حالت کلی دارای دوگان نیست، در بخش بعدی شرایطی را برای یك p-قاب بیان می‌کنیم که تحت این شرایط دوگان p-قاب را به دست می‌آوریم. به ویژه نشان می‌دهیم با استفاده از آشفتگی برای p-قاب ها نیز می‌توان دوگان آن ها را تقریب زد. در پایان نیز دوگان قاب های عملگری و قاب های عملگری باناخ را معرفی کرده و ویژگی های آن ها را بررسی می‌کنیم.
این پایان نامه بر گرفته از مقالات زیر است:

1) *Arefijamal, A. A. and Mohammadkhani, L., On the dual of p−frames, submitted.*

2) *Christensen, O. and Lougesen, R. S., Approximately dual frames in Hilbert spaces and applications to Gabor frames, Sample. Theory Signal Image Process.* 9, *No.* 13 (2010) 77 − 89.

3) *Christensen, O. and Stoeva, D. T., p − frames in Separable Banach spaces. Adv.*

Comput. Math. Appl. 18 (2003) 117 − 126.

4) *Casazza, P. G., Christensen, O. and Stoeva, D. T., Frame expansions in separable Banach spaces. J. Math. Anal.*, 301 (2005) 710 − 723.

5) *Chun, Y. L., Operator frames for Banach spaces, to appear in Complex Analysis and Operator theory.*

فصل ۱

مقدمات و پیش نیاز ها

در این فصل ضمن یادآوری تعاریف و مفاهیمی از آنالیز حقیقی به مقدماتی درباره فضای هیلبرت، عملگرها و قاب ها روی فضای هیلبرت و هم چنین فضای باناخ می‌پردازیم و به قضایای مورد نیاز فصل های بعدی اشاره می‌کنیم. برای بحث های تکمیلی خواننده می‌تواند به منابع [۳]، [۸] و [۱۷] مراجعه کند.

۱.۱ فضاهای هیلبرت

در این بخش ضمن معرفی فضاهای هیلبرت برخی از ویژگی های آن ها را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۱. یك فضای برداری عبارت است از یك گروه آبلی جمعی مانند $(X, +)$ به همراه ضرب اسکالر از میدان $\mathbb{F}$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C})$ به توی X مانند $\mathbb{F} \times X \longrightarrow X$: **.** با ضابطه $(a,\ x) \longmapsto ax$ که برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و هر $x, y \in X$ دارای شرایط زیر باشد

۱) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$،

۲) $1x = x$،

۳) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، تابع $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0,\ \infty)$ یك نرم روی X است هرگاه در شرایط زیر صدق کند

۱) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$،

۲) $\forall\alpha \in \mathbb{F},\ \forall x \in X, \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

۳) $\forall x,\ y \in X, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

اگر $\|\cdot\|$ یك نرم روی X باشد، آن گاه $(X,\ \|\cdot\|)$ یك فضای نرم دار است.

توجه کنید که تابع نرم پیوسته است.

تعریف ۳.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد. یک ضرب داخلی روی $\mathcal{H}$ عبارت است از تابع $\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ به قسمی که به ازای هر $x, y, z \in \mathcal{H}$ و اسکالر های $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

۱) $\langle x, x \rangle \geq 0$،

۲) $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$،

۳) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$،

۴) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha\langle x, z \rangle + \beta\langle y, z \rangle$.

فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای ضرب داخلی باشد، در این صورت با تعریف $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$ فضای $\mathcal{H}$ به یک فضای نرم دار تبدیل می‌شود.

تعریف ۴.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای ضرب داخلی باشد، اگر $\mathcal{H}$ با نرم حاصل از ضرب داخلی، یعنی $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$ فضای کامل باشد (به این معنی که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد) آن را یک فضای هیلبرت [۱] می‌نامیم.

تعریف ۵.۱. اگر برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle x, y\rangle = 0$، گوییم x بر y عمود است و می‌نویسیم $x \perp y$.

تعریف ۶.۱. فرض کنید $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی x_n ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$span\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sum_{i=1}^{k} c_{n_i}x_{n_i}:\ k, n_i \in \mathbb{N},\ c_{n_i} \in \mathbb{C}\ \}.$$

تعریف ۷.۱. دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ کامل [۲] است، هرگاه $span\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $\mathcal{H}$ چگال[۳] باشد.

قضیه ۸.۱. فرض کنید $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن گاه شرایط زیر معادل اند:

۱) دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ کامل است.

۲) اگر $x \in \mathcal{H}$ و برای هر $k \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $\langle x, x_k\rangle = 0$ آن گاه $x = 0$.

اثبات. برای اثبات صفحه ۳۸ مرجع [۸] را ببینید. □

تعریف ۹.۱. فرض کنید M زیر مجموعه ای از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، $M^{\perp}$ فضای مکمل متعامد [۴] M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

[۱] Hilbert space

[۲] Complete

[۳] Dense

[۴] Orthogonal complement

$$M^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in M\}.$$

همواره $M^{\perp}$ یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است.

قضیه ۱۰.۱. فرض کنید Mیک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن گاه هر $x \in \mathcal{H}$ تجزیه منحصر به فردی مانند $x = x_1 + x_2$ دارد که $x_1 \in M$، $x_2 \in M^{\perp}$، به عبارت دیگر $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$.

اثبات. برای اثبات صفحه ۱۷۳ مرجع [۱۳] را ببینید. □

در قضیه فوق x_1 و x_2 به ترتیب نزدیک ترین نقاط به x در M و$M^{\perp}$ هستند. به ویژه $\| x \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2$. هم چنین نگاشت $P : \mathcal{H} \longrightarrow M$ که $x \longmapsto x_1$ را تصویر متعامد[۵] روی $\mathcal{H}$ روی M گوییم.

تعریف ۱۱.۱. دنباله $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ از بردارها در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را پایه متعامد یکه [۶] گوییم هرگاه کامل بوده و

$$\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}.$$

نشان داده می‌شود که هر فضای هیلبرت دارای يك پایه متعامد یکه است و کاردینال تمام پایه های متعامد یکه آن نیز یکسان هستند.

در ادامه عملگرهای روی فضاهای هیلبرت را یادآوری نموده و فرض می‌کنیم $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت باشند، مگر آن که خلاف آن ذکر شود، هم چنین مجموعه تمام عملگرهای خطی و کران دار از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ نشان می‌دهیم و $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ را به صورت $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ می‌نویسیم.

فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$، مجموعه های $R(T) = \{T(x) : x \in \mathcal{H}\}$ و $N(T) = \{x \in \mathcal{H} : T(x) = 0\}$

[۵] Orthogonal projection

[۶] Orthonormal basis

را به ترتیب برد [۷] و فضای پوچ [۸] عملگر T می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید $T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{K}$ یک عملگر خطی و کران دار باشد، آن گاه برای T عملگر یکتایی چون $T^*:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,\quad \forall x\in\mathcal{H},\forall y\in\mathcal{K}.$$

T^* را عملگر الحاقی [۹] T می‌نامیم.

قضیه ۱۳.۱. اگر $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ و برای هر $x\in\mathcal{H}$ داشته باشیم، $\langle Tx,x\rangle=0$، آن گاه $T=0$.

اثبات. برای اثبات صفحه ۳۱۰ مرجع [۱۷] را ببینید. $\square$

قضیه ۱۴.۱. هر گاه S و T دو عملگر خطی و کران دار روی $\mathcal{H}$ باشند، آن گاه

۱) $\parallel T\parallel=\parallel T^*\parallel$.

۲) $\parallel T\parallel^2=\parallel TT^*\parallel$.

۳) $(T+S)^*=T^*+S^*$.

۴) $\forall\alpha\in\mathbb{C},\ (\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$.

۵) $(TS)^*=S^*T^*$.

۶) $(T^*)^*=T$.

---

[۷] Range

[۸] Null space

[۹] Adjoint operator

اثبات. برای اثبات صفحه ۳۱۱ مرجع [۱۷] را ببنید. □

قضیه ۱۵.۱. هرگاه $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ آن گاه

$$(N(T^*))^{\perp} = \overline{R(T)}, \quad \overline{N(T)} = (R(T^*))^{\perp}.$$

اثبات. برای اثبات صفحه ۳۱۲ مرجع [۱۷] راببینید. □

بنابراین T پوشا است اگر وتنها اگر T^* یک به یک باشد.

تعریف ۱۶.۱. عملگر خطی و کران دار T روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$،

۱) خودالحاقی[۱۰] است، هرگاه $T = T^*$.

۲) عملگر T معکوس پذیر است، هرگاه دوسویی باشد. معکوس T را با T^{-1} نشان می‌دهیم.

۳) عملگر T را مثبت [۱۱] می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ و می‌نویسیم، $T \geq 0$.

۴) فرض کنید S یك عملگر خطی و کران دار روی $\mathcal{H}$ باشد، در این صورت گوییم $S \leq T$ است هرگاه $S - T \geq 0$.

توجه کنید که اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ معکوس پذیر باشد، آن گاه $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ و به علاوه برای هر $x \in \mathcal{H}$،

$$\| T^{-1} \|^{-1} \| x \| \leq \| Tx \| \leq \| T \| \| x \| . \tag{۱.۱}$$

[۱۰] Self-adjoint

[۱۱] Positive

۲.۱ قاب ها در فضای هیلبرت

در این بخش به معرفی قاب ها [۱۲] در یك فضای هیلبرت جدایی پذیر و دوگان آن ها می‌پردازیم. هم چنین به اختصار چند نمونه از آشفتگی قاب ها در چنین فضاهایی را بررسی می‌کنیم .

تعریف ۱.۱۷. دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت جدایی پذیر $\mathcal{H}$ [۱۳] را یک قاب (گسسته) می‌نامیم، هرگاه ثابت های مثبت A و B وجود داشته باشند به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

A و B را کران های قاب می‌نامیم. اگر $A = B$ آن گاه قاب را چسبان [۱۴] و در حالتی که $A = 1$ و $B = 1$ قاب را چسبان نرمال [۱۵] می‌نامیم.

دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$ را دنباله بسل [۱۶] گوییم هرگاه حداقل شرط بالای نامساوی قاب برقرار باشد و B را کران بسل برای $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌گوییم.

تعریف ۱.۱۸. فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک دنباله قاب [۱۷] نامیم هرگاه $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\overline{span}\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشد.

تعریف ۱.۱۹. در تعریف قاب، بزرگترین مقدار برای A و کوچکترین مقدار برای B که در شرط های نامساوی

[۱۲] Frame

[۱۳] Separable

[۱۴] Tight frame

[۱۵] Normal tight frame

[۱۶] Bessel sequence

[۱۷] Frame sequence

قاب صدق می‌کند را کران های بهینه [۱۸] قاب می‌نامیم.

بسیاری از خواص یك قاب توسط عملگری بیان می‌شود که متناظر با آن روی فضای هیلبرت تعریف می‌شود، این عملگر را عملگر قاب می‌نامیم.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب در فضای هیلبرت جدایی پذیر $\mathcal{H}$ باشد، عملگر قاب [۱۹] عبارت است از عملگرخطی $S:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$Sf=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle f_i,\quad \forall f\in\mathcal{H}.$$

قضیه ۲۱.۱. فرض کنید$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب S و کران های A و B باشد آن گاه S عملگری کران دار، معکوس پذیر، خودالحاقی و مثبت است. به علاوه

$$AI\leq S\leq BI.$$

اثبات. برای اثبات صفحه ۱۰۰ مرجع [۸] راببینید. □

تعریف ۲۲.۱. برای قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، عملگر T باضابطه

$$T:\ell^2(\mathbb{N})\longrightarrow\mathcal{H},\qquad T\{c_i\}_{i=1}^{\infty}=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i,$$

عملگر پیش قاب [۲۰] نامیده می‌شود و عملگر الحاقی آن به صورت زیر است،

$$T^*:\mathcal{H}\longrightarrow\ell^2(\mathbb{N}),\qquad T^*(f)=\{\langle f,f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty},$$

که عملگر تجزیه [۲۱] گفته می‌شود.

[۱۸] Optimal bounds

[۱۹] Frame operator

[۲۰] Pre-frame operator

[۲۱] Analysis operator

به سادگی نشان داده می‌شود که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad Sf = TT^*f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i.$$

عملگر پیش قاب T همواره معکوس پذیر نیست.

همان گونه که در فصل های آتی خواهیم دید برای p-قاب ها عملگر قاب در حالت کلی تعریف نمی‌شود. از این رو ناگذیریم ویژگی های p-قاب ها را تنها بر اساس عملگر پیش قاب بازگو کنیم. از این منظر خواهیم دید که خواص آشنای یك قاب در فضای هیلبرت بر حسب عملگر پیش قاب نیز ممکن است.

قضیه ۲۳.۱. هرگاه $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب S و کران های A و B باشد، آن گاه $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب S^{-1} و کران های A^{-1} و B^{-1} است.

اثبات. برای اثبات صفحه ۱۰۱ مرجع [۸] رابببینید. $\square$

لم ۲۴.۱. هرگاه A و B کران های بهینه قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشند، آن گاه A^{-1} و B^{-1} کران های بهینه قاب $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ هستند.

اثبات. برای اثبات صفحه ۱۰۰ مرجع [۸] رابببینید. $\square$

قضیه ۲۵.۱. فرض کنید S عملگر قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشد، آن گاه برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_i \rangle f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle S^{-1} f_i.$$

اثبات. برای اثبات صفحه ۱۰۲ مرجع [۸] رابببینید. $\square$

قضیه ۲۶.۱. فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با عملگر پیش قاب T و عملگر قاب S باشد، آن گاه کران های بهینه قاب عبارت اند از:

$$A = \|S^{-1}\|^{-1}, \qquad B = \|S\| = \|T\|^2.$$

اثبات. برای اثبات صفحه ۱۱۱ مرجع [۸] راببینید. □

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. هم چنین اگر $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ نیز یک دنباله بسل برای $\mathcal{H}$ باشد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i \rangle f_i,$$

آن گاه $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ را دوگان $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌نامیم.

توجه کنید که دوگان دارای خاصیت تقارنی است.

لم ۲۸.۱. فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دو دنباله بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ بوده و دوگان هم باشند. آن گاه اگر یکی از دو دنباله قاب باشد دیگری نیز قاب است.

اثبات. با توجه به تعریف دوگان واضح است. □

با توجه به قضیه ۲۵.۱و تعریف ۲۷.۱ دنباله $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ يك قاب دوگان برای قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ خواهد بود که آن را دوگان کانونی[۲۲] $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ نامیم.

قضیه زیر دوگان کانونی را بر حسب عملگر پیش قاب توصیف می‌کند.

قضیه ۲۹.۱. فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ يك قاب در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با عملگر پیش قاب T باشد. آن گاه دوگان کانونی $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ به صورت $\{\Phi\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ است که $\Phi : \ell^2 \longrightarrow \mathcal{H}$ توسیع $(T^*)^{-1}$ به تمام ℓ^2 بوده و $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه یکه متعامد کانونی ℓ^2 است.

---

[۲۲] Canonical dual frame

اثبات. اگر عملگر قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ را با S نشان دهیم، آن گاه

$$S^{-1}f_i = S^{-1}T\delta_i = S^{-1}TT^*\Phi\delta_i.$$

برای عکس قضیه فرض کنید Φ عملگر ترکیب دوگان کانونی $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشد، آن گاه برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم،

$$\Phi T^*f = \Phi\{\langle f, f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty}\langle f, f_i\rangle S^{-1}f_i = f.$$

□

تعریف ۳۰.۱. قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ را دقیق [۲۳] نامیم، هرگاه با حذف هر کدام از اعضای آن، عناصر موجود تشکیل قاب ندهند.

تعریف ۳۱.۱. فرض کنید $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ یك عملگر کران دار و دوسویی باشد، تصویر هر پایه متعامد یکه تحت U را یك پایه ریس [۲۴] برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ گوییم.

فرض کنید $\mathcal{H}$ یك فضای هیلبرت جدایی پذیر با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ باشد. قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ برای $\mathcal{H}$ را در نظر بگیرید، حداقل یك قاب دوگان $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که

$$f = \sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\ f_i\rangle g_i, \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{۲.۱}$$

در حقیقت $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} = \{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ که آن را دوگان کانونی نامیدیم، تساوی (۲.۱) که فرمول بازسازی [۲۵] نیز خوانده می‌شود یکی از مهمترین ابزارها در کاربرد قاب هاست. متاسفانه در حالت ساده دوگان کانونی نیز با معکوس یك عملگر کران دار روی یك فضای هیلبرت نامتناهی البعد مواجه هستیم که این معکوس به

[۲۳] Exact frame

[۲۴] Riesz basis

[۲۵] Reconstruction