دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

عنوان:

میانگین پذیری تقریباً ضعیف جبرهای باناخ

از:

محمَد نوری

استاد راهنما:

دکتر عباس سهله

اسفند ۹۰

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

خداوند متعال را سپاس می گویم که به این بنده ی کمترین توفیق تحصیل عنایت فرمود.

از پدر و مادرم که همواره و در طول دوران تحصیل مشوق و یاورم بودند و همچنین از برادران و دو خواهر عزیزم که همواره پشتیبانم بودند قدردانی می کنم.

از استاد راهنمایم ، جناب آقای دکتر عباس سهله بخاطر درس هایی که در این دو سال از ایشان آموختم تشکر می کنم.

از اساتید داور محترم، جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری و جناب آقای دکتر حسین سهله که قبول زحمت فرمودند و عهده دار داوری این پایان نامه شدند، سپاس گزارم.

از دوست گرانقدرم دکتر عباس زیوری که در طول دوران ارشدم و همچنین در انجام این پایان نامه صمیمانه همراهیم کردند نهایت سپاس و تشکر را دارم.

از دو دوست گرامیم آقایان رضا گنج بخش و امین خسروی بخاطر کمک هایشان در دوران ارشد قدردانی می کنم.

از دو دوست عزیزم آقایان صابر صالح پور و علی خانعلی که در کار تایپ این پایان نامه بسیار کمک کردند صمیمانه تشکر می کنم.

و در نهایت از سرکار خانم مرضیه هویه کار که در این دوران اخیر همواره مشوقم بودند و جزوات مناسب دانشگاه تبریز را برایم تهیه می نمودند و ارایه نمایشی(powerpoint) این پایان نامه را نیز آماده نمودند صمیمانه سپاسگزارم.

برای همه ی این عزیزان سلامتی و موفقیت را از خداوند منان خواستارم.

فهرست مطالب

فصل سوّم. میانگین پذیری تقریباً ضعیف جبرهای باناخ

چکیده

میانگین پذیری تقریباً ضعیف جبر های باناخ

محمد نوری

در این پایان نامه مفهوم جدیدی از میانگین پذیری تقریبی جبرهای باناخ را معرفی می‌کنیم. برای هر $n\in\mathbb{N}$ جبر باناخ A را، $n-$ میانگین پذیر تقریباً ضعیف می نامیم ، هرگاه هر مشتق پیوسته از A به توی $n-$امین مدول دوگان $A^{(n)}$ ، تقریباً درونی باشد.

سپس رابطه بین $n-$میانگین پذیری تقریباً ضعیف و $m-$میانگین پذیری تقریباً ضعیف را برای $n,m\in\mathbb{N}$ متمایز بررسی می کنیم.

کلید واژه: جبرهای باناخ، میانگین پذیری، میانگین پذیری تقریباً ضعیف، $n-$ میانگین پذیری تقریباً ضعیف، مشتق.

Abstract

Approximately Weak amenability of Banach algebras
Mohammad Nouri

In this dissertation we introduce a new sense of approximate amenability for a Banach algebra A. A Banach algebra A is $n-$approximately weakly amenable, for $n \in N$, if every continuous derivation from A into the $n-th$ dual space $A^{(n)}$ is approximately inner. we also investigate the relation between $n-$approximately weak amenability and $m-$approximately weak amenability for distinct $n, m \in \mathbb{N}$.

Keywords: Banach algebras, Amenability, Approximately Weak Amenability, $n-$ Approximately Weak Amenability, derivation.

مقدمه

در سال ۱۹٤۰ میانگین پذیری به عنوان یک مفهوم مهم در آنالیز هارمونیک و به ویژه در نیم‌گروه های نیم توپولوژیک معرفی شد. در سال ۱۹۷۲، جانسون[۱] رابطه میانگین پذیری گروه موضعاً فشرده G را با میانگین پذیری جبر گروهی $L^1(G)$ به دست آورد و بدین ترتیب میانگین پذیری جبر های باناخ مطرح شد [۱٤].

جبر باناخ A را میانگین پذیر می نامیم هرگاه برای A–مدول باناخ X، هر مشتق کراندار از A به توی X'، درونی باشد. مفهوم میانگین پذیری ضعیف اولین بار برای جبر های باناخ جابجایی توسط باد[۲] و همکارانش در سال ۱۹۸۷ مطرح شد و توسط جانسون برای جبر های باناخ دلخواه مورد مطالعه قرار گرفت. سپس در سال ۱۹۹۸ دیلز[۳]، قهرمانی[٤] و گرونبک[٥] مفهوم n– میانگین پذیری ضعیف را معرفی‌کردند که در واقع یک تعمیم از میانگین پذیری ضعیف می باشد [٤].

سپس مفهوم میانگین پذیری تقریباً ضعیف برای جبرهای باناخ توسط قهرمانی و لوی[٦] در سال ۲۰۰٤ معرفی شد. همچنین مفهوم میانگین پذیری تقریباً ضعیف به n–میانگین پذیری تقریباً ضعیف گسترش یافت.

این پایان نامه به صورت زیر تدوین شده است:

در فصل اوّل تعاریف و قضایایی که در فصل های بعدی مورد نیاز است را بیان می‌کنیم.

در فصل دوّم میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ را مطالعه و بررسی می‌کنیم.

---
[۱] Johnson
[۲] Bade
[۳] Dales
[٤] Ghahramani
[٥] Gronbaek
[٦] Loy

در فصل سوّم میانگین پذیری تقریباً ضعیف و $n-$ میانگین پذیری تقریباً ضعیف جبرهای باناخ را که تعمیمی از فصل دوّم می باشند مورد مطالعه و تحقیق قرار می دهیم.

فصل ۱

تعاریف و مقدّمات لازم

۱-۱مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایایی که در طول این پایان نامه به آنها نیازمندیم را بیان می‌کنیم.

در سرتاسر این پایان نامه همه فضاهای برداری و جبرها روی میدان مختلط درنظر گرفته شده، مگر خلاف آن تصریح شود. اکثر مطالب این فصل از مراجع [۲]، [۳] و [۱۷]گرفته شده است که در صورت لزوم در پایان هر نتیجه، مراجع دیگر ذکر می شود.

۱-۲ مدولهای باناخ

تعریف ۱-۲-۱ فرض‌کنید $\mathbb{F}$ یک میدان (مانند $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. هر عضوی از $\mathbb{F}$ را یک اسکالر می نامیم. یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ عبارتست از یک مجموعه X، که عناصرش بردار نامیده می شوند و در آن دو عمل جمع و ضرب اسکالر با خواص جبری زیر تعریف می شوند:

الف) به هر زوج از بردارهای y,x، یک بردار $x+y$ متناظر می شود به طوری‌که

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \ \ , \ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta y$$

X شامل یک بردار یکتای $\circ$ (بردار صفر یا مبدا) می باشد به طوری‌که برای هر $x\in X$، $x+\circ=\circ$
و به هر $x\in X$، یک بردار یکتای $-x$ متناظر می شود به طوری‌که، $x+(-x)=\circ$.

ب) به هر زوج (α,x) که $\alpha\in\mathbb{F}$ و $x\in X$، بردار αx متناظر می شود به طوری‌که

$$1x = x \quad , \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

و دو قانون توزیع پذیری

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \ \ , \ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$

برقرار است.

تعریف ۱-۲-۲ زیر مجموعه‌ی M از فضای برداری V را یک زیر فضای V نامیم اگر M نسبت به جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در V خود یک فضای برداری باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ی $M \subset V$ یک زیر فضا باشد این است که هرگاه $x, y \in M$ و α اسکالر باشد، $x+y \in M$ و $\alpha x \in M$.

تعریف ۱-۲-۳ یک تبدیل خطی از فضای برداری V به توی فضای برداری V_1 نگاشتی است مانند Λ از V به توی V_1 به طوری که به ازای هر x, y در V و اسکالر های α, β،

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda x + \beta\Lambda y.$$

در حالت خاص که V_1 میدان اسکالرها است، Λ یک تابعک خطی نام دارد.

تعریف ۱-۲-٤ فضای برداری X را یک فضای خطی نرمدار گوییم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\| x \|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

۱) به ازای هر x, y در X، $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$،

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\| \alpha x \| = |\alpha| \cdot \| x \|$،

۳) $\|x\| = \circ$ تساوی $x = \circ$ را ایجاب می کند.

تعریف ۱-۲-۵ یک نیم نرم بر فضای X تابعی است حقیقی مانند P بر X به طوری که به ازای هر x و y در X و تمام اسکالرهای α

۱) $P(x+y)\le P(x)+P(y)$ ،

۲) $P(\alpha x)=|\alpha|P(x)$.

تعریف ۱-۲-٦ فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. زیر مجموعه E از X را کراندار نامیم، هرگاه $M>0$ وجود داشته باشد به طوری که برای تمام $x\in X$ ، $\|x\|\le M$.

تعریف ۱-۲-۷ فضای باناخ، یک فضای نرمدار است که نسبت به متر تعریف شده به وسیله نرم-اش تام می باشد.

تعریف ۱-۲-۸ اگر $(X,\|.\|_1)$ و $(Y,\|.\|_2)$ دو فضای نرمدار روی یک میدان اسکالر باشند و $\mathrm{T}:X\to Y$ یک نگاشت خطی باشد، در این صورت T را کراندار گوییم هرگاه $M\rangle 0$ موجود باشد به طوری که برای هر x در X،

$$\|\mathrm{T}x\|_2\le M\|x\|_1.$$

تعریف ۱-۲-۹ فضای برداری A را یک جبر می نامیم هرگاه نگاشت

$$\pi:A\times A\to A,\quad (a,b)\mapsto \pi(a,b)=ab$$

برای هر $a,b,c\in A$ و برای هر $\alpha\in\mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند

۱. $a(bc)=(ab)c$ ،

۲. $(a+b)c=ac+bc,\ \ a(b+c)=ab+ac$ ،

۳. $(\alpha a)b=\alpha(ab)=a(\alpha b)$.

نگاشت $(a,b) \mapsto ab$ را ضرب در A می نامیم و بردار ab، ضرب a و b نامیده می شود. A را یک جبر جابجایی گوییم هرگاه برای هر a و b در A، $ab = ba$.

تعریف۱-۲-۱۰ عنصر e از جبر A یک عنصر همانی یا یکّه است، اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$

$$ea = ae = a.$$

یک جبر حداکثر دارای یک عنصر همانی است، زیرا اگر e و e' عناصر همانی باشند، در این صورت

$$e' = ee' = e.$$

تعریف ۱-۲-۱۱ یک جبر نرمدار عبارتست از جفت $(A, \|.\|)$ که در آن A یک جبر و $\|.\|$ یک نرم روی A است با این خاصیت که برای هر b, a در A،

$$\| ab \| \le \| a \| \| b \|.$$

به این نرم، یک نرم جبری گوییم. هرگاه نرم روی A مشخص شده باشد، به اختصار به جای "جبرنرمدار $(A, \|.\|)$" می نویسیم، "جبر نرمدار A ".

تعریف ۱-۲-۱۲ جبر نرمدار $(A, \|.\|)$ را یک جبر نرمدار یکّه می نامیم هرگاه A دارای عنصر همانی e باشد و $\|e\| = 1$.

تعریف ۱-۲-۱۳ یک جبر باناخ عبارتست از جبر نرمدار $(A, \|.\|)$ به طوری که فضای برداری نرمدار A با نرم $\|.\|$ کامل باشد.

تعریف ۱-۲-۱٤ زیرفضای I از جبر A را یک ایده آل چپ (راست) می نامیم، اگر

$$AI \subseteq I, \ (IA \subseteq I).$$

تعریف ۱-۲-۱۵ فضای همه تابعکهای خطی پیوسته روی فضای باناخ X را فضای دوگان X می نامیم و با X' نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$X' = \{ f : X \to \mathbb{C} : \text{پیوسته و خطی است } f \}.$$

X' با نرم یکنواخت $\| f \| = \sup\{\| f(x) \|, \ \| x \| \le 1\}, \ (f \in A')$ به یک فضای باناخ تبدیل می شود. فضای دوگان دوم X، یعنی X'' و دوگان های بالاتر به طور مشابه قابل تعریف می باشند.

قرارداد ۱-۲-۱۶ در تمامی فصل ها نماد $< f, x >$ به معنی اثر تابع f روی x می باشد.

تعریف ۱-۲-۱۷ برای فضای باناخ X، نگاشت $\kappa : X \to X''$ را نگاشت طبیعی روی X می نامیم و تصویر هر عنصر از X مانند x را در X'' با $\hat{x}$ نشان می دهیم. در واقع

$$\langle \kappa(x), f \rangle = \langle \hat{x}, f \rangle = \langle f, x \rangle, \qquad (x \in X, f \in X').$$

فضای باناخ X را انعکاسی می نامیم هرگاه نگاشت طبیعی k، پوشا باشد.

تعریف ۱-۲-۱۸ فضای برداری X روی جبر A را یک مدول چپ می نامیم هرگاه نگاشت

$$A \times X \to X; \ (a, x) \mapsto a.x$$

برای هر $a, b \in A$، $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند.

۱) برای هر $a \in A$، نگاشت $x \to ax$ روی X خطی باشد،

۲) برای هر $x \in X$ نگاشت $a \to ax$ روی A خطی باشد،

۳) به ازای هر $a_1, a_2 \in A$ و هر $x \in X$

$$a_1(a_2 x) = (a_1 a_2)x.$$

نگاشت $(a,x)\to ax$ یک ضرب مدولی نامیده می شود.

$A-$ مدول راست به طور مشابه تعریف می شود.

فضای برداری X را یک $A-$ مدول می نامیم هرگاه X ، یک $A-$ مدول چپ و راست باشد و

$$a\left(xb\right)=\left(ax\right)b,\qquad \left(a,b\in A, x\in X\right).$$

تعریف۱-۲-۱۹ فرض کنید A یک جبر نرمدار و X یک فضای خطی نرمدار باشد. X را یک $A-$ مدول چپ نرمدار نامیم هرگاه X یک $A-$ مدول چپ باشد و همچنین ثابت $k>0$ موجود باشد به طوری که

$$\| ax \| \le k \| a \| \cdot \| x \|,\qquad \left(a\in A, x\in X\right).$$

بطور مشابه $A-$ مدول راست نرمدار نیز تعریف می شود. همچنین یک $A-$ مدول نرمدار یک $A-$ مدول است که هم $A-$ مدول چپ نرمدار و هم $A-$ مدول راست نرمدار می باشد.

تعریف ۱-۲-۲۰ یک $A-$ مدول چپ نرمدار را $A-$ مدول چپ باناخ می نامیم هرگاه نسبت به نرم فضای خطی اش کامل باشد.

تعریف ۱-۲-۲۱ فرض کنید X و Y دو $A-$ مدول چپ باناخ باشند و فرض کنید $\theta: X\to Y$ یک نگاشت خطی و پیوسته باشد. آنگاه θ را یک مورفیسم $A-$ مدولی چپ باناخ می نامیم اگر برای هر $a\in A$ و هر $x\in X$ داشته باشیم

$$\theta\left(a\cdot x\right)=a\cdot\theta(x).$$

مورفیسم A -مدولی راست و مورفیسم A -مدولی به طور مشابه تعریف می شوند.

تعریف ۱-۲-۲۲ فرض کنید X یک A -مدول باناخ باشد. آنگاه X' تحت اعمال

$$A\times X'\to X',\ (a,f)\to a\cdot f$$

و

$$X'\times A\to X',\ (f,a)\to f\cdot a$$

یک $A-$ مدول باناخ است که در آن

$$\langle a\cdot f,x\rangle=\langle f,x\cdot a\rangle,\ \ \langle f\cdot a,x\rangle=\langle f,a\cdot x\rangle.$$

به طور مشابه X'' ، X''' و ... نیز A – مدول باناخ می باشند. در حالت خاص A' و A'' را به ترتیب مدول دوگان و مدول دوگان دوم روی جبر باناخ A می نامیم.

تعریف ۱-۲-۲۳ فرض کنید X یک فضای باناخ و Y زیر فضای آن باشد. در این صورت

$$Y^{\perp}=\{f\in X':<f,x>=0,\ \ (x\in Y)\}$$

را پوچساز Y می نامیم. اگر Y زیر فضای بسته از X باشد، آنگاه بنابه قضیه ۹-۴ از [۱۷]، $X=Y'+Y^{\perp}$. به ویژه برای هر جبر باناخ A ، $X=Y'+Y^{\perp}A^{(n+2)}=A^{(n)}\oplus(A^{(n-1)})^{\perp},(n\geq1)$.

تعریف ۱-۲-۲۴ تور $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ در جبر باناخ A یک همانی تقریبی چپ (راست) برای A نامیده می شود اگر برای هر $a\in A$ ،

$$e_\lambda a\to a,\ \ (ae_\lambda\to a).$$

تور $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ در جبر باناخ A را یک همانی تقریبی (دوطرفه) می نامیم، هرگاه $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ همانی تقریبی چپ و راست باشد.

تور $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ را کراندار می نامیم هرگاه مجموعه $\{e_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ یک مجموعه کراندار در A باشد.

تعریف ۱-۲-۲۵ همانی تقریبی چپ کراندار یک همانی تقریبی چپ می باشد که همچنین یک تور کراندار نیز می باشد.

تعریف ۱-۲-۲۶ تور $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ را یک همانی تقریبی چپ ضعیف برای جبر باناخ A می نامیم اگر برای هر $f\in A'$ ،

$$f(e_\lambda a)\to f(a), \qquad (a\in A).$$

همانی تقریبی راست ضعیف و همانی تقریبی ضعیف به طور مشابه تعریف می شوند.

گزاره ۱-۲-۲۷ فرض کنید A یک جبر باناخ با یک همانی تقریبی چپ ضعیف کراندار باشد. آنگاه A دارای همانی تقریبی چپ کراندار است.

اثبات: رجوع شود به [۲].

تعریف ۱-۲-۲۸ جبر باناخ A را یک جبر باناخ دوگان می نامیم هرگاه زیرمدول بسته E از مدول دوگان A' موجود باشد به طوری که $E'=A$. در این صورت E را پیش دوگان A می نامیم.

تعریف ۱-۲-۲۹ فرض کنید X یک فضای باناخ و $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک تور در X باشد. در این صورت گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در توپولوژی ضعیف به x همگراست هرگاه برای هر $f\in X'$ ،

$$\langle f,x_\alpha\rangle\to\langle f,x\rangle.$$

تعریف ۱-۲-۳۰ فرض کنید X یک فضای باناخ و $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک تور در X' باشد. در این صورت گوییم تور $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ در توپولوژی ضعیف- ستاره به f همگراست هرگاه برای هر $x\in X$ ،

$$\langle f_\alpha,x\rangle\to\langle f,x\rangle.$$

تعریف ۱-۲-۳۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و X' دوگان X مجهز به توپولوژی ضعیف-ستاره باشد. در این صورت نگاشت $F:X'\to X'$ را پیوسته می نامیم هرگاه برای هر تور $\left(f_\alpha\right)_{\alpha\in I}$ در X'، از همگرایی $\left(f_\alpha\right)_{\alpha\in I}$ به f در توپولوژی ضعیف- ستاره، عبارت زیردر توپولوژی ضعیف-ستاره نتیجه شود

$$\langle F,f_\alpha\rangle\to\langle F,f\rangle.$$

قضیه ۱-۲-۳۲ (گلداشتاین) فضای باناخ X در X'' نسبت به توپولوژی ضعیف- ستاره چگال است.

اثبات: رجوع شود به [۳].

قضیه ۱-۲-۳۳ (باناخ- آلاغلو) برای هر فضای نرمدار X، مجموعه

$$k=\{f\in X': f\le 1\}$$

در X'، نسبت به توپولوژی ضعیف- ستاره فشرده است.

اثبات: رجوع شود به [٤].

قضیه۱-۲-۳٤ (هان-باناخ) فرض کنید M یک زیرفضا از فضای برداری X و p یک نیم نرم روی X باشد. اگر f یک تابعک خطی روی M باشد که

$$|f(x)|\le p(x),\quad (x\in M)$$

آنگاه f به یک تابعک خطی مانند F روی X قابل گسترش است به طوری که

$$|F(x)|\le p(x),\ \ (x\in X).$$

اثبات: رجوع شود به [۵].

نتیجه ۱-۲-۳۵ (هان-باناخ) فرض کنیم M یک زیر فضای خطی از فضای خطی نرمدار X باشد و $x_\circ \in X$. در این صورت $x_\circ \notin \bar{M}$ اگر و تنها اگر یک تابعک خطی کراندار مانند f بر X موجود باشد که به ازای هر $x \in M$، $f(x)=\circ$ ولی $f(x_\circ) \neq \circ$.

تعریف ۱-۲-۳۶ فرض کنید X یک فضای برداری و $E \subseteq X$ باشد. در این صورت کوچکترین مجموعه محدب در X شامل مجموعه E را غلاف محدب E می نامیم و با $convex\,hull\ E$ و یا $co\,E$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۲-۳۷ یک فضای برداری توپولوژیک (TVS)، عبارتست از یک فضای برداری X همراه با یک توپولوژی به طوری که نسبت به این توپولوژی

الف) هر مجموعه تک عضوی بسته است.

ب) نگاشت $X \times X \to X$ با تعریف $(x,y) \mapsto x+y$ پیوسته است.

ج) نگاشت $\mathbb{F} \times X \to X$ با تعریف $(\alpha,x) \mapsto \alpha x$ پیوسته است.

تعریف ۱-۲-۳۸ (X,τ) را فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب گویند هرگاه صفر دارای یک پایه موضعی باشد که اعضای آن محدب باشد.

قضیه ۱-۲-۳۹ فرض کنیم B,A دو مجموعه مجزا، ناتهی و محدب در یک فضای برداری توپولوژیک X باشند.

الف) اگر A باز باشد، آنگاه $\Lambda \in X'$ و $\gamma \in \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که

$$\operatorname{Re}\Lambda x < \gamma < \operatorname{Re}\Lambda y$$

برای هر $x \in A$ و $y \in B$.