بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

نامساوی گراس برای نگاشت‌های کاملاً کراندار

نگارش :

مرضیه شفیعی

استاد راهنما:

دکتر امیر قاسم غضنفری

استاد مشاور:

دکتر بهمن غضنفری

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی

اسفند ماه ۱۳۸۶

بسمه تعالی

دانشگاه لرستان

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورتجلسه ی ارزشیابی پایان نامه ی کارشناسی ارشد

جلسه ی دفاع ازپایان نامه ی کارشناسی ارشد خانم **مرضیه شفیعی**

تحت عنوان :

نامساوی گراس برای نگاشتهای کاملا کراندار

درتاریخ هشتم اسفند ماه یکهزاروسیصدوهشتادوشش (۱۳۸۶/۱۲/۸) دردانشکده علوم پایه دانشگاه لرستان ارائه گردید و هیئت داوران براساس کیفیت پایان نامه ، استماع دفاعیه ونحوه ی پاسخ به سوال ها ، پایان نامه ایشان رابرای دریافت درجه ی کارشناسی ارشد دررشته ریاضی-آنالیز معادل با ۶ واحد بانمره ی (به حروف)......بیست.............................. (به عدد)......۲۰.........وبادرجه ی ..عالی.................موردتایید قرارداد.

هیات داوران		مرتبه علمی	امضاء
۱ – استاد راهنما :	دکترامیرقاسم غضنفری	استادیار	
۲– استاد مشاور :	دکتربهمن غضنفری	استادیار	
۳– استادمدعو:	دکترحجت اله سامع	استادیار	
۴– استادمدعو :	سیداحمدآهوقلندری	دانشور	
۵– نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده :	دکتربهمن غضنفری	استادیار	

سیداحمدآهوقلندری
مدیر گروه ریاضی

دکترعلیرضا غیاثوند
رئیس دانشکده علوم پایه

دکترناصراکبری
مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه

اداره تحصیلات تکمیلی
«دانشگاه لرستان»

۱۳۸۸ /۳/ ۱۰

یک

تقدیم به:

روح پاک پدرم

و

مهر بی پایان مادرم

قدردانی

حمد و سپاس ایزد منان را که بر من منت نهاد و توفیق انجام این پژوهش را عطا فرمود.

الهی دانایی ده که در راه نمانم، بینایی ده که در چاه نیفتم، بگشای دری که در گشاینده تویی، بنمای رهی که ره نماینده تویی. من دست به هیچ دستگیری ندهم، کاشیان همه فانی‌اند و پاینده تویی.

به رسم ادب، از همه بزرگوارانی که انجام این پروژه بدون راهنمایی، همکاری و مساعدت صمیمانه ایشان امکان پذیر نبود، کمال تقدیر و تشکر را به جا می آورم.

از زحمات استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر امیرقاسم غضنفری که از هیچ کمک و مساعدتی نسبت به من دریغ ننمودند بی‌نهایت سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر بهمن غضنفری، استاد مشاور، به خاطر راهنمایی‌های بی‌دریغ و خالصانه‌اشان سپاسگزاری می‌کنم.

از جناب آقای دکتر حجت اله سامع و دکتر احمد آهوقلندری که داوری این پروژه را به عهده داشته‌اند و زحمت مطالعه این پایان نامه را تقبل نمودند سپاسگزارم.

از همه اساتید بزرگواری که حضورشان باعث دلگرمی من در این مسیر علمی بود ممنون و سپاسگزارم و خویش را وام‌دار آنان می‌دانم که طی این این سالها از محضر درسشان بهره‌مند شدم و اکنون و در آینده فروتنانه خویش را شاگرد کوچک آنان می‌دانم.

همچنین از همه دوستان عزیزم که مرا در طی این سالها همراهی کردند و نقش آفرین زیباترین خاطرات زندگی‌ام بودند تشکر و قدردانی می‌کنم.

با احترام

مرضیه شفیعی

فهرست مندرجات

چکیده

نام خانوادگی : شفیعی	نام : مرضیه
عنوان پایان‌نامه : نامساوی گراس برای نگاشت های کاملاً کراندار	
استاد راهنما: دکتر امیر قاسم غضنفری	استاد مشاور : دکتربهمن غضنفری
درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد	رشتهٔ : ریاضی محض گرایش آنالیز
محل تحصیل : دانشگاه لرستان	دانشکده : علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی : اسفند ماه ۱۳۸٦	تعداد صفحه: ۱۴۷

کلیدواژه ها: نامساوی گراس، C^*– جبر، نگاشت‌های کاملاً کراندار، نگاشت‌های کاملاً مثبت، برد عددی تعمیم یافته، q–برد عددی، q–شعاع عددی

چکیده: در این رساله، ابتدا اطلاعات پایه‌ای و مفیدی دربارهٔ نگاشت‌های مثبت، نگاشت‌های کاملاً مثبت و نگاشت‌های کاملاً کراندار روی C^*– جبرها گردآوری و تالیف شده است. همچنین برد عددی نگاشت‌های خطی، برد عددی یک عضو از جبرهای باناخ و برد عددی تعمیم یافته یعنی q– برد عددی نیز مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. سپس با تجزیه و تحلیل دقیق مقالهٔ

Rajic. R., I. Peric, *Gruss inequality for completely bounded maps*, Linear Algebra and its Application 390, (2004): 287-292.

یک نامساوی برای نگاشت های کاملاً کراندار تعریف شده روی C^*– جبرهای یکانی، را با تفصیل و بیان جزئیات آن، ذکر می‌کنیم. این نامساوی در حقیقت تعمیم نامساوی گراس و یک نامساوی اثر است که توسط *P.F.Renaud* برای عملگرهای کراندار تعریف شده روی فضاهای هیلبرت، اثبات شده است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و قضایایی می‌باشد که در فصل‌های بعدی این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ فضای ضرب داخلی و فضای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱ . فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، یک نیم نرم یا شبه نرم[۱] روی X نگاشت ρ از X به $\mathbb{R}$ است، به طوری که برای تمام $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{F}$ شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\rho(x) \geq 0$

ب) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$

ج) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

نیم نرمی که واجد شرط زیر باشد را نرم[۲] گوییم.

---

[۱] Seminorm
[۲] Norm

د) $\rho(x) = \circ \Leftrightarrow x = \circ$

تعریف ۲.۱.۱ . نرم جبری (نیم نرم جبری) روی $\mathcal{A}$ نرم (نیم نرم) ρ روی $\mathcal{A}$ است، به طوری که زیر ضربی باشد. به بیان دیگر:

ه) $\rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y)$

نرم را با $\|.\|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ . فضای نرم دار X فضایی خطی می باشد که یک نرم روی آن تعریف شده است. فضای نرم دار کامل یا **باناخ**[۳] فضایی است که هر دنباله کشی در آن همگراست.

تعریف ۴.۱.۱ . برای فضاهای خطی و نرم دار Y, X یک یکریختی خطی و طولپا(یکریختی خطی یکمتری) از X به روی Y نگاشت خطی و دوسویی T از X به Y است، به طوری که برای هر $x \in X$ ، $\|Tx\| = \|x\|$.

نماد گذاری. فرض کنید X, Y فضاهایی خطی و نرم دار روی میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند. $L(X,Y)$ را فضای همه نگاشت‌های خطی از X به Y در نظر می‌گیریم. زیر فضای خطی $L(X,Y)$ که شامل همه نگاشت‌های خطی کراندار (پیوسته) از X به Y است را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

به طورمعمول $B(X,Y)$ به عنوان یک فضای خطی نرم دار با نرم زیر معرفی می‌شود.

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq ۱\} \qquad (۱.۱)$$

---

[۳] Banach

$B(X,\mathbb{F})$ از X با X^* نشان داده می‌شود. به آن فضای دوگان X گفته می‌شود. عناصرش تابعک‌های خطی و پیوسته نامیده می‌شوند. $B(X)$ را به جای $B(X,X)$ بکار می‌بریم.

می‌دانیم که $B(X,Y)$ کامل است وقتی که Y کامل باشد. به ویژه فضای دوگان X^* از X همیشه کامل است.

تعریف ۵.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک **ضرب داخلی**[۴] روی X، تابعی است مانند $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \to \mathbb{F}$ به طوری که برای هر $a,b\in\mathbb{F}$ و $x,y,z\in X$ داشته باشیم:

الف) $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$

ب) $\langle x,ay+bz\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle + \overline{b}\langle x,z\rangle$

پ) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

ت) $\langle x,x\rangle \geq 0$

ث) $\langle x,x\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x=0$

$\langle x,y\rangle$ را ضرب داخلی x و y نامیم. تابع ضرب داخلی $\langle x,y\rangle$ نسبت به متغیر x خطی و نسبت به متغیر y خطی — مزدوج است، یعنی به ازای هر $x,y,z\in X$ و هر $\alpha\in\mathbb{F}$ داریم:

$$\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$$

$$\langle x,\alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle$$

تعریف ۶.۱.۱ . فضای برداری X همراه با یک ضرب داخلی تعریف شده روی آن را **فضای ضرب داخلی** می‌گوییم.

---

[۴] Inner product

با استفاده از ضرب داخلی نرمی به صورت زیر روی فضا تعریف می‌شود:

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (۲.۱)$$

تذکر ۱.۱.۱ . ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle$ یک تابع پیوسته روی $X \times X$ تعریف می‌کند، زیرا اگر (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی در X باشند، که $x_n \to x \in X$ و $y_n \to y \in X$، آنگاه با استفاده از نامساوی شوارتز و نامساوی مثلثی و این که دنبالهٔ $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ کراندار می‌باشد، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\le |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\le \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|\end{aligned}$$

و پیوستگی ضرب داخلی از آن نتیجه می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱ . یک فضای ضرب داخلی X را یک **فضای هیلبرت**[۵] نامیم، هرگاه X نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، باناخ (کامل) باشد. یک فضای هیلبرت را به طور معمول با $\mathcal{H}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۱.۱ . $\mathbb{R}^n$ یک فضای هیلبرت است.

مثال ۲.۱.۱ . $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی

$$\langle x, y\rangle = x_1\bar{y_1} + \cdots + x_n\bar{y_n}$$

---

[۵] Hilbert

که در آن $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ یک فضای ضرب داخلی و با نرم

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

که به وسیلهٔ ضرب داخلی تولید شده یک فضای نرم دار باناخ و در نتیجه هیلبرت می‌باشد. همچنین فضای دنباله ℓ^2 متشکل از تمام دنباله‌های $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ از اسکالرهایی که در مورد آنها $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ با نرم $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$ یک فضای باناخ و در نتیجه هیلبرت است. ℓ^2 را فضای دنباله هیلبرت گوییم.

۲.۱ جبر

تعریف ۱.۲.۱ . یک جبر[6] روی میدان $\mathbb{F}$ یک فضای خطی $\mathcal{A}$ روی $\mathbb{F}$ است همراه با نگاشت $xy \to (x, y)$ از $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ به توی $\mathcal{A}$ به طوری که برای تمام $\alpha \in \mathbb{F}$ ، $x, y, z \in \mathcal{A}$ شرایط زیر برقرارباشد.

الف) $x(yz) = (xy)z$

ب) $(x+y)z = xz + yz$ و $x(y+z) = xy + xz$

ج) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

تذکر ۱.۲.۱ .

۱) نام کامل یک جبر، جبر شرکت پذیر خطی است، اما به خاطر سادگی تنها از کلمه جبر استفاده می‌کنیم.

[6] Algebra

۲) میدان $\mathbb{F}$ را میدان اسکالر جبر $\mathcal{A}$ می نامند. اگر $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ باشد $\mathcal{A}$ را جبر حقیقی و اگر $\mathbb{F}=\mathbb{C}$، آن را جبر مختلط می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ .

آ) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و $\|.\|$ یک نرم جبری روی $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت $(\mathcal{A},\|.\|)$ را یک جبر نرم‌دار می گویند.

ب) جبر $\mathcal{A}$ را کامل گویند، هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد. هر جبر نرم‌دار کامل را یک جبر باناخ می گویند.

ج) جبر $\mathcal{A}$ را یکانی می گویند، هرگاه عضو یک در $\mathcal{A}$ موجود باشد، به طوری که به ازای هر عضو a در $\mathcal{A}$، $a=\text{۱}a=a\text{۱}$. همچنین $\|\text{۱}\|=\text{۱}$. یک را عضو یکانی جبر $\mathcal{A}$ می گویند.

تعریف ۳.۲.۱ .

آ) فرض کنید $\mathcal{B},\mathcal{A}$ جبرهایی روی میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند. یک همریختی[۷] از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$، نگاشت $\varphi\in L(\mathcal{A},\mathcal{B})$ است، به طوری که :

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \quad ، \quad \forall x,y\in\mathcal{A}$$

به آسانی ثابت می‌شود که $Ker(\varphi)$ یک ایده‌آل در $\mathcal{A}$ است. همچنین $Im(\varphi)=\varphi(\mathcal{A})$ یک زیر جبر از $\mathcal{B}$ است.

ب) φ را یکانی می‌نامند، هرگاه $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ یکانی و $\varphi(\text{۱})=\text{۱}$.

تعریف ۴.۲.۱ . یک همانریختی[۸] بین فضاهای توپولوژیکی X و Y نگاشت دوسویی و پیوسته $T:X\to Y$ است، که معکوس آن نیز پیوسته است.

[۷] Homomorphism
[۸] Homeomorphism

مثال ۱.۲.۱ . فرض کنید Ω یک فضای توپولوژیکی و $C_b(\Omega)$ مجموعه تمام توابع مختلط مقدارپیوسته کراندار روی Ω باشد. $C_b(\Omega)$ یک زیر جبر بسته از $\ell^\infty(S)$ است و شامل تابع کراندار و پیوسته $f = ۱$ است. بنابراین یک جبر باناخ یکانی است.

مثال ۲.۲.۱ . فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف فشرده موضعی باشد. تابع پیوسته $f : \Omega \longrightarrow C$ در بی‌نهایت صفر است، اگر برای هر عدد مثبت ε مجموعهٔ زیر فشرده باشد.

$$\{\omega \in \Omega : | f(\omega) | \geq \varepsilon\}$$

مجموعه چنین توابعی را با $C_\circ(\Omega)$ نشان می‌دهیم. $C_\circ(\Omega)$ یک زیر جبر بسته از $C_b(\Omega)$ است و بنابراین یک جبر باناخ است.

۳.۱ طیف و شعاع طیفی

اثبات قضایای زیر را می توانید در [۱] بیابید. در این بخش $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای یکانی هستند.

تعریف ۱.۳.۱ . عضو $a \in \mathcal{A}$ را **معکوس پذیر**[۹] گوییم، اگر b در $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد، به طوری که $ab = ba = ۱$. مجموعه تمام اعضای معکوس پذیر $\mathcal{A}$ را با $Inv(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. بنابراین :

$$Inv(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : \exists\, b \in \mathcal{A} : ab = ba = 1\} \qquad (۳.۱)$$

تعریف ۲.۳.۱ . برای هر $a \in \mathcal{A}$ **طیف**[۱۰] a را که با $\sigma(a)$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin Inv(\mathcal{A})\} \qquad (۴.۱)$$

[۹] Invertible
[۱۰] Spectrum

قضیه ۱.۳.۱ . اگر $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک همریختی یکانی باشد، آنگاه $\varphi(Inv(\mathcal{A})) \subseteq Inv(\mathcal{B})$.
لذا $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$.

مثال ۱.۳.۱ . فرض کنید Ω هاسدورف فشرده باشد و $\mathcal{A} = C(\Omega)$. دراین صورت به ازای هر $f \in \mathcal{A}$ داریم:

$$\sigma(f) = f(\Omega)$$

گزاره ۱.۳.۱ . فرض کنید a, b اعضایی از جبر یکانی $\mathcal{A}$ باشند. اگر $۱ - ab$ معکوس پذیر باشد، آنگاه $۱ - ba$ معکوس پذیر است و در نتیجه $\sigma(ab) - \{۰\} = \sigma(ba) - \{۰\}$. زیرا اگر c معکوس $۱ - ab$ باشد، یعنی $c(۱ - ab) = (۱ - ab)c = ۱$ آنگاه $۱ + bca$ معکوس $۱ - ba$ است.

قضیه ۲.۳.۱ . فرض کنید a یک عضو از جبر یکانی $\mathcal{A}$ باشد. برای هر a در $\mathcal{A}$، $\sigma(a) \neq \phi$ و برای هر $p \in C[Z]$ داریم: $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$

قضیه ۳.۳.۱ . فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکانی و $\|a\| \leq ۱$ باشد و آنگاه $۱ - a$ معکوس پذیر است و $(۱ - a)^{-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty} a^n$.

تعریف ۳.۳.۱ . اگر a عضوی از یک جبر باناخ یکانی باشد. **شعاع طیفی**[۱۱] به صورت زیر تعریف می‌شود: $r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} | \lambda |$.
$r(ab) = r(ba)$ با توجه به رابطه فوق همواره برقرار است.

مثال ۲.۳.۱ . اگر $\mathcal{A} = C(\Omega)$ باشد که Ω یک فضای هاسدورف فشرده است، آنگاه برای هر $f \in \mathcal{A}$ داریم:

---
[۱۱] Spectral radius

$$\sigma(f) = f(\Omega)\ ,\ r(f) = \|f\|_\infty$$

زیرا

$$r(f) = \sup_{\omega\in\Omega} |\ f(\omega)\ | = \|f\|_\infty$$

تعریف ۴.۳.۱ . فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد و $T \in B(\mathcal{H})$. **طیف نقطه تقریبی**[۱۲] عملگر T را با $\sigma_{ap}(T)$ نمایش می‌دهیم، گوییم عدد مختلط λ در $\sigma_{ap}(T)$ قرار دارد هرگاه دنباله واحد $\{x_n\}$ در $\mathcal{H}$ موجود باشد، به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} ||(T-\lambda)x_n|| = 0$$

لازم به ذکر است که $\sigma_{ap}(T)$ زیر مجموعه‌ای بسته از $\sigma(T)$ شامل $\partial\sigma(T)$ می‌باشد، [۱].

قضیه ۴.۳.۱ .(قضیه برلینگ [۱۳]): اگر a یک عضو از جبر باناخ یکانی A باشد، آنگاه

$$r(a) = \inf_{n\geq 1} ||a^n||^{1/n} = \lim_{n\geq 1} ||a^n||^{1/n}$$

۴.۱ همپیچی

اثبات قضایایی که در این بخش ذکر می‌شود، در [۱] بیان شده‌است. در این قسمت X یک فضای خطی مختلط و A جبری مختلط است.

تعریف ۱.۴.۱ . یک **همپیچی خطی**[۱۴] روی X نگاشت $x \to x^*$ از X به X است که در اصول زیر صدق می‌کند. (برای تمام $x, y \in X$,$\alpha \in \mathbb{C}$)

[۱۲] Approximate point spectrum
[۱۳] Beurling
[۱۴] Involution

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$

۲) $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$

۳) $(x^*)^* = x$

اصل ۳ اشاره دارد به این که هر همپیچی، دوسوئی است.

تعریف ۲.۴.۱ . همپیچی جبری یا به طور ساده‌تر همپیچی روی $\mathcal{A}$ یک همپیچی خطی روی $\mathcal{A}$ است که در اصل زیر صدق می‌کند .

$$(xy)^* = y^* x^*$$

جبر $\mathcal{A}$ با همپیچی $*$ ، $*$ - **جبر**[۱۵] نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۴.۱ . $*$ - جبر نرم دار، جبری نرم دار و مختلط با همپیچی است. $*$ - جبر باناخ نیز $*$- جبرنرم دار کامل است.

تعریف ۴.۴.۱ . فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $*$ - جبر باشد:

۱) عضو $a \in \mathcal{A}$ را **خود الحاق (هرمیتی)** [۱۶] نامند، هرگاه $a = a^*$. مجموعه اعضای خود الحاق $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{A}_{sa}(\mathcal{A}_H)$ نشان می‌دهند.

۲) عضو $a \in \mathcal{A}$ را **نرمال**[۱۷] نامند، هرگاه $aa^* = a^*a$.

۳) عضو $p \in \mathcal{A}$ را **تصویر**[۱۸] نامند، هرگاه $p = p^* = p^2$. مجموعه تصاویر $\mathcal{A}$ را با $Pr(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهند.

---

[۱۵] *-Algebra
[۱۶] (Hermitian)Self-adjoint
[۱۷] Normal
[۱۸] Projection

۴) عضو $u \in \mathcal{A}$ را یکانی[۱۹] نامند، هرگاه $uu^* = u^*u = 1$. اگر $u^*u = 1$، آنگاه u را **طولپا**[۲۰] و اگر $uu^* = 1$، آنگاه آن را **هم طولپا**[۲۱] می‌نامند.

مجموعهٔ متشکل از اعضای یکانی $\mathcal{A}$ را با $U(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهند. به سادگی می توان نشان داد $U(\mathcal{A})$ یک گروه است، که آن را گروه یکانی $\mathcal{A}$ می‌نامند.

تذکر ۱.۴.۱ .

۱) اگر $\mathcal{A}$ یک $*$− جبر یکانی باشد و $a \in Inv(\mathcal{A})$، آنگاه $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$.

۲) $a \in Inv(\mathcal{A})$ اگر و فقط اگر $a^* \in Inv(\mathcal{A})$. بنابراین به آسانی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sigma(a^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\} \qquad (5.1)$$

تعریف ۵.۴.۱ . فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ هر دو $*$− جبر باشند. هر همریختی $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ که حافظ همپیچی باشد را یک $*$− **همریختی**[۲۲] می گویند. به عبارت دیگر، همریختی φ یک $*$− همریختی است، هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم: $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$.

تعریف ۶.۴.۱ . فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $*$− جبر باناخ باشد، $\mathcal{A}$ را یک C^*− جبر[۲۳] می گویند، هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم: $||a^*a|| = ||a||^2$.

مثال ۱.۴.۱ . میدان اسکالر $\mathbb{C}$ یک C^*− جبر یکانی است با همپیچی مزدوج مختلط $\lambda \longrightarrow \bar{\lambda}$ و برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم: $|a^*a| = |\bar{a}a| = |a|^2$

[۱۹] Unitary
[۲۰] Isometriy
[۲۱] Co-isometriy
[۲۲] *-homomorphism
[۲۳] C^*-algebra