بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **فرهمند پارسا** رشته **ریاضی محض** تحت عنوان:«**مطالعه خمینه های اینشتین همگن نافشرده از طریق جبرهای لی مدرج** » از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد مشاور	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر فرشته سعدی	استادیار	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر حمیدرضا فنایی	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر فرشته سعدی	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی محض (هندسه)** است که در سال **۱۳۸۸** در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای **دکتر سید محمد باقر کاشانی** و مشاوره جناب آقای **دکتر عباس حیدری** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **امیر فرهمند پارسا** دانشجوی رشته **ریاضی محض** مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: امیر فرهمند پارسا

تاریخ و امضا: ۱۳۸۸/۱۰/۲۰

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

مطالعه خمینه های اینشتین همگن نافشرده
از طریق جبرهای لی مدرج

نگارش

امیر فرهمند پارسا

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقر کاشانی

استاد مشاور

دکتر عباس حیدری

دی ۱۳۸۸

تقدیم به پدر و مادرم

با تشکر از

دکتر سید محمد باقر کاشانی

و

دکتر عباس حیدری

که در تمام مدت تحقیق، با صبر و شکیبایی، همواره راهنمایی آگاه و دلسوز بودند.

چکیده

در این پایان نامه، رادیکال های پوچ زیر جبرهای سهمویِ جبرهای لی نیم ساده و توسیع هایِ حلپذیرِ یک بعدیِ طبیعیِ آنها مطالعه می شود. ساختارها، خمیدگی ها و شرط های اینشتین خمینه های پوچتوان و حلپذیرپیوست جبرهای لی مدرج، معرفی شده، نشان داده می شود که این خمینه های حلپذیر، اینشتین هستند اگر دوگامی باشند.

همچنین، منبعی غنی از مثال ها برای قضیه های مطرح شده شامل جبرهای هایزنبرگ، جبرهای هایزنبرگ توسعه یافته، فضاهای دمک-ریچی و جبرهای لی کلاسیک ارایه می شود.

واژه هان کلیدی

جبر لی نیم ساده، زیرجبرهای لی سهموی، خمینه پوچتوان، توسیه حلپذلر، خمینه حلپذیر، خمینه حلپذیر اینشتین، جبر لی مدرج.

فهرست

مقدمه

در این پایان نامه، به مطالعه خمینه های اینشتین همگن نافشرده به کمک جبرهای لی مدرج پرداخته می شود. شرط همگنی امکان مطالعه نقطه ای خمینه را می دهد، نافشردگی اعمال شده به دلیل شناخت کمتر این گونه خمینه ها و امکان بیشتر برای تحقیق است، زیرا خمینه های اینشتین همگن فشرده در مرجع های [13] و [3] بصورت جامع مطالعه شده است. شرط اینشتین در واقع دسته خاصی از خمینه های ریمانی را مشخص می کند که به دلیل کاربردهای فیزیکی، بویژه بر ۴-خمینه ها مورد توجه قرار گرفته است.

فرض ساختارهای جبری شناخته شده بر خمینه ها که از قدیمی ترین و قدرتمندترین آنها، ساختار جبر لی ست، به دلیل رفتارهای ملموس و ساده تر در محاسبات، جایگاه ویژه ای در هندسه خمینه ها دارد که به شناخت و رده بندی آنها کمک می کند.

گروه لی پوچتوان را از گام n گویند هرگاه هر عملگر adA برای عضو A از گروه لی، پوچتوان حداکثر از مرتبه n باشد و یک خمینه ریمانی اینشتین است اگر خمیدگی ریچی آن مضرب ثابتی از متریک

ریمانی باشد و حلپذیر است اگر گروه طولپایی های آن شامل یک زیر گروه حلپذیر ترایا باشد. تا کنون، همه خمینه های اینشتین همگن نافشرده شناخته شده، خمینه های حلپذیر و حتی از نوع ایواسا بوده است. مطالعه خمینه های حلپذیر در حال حاضر از مسائل مورد توجه است، بویژه هبر در مرجع [12] به مطالعه خمینه های اینشتین حلپذیر پرداخته و نتیجه های بنیادی زیادی بدست آورده است. با وجوداین، مثال های زیادی برای خمینه های با گام های ۲ و ۳، در دست نیست که با معرفی مجموعه ای از "عضوهای ویژه" گروه لی و گروه طولپایی متناظر با هر یک، مفهوم دستگاه ریشه معرفی و مثال های مورد نظر ارائه می شود.

همچنین با معرفی رده بندی ویژه‌ای از خمینه های حلپذیر اینشتین، به مطالعه آنها و ارائه مثال هایی از این خمینه ها می پردازیم.

یک روش برای پیدا کردن خمینه های حلپذیر اینشتین، بررسی ساختارهای مناسب بر این خمینه ها، مانند ساختارِ متقارن از نوع نافشرده است.

روش دیگر، بررسی توسیع های حلپذیر طبیعی یک بعدی خمینه های پوچتوان است. برای مثال می توان به فضای دمک-ریچی که توسیع حلپذیر یک بعدی گروه های هایزنبرگ توسعه یافته است، اشاره کرد. این روش منجر به بررسی رادیکال های پوچ زیرجبرهای سهموی جبرهای لی نیم ساده می شود و نشان داده شده است که تمام این رادیکال های پوچ نیز به همین طریق بدست می آید.

در این پایان نامه، دو گزاره کلیدی وجود دارد که به کمک آنها به هدف اصلی دست می یابیم.

۱) توسیع های حلپذیر طبیعی یک بعدی خمینه های پوچتوان، اینشتین است، اگر دوگامی باشد.

۲) با محدودیت هایی بر بعد زیر فضاهای تعریف کننده درجه بندی، شرطی معادل شرط اینشتین بر توسیع های بند (۱) بدست می آید که مثال های فراوانِ خمینه های حلپذیر اینشتین از آن نتیجه می شود.

ساختار این پایان نامه چنین است. فصل اول به ارائه پیشنیازها اختصاص دارد، گروه های هایزنبرگ و هایزنبرگ توسعه یافته و بویژه فضاهای دمک-ریچی در فصل دوم مطالعه می شود که در ادامه مطالب همواره به عنوان مثال های قوی برای خمینه های حلپذیر دیده می شوند. فصل سوم، به بیان مروری و توصیفی دستگاه ریشه می پردازد که برای ساخت مثال های با گام های مختلف، بسیار کاربردیست . در پایان این فصل زیرجبر سهموی یک جبر لی معرفی می شود. فصل چهارم، بخش اصلی پایان نامه را تشکیل می دهد و در آن مرجع [1] (از هیروشی تامارو با عنوان ***خمینه های اینشتین همگن نافشرده، پیوسته به جبرهای لی مدرج***) تشریح شده است. هدف اصلی این مقاله، معرفی و مطالعه رده ای از خمینه های حلپذیر و ارایه مثال هایی از فضاهای اینشتین است. در این پایان نامه، قضیه (۱.۷.۴) که تعمیم گزاره (۱.۷.۴) است و همینطور، نتیجه های (۱.۹.۴) و (۲.۹.۴) از نویسنده می باشد.

فصل اول

۱.پیش نیازها

دراین فصل, پیش نیازها ارایه می شود. از جمله به بیان خمینه نوع ایواساوا می پردازیم، التصاق **L-C** را بـر ایـن خمینه‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم و چند قضیه مهم درباره خمیدگی ریچی این نوع خمینه‌ها، ذکر می‌شود. در پایان فصل نوعی رده‌بندی براساس مقدارهای ویژه متنـاظر خمیـدگی میـانگین بـر خمینـه‌هـای حلپـذیر ارائـه می‌شود.

تعریف۱ : [3] فرض کنیم $\mathfrak{g}$ یک جبرلی بر میدان حقیقی $\boldsymbol{R}$ باشد، $[\mathfrak{g}\,,\mathfrak{g}\,]$ یک ایده‌آل $\mathfrak{g}$ اسـت کـه آن را بـا $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ نمایش می‌دهند و با استقرا $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}{}^{n} = \mathcal{D}(\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}{}^{n-1})$ بدست می‌آید. جبرلی $\mathfrak{g}$ را حلپذیر گویند هـر گـاه بـرای یک $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}{}^{n} = 0$. گروه لی ساده همبند متناظر با این جبر لی را یک خمینه حلپذیر نامند.

تعریف ۲: [3] جبرلی $\mathfrak{g}$ بر میدان $\boldsymbol{R}$ را پوچتوان n- گامی گویند هـر گـاه بـرای هـر $z \in \mathfrak{g}$ ، ad_z یـک درون ریختی پوچتوان از مرتبه n باشد.

در این حالت، گروه لی ساده همبند متناظر با این جبرلی را یک خمینه پوچتوان n-گامی می‌نامند.

فرض کنید $\mathfrak{s}$ یک جبرلی حلپذیر با ضرب داخلی $<,>$ باشـد. در ادامـه ، منظـور از $(\mathfrak{s},<,>)$، جبرلـی $\mathfrak{s}$ بـا ضرب داخلی مفروض و نیز گروه لی ساده همبند متناظر با آن مجهز بـه یـک متریـک چـپ ـ نـاوردای ریمـانی

می‌باشد. نمادهای پایین را در نظر می‌گیریم

$\mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ و $\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^{\perp}$.

که $\mathfrak{a}$ مکمل متعامد $\mathfrak{n}$ در $\mathfrak{S}$ ، نسبت به ضرب داخلی می‌باشد.

تعریف ۳: [1] یک خمینه حلپذیر $(\mathfrak{s}, <,>)$ را استاندارد گویند هر گاه $\mathfrak{a}$، آبلی باشد. یک خمینه حلپذیر استاندارد را از نوع ایواساوا گویند هر گاه

i) ad_A برای هر $A \in \mathfrak{a}$ متقارن باشد،

ii) یک A_0 عضو $\mathfrak{a}$ چنان موجود باشد که هر مقدارویژه $ad_{A_0}|\mathfrak{n}$، یک عدد حقیقی مثبت است.

دراین حالت، برای هر دو میدان برداری(متعامد) چپ ـ ناوردای X و Y بر خمینه $\mathcal{S}$، التصاق L-C و خمیدگی برشی به صورت پایین بدست می‌آید[2]

$$(۱)\ \text{i)}\ 2 < \nabla_X^Y, Z > = < [X,Y], Z > + < [Y,Z], X > + < [X,Z], Y >;$$

$$\text{ii)}\ K(X \wedge Y) = |\nabla_X^Y|^2 - < \nabla_X^X, \nabla_Y^Y > - < ad_Y^2 X, X > - |[X,Y]|^2 \ ;$$

$$(2)\quad \text{i)}\ \nabla_A^{\acute{A}} = 0, \nabla_A^X = 0, \nabla_X^A = -ad_A^X \quad A, \acute{A} \in \mathfrak{a}, X, Y, Z \in \mathfrak{n};$$

$$\text{ii)}\ \nabla_X^Y = \sum_\alpha < X_\alpha, Y_\alpha > A_\alpha + \nabla_X^{\mathfrak{n}} Y \Rightarrow \begin{cases} \nabla_X^Y = \nabla_X^{\mathfrak{n}} Y + \sum_i < ad_{A_i} X, Y > A_i \\ \nabla_X^Y = (1/2)[X,Y] + U(X,Y) \end{cases};$$

که در آن $\nabla^{\mathfrak{n}}$، التصاق L-C بر $\mathfrak{n}$ و U به صورت مقابل بدست می‌آید

$$.2 < U(X,Y), Z > = < [Z,X], Y > + < X, [Z,Y] >;$$

در نتیجه U متقارن و دو خطی است. اکنون جمله $\sum_\alpha < X_\alpha, Y_\alpha > A_\alpha$ را توضیح می‌دهیم.

بنابر تعریف خمینه از نوع ایواساوا، برای هر $A \in \mathfrak{a}$، $ad_{A_0}|\mathfrak{n}$، متقارن است، پس می‌توان $\mathfrak{n}$ را به زیر فضاهای ریشه تجزیه کرد. درباره دستگاه ریشه و فضای ریشه در فصل ۳ به طور کامل بحث خواهیم کرد. در این حالت $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ چنین تعریف می‌شود.

$.\forall X_\alpha \in \mathfrak{n}_\alpha \quad ad_A X_\alpha = \alpha(A) X_\alpha$

و بردار دوگان متناظر با این ریشه یعنی α نسبت به ضرب داخلی را با A_α نمایش می‌دهیم.

بنابر تعریف، $U(X,Y) = \sum_\alpha < X_\alpha, Y_\alpha > A_\alpha$ در واقع فرم اساسی دوم $\mathfrak{n}$ است و بنابراین خمیدگی میانگین $\mathfrak{n}$ چنین بدست می‌آید

$. H = \sum_\alpha \dim \mathfrak{n}_\alpha A_\alpha.$

تعریف ۴: [1] برای خمینه حلپذیر $(\mathfrak{s}, <,>)$، $H_0 \in \mathfrak{a}$ را بردار خمیدگی میانگین گویند هر گاه

$.< H_0, A >= tr(ad_A) \quad \forall A \in \mathfrak{a}.$

در حالت کلی،اگر $\mathcal{N}$ زیر خمینه ریمانی $\mathcal{S}$ متناظر با $\mathfrak{n}$ (در$\mathfrak{s}$) باشد، H_0 همان بردار خمیدگی میانگین $\mathcal{N}$ است. در حالت خمینه نوع ایواساوا و نیم ساده بادر نظر گرفتن متریک $-B$ (منظور از B فرم کیلینگ می باشد.) و استفاده از تجزیه $\mathfrak{n}$ به فضاهای ریشه می‌توان شرط تعریف ۴ را به صورت صریح بررسی کرد

$H_0 \coloneqq \sum_\alpha \dim \mathfrak{n}_\alpha A_\alpha \quad \Rightarrow < H_0, B >= \sum_\alpha dim\mathfrak{n}_\alpha < A_\alpha, B >= \sum_\alpha dim\mathfrak{n}_\alpha B_\alpha = tr(ad_B)$,
$\forall B \in \mathfrak{a}.$

یا بطور کلی H_0 با توجه به فرمول کزول با تعریف تابع ذیل بدست می آید،[2,10].

$U: \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s} \quad :< U(X,Y), Z >= \frac{1}{2} < [Z,X], Y > + \frac{1}{2} < [Z,Y], X > \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{s}.$
$H_0 \coloneqq \sum_i U(X_i, X_i).$

در این فرمول $\{X_1, \ldots, X_n\}$ یک پایه یکه متعامد $\mathfrak{s}$ است.

درادامه با تعریف خمیدگی ریمانی به صورت پایین به بررسی خمیدگی ریچی برای $\mathcal{S}$ (که بنابر تعریف از انقباض مؤلفه دوم و چهارم خمیدگی ریمانی یا معادلا با محاسبه ردخمیدگی ریمانی بر یک مؤلفه بدست می‌آید)، می‌پردازیم

$$(3)\ R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

گزاره۱:[1] اگر $(\mathfrak{s},<,>)$،یک خمینه از نوع ایواساوا و H_0 بردار خمیدگی میانگین آن باشد،با نمایش Ric و $Ric^{\mathfrak{n}}$ برای خمیدگی ریچی $\mathfrak{s}$ و $\mathfrak{n}$ به ترتیب ،داریم

$$(1)\quad \mathrm{Ric}(A,A') = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A)\circ(\mathrm{ad}_{A'}) \ \textit{for}\ A, A' \in \mathfrak{a},$$

$$(2)\quad \mathrm{Ric}(A,X) = 0,$$

$$(3)\quad \mathrm{Ric}(X) = \mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}}(X) - (\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{H_0})/|H_0|^2)\cdot \mathrm{ad}_{H_0}X \quad \textit{for}\ X \in \mathfrak{n}.$$

اثبات این گزاره با توجه به رابطه های ارائه شده(1)و (2)و(3) سرراست است. از طرفی این گزاره نتیجه می‌دهد اگر $(\mathfrak{s},<,>)$،یک خمینه اینشتین باشد، $(\boldsymbol{R}H_0+\mathfrak{n},<,>)$ با ضرب داخلی طبیعی نیز یک خمینه اینشتین است.

برای خمینه حلپذیر $(\mathfrak{s},<,>)$، $dim\mathfrak{a}$ را رتبه جبری و $(\boldsymbol{R}H_0+\mathfrak{n},<,>)$ را خمینه تحویلی رتبه یک $\mathfrak{s}$ نامند. در این حالت، H_0 بردار خمیدگی میانگین خمینه حلپذیر $\boldsymbol{R}H_0+\mathfrak{n}$ است.

گزاره۲:[1] خمیدگی ریچی خمینه پوچتوان $(\mathfrak{n},<,>)$ چنین بدست می‌آید

$$\mathrm{Ric}^{\mathfrak{n}} = (1/4)\sum \mathrm{ad}_{E_i}\circ(\mathrm{ad}_{E_i})^* - (1/2)\sum(\mathrm{ad}_{E_i})^*\circ \mathrm{ad}_{E_i},$$

که در آن $\{E_i\}$ یک پایه یکه متعامد برای $\mathfrak{n}$ و $(ad_{E_i})^*$، الحاق ad_{E_i} نسبت به ضرب داخلی است که چنین تعریف می‌شود

$$\langle(\mathrm{ad}_{E_i})^*X, Y\rangle = \langle X, \mathrm{ad}_{E_i}Y\rangle.$$

گزارهای ۱و۲ نتیجه می‌دهد در حالت خمینه نوع ایواساوا، خمیدگی ریچی به طور کامل توسط بردار خمیدگی میانگین، H_0، عملگرهای الحاقی، ad_{E_i} و الحاق آنها، $(ad_{E_i})^*$، بدست می‌آید.

گزاره۳:[1] برای خمینه حلپذیر استاندارد اینشتین، $\lambda > 0$ چنان موجود است که قسمت حقیقی مقدارهای ویژه $ad_{\lambda H_0}$ عددهای صحیح و مثبت اند.

اگر $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m$ قسمت‌های حقیقی مقدارهای ویژه $ad_{\lambda H_0}$ و $d_1, \dots, d_m$ چندگانگی متناظر باآنها باشد، $(\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m;\ d_1, \dots, d_m)$ رانوع مقدارهای ویژه یک خمینه حلپذیراینشتین گویند.

برای مثال می‌توان فضای دمک-ریچی را در نظر گرفت که در فصل بعد خواهیم دید از نوع $(1 < 2\ ;\ d_1, d_2)$ است.

فصل دوم

۲. گروه‌های هایزنبرگ و فضاهای دمک-ریچی

در این فصل ابتدا گروه‌های هایزنبرگ و حالت های توسعه یافته آنها معرفی و در ادامـه فضـاهای دمـک-ریچـی ارائه می شود. هدف اصـلی ایـن فصـل معرفـی دسـته مهمـی از خمینـه هـای از نـوع ایواسـاوا یعنـی فضـاهای دمک-ریچی می‌باشد.

همه مطالب این فصل از مرجع های [1,2,4,5,10] اقتباس شده است.

۲.۱.گروه های هایزنبرگ

گروه هایزنبرگ از نام ورنر هایزنبرگ گرفته شده است که برای اولین بار گروه ماتریسهای بالا مثلثی با درایه های ۱ بر قطر اصلی را معرفی کرد. اکنون تعریف گروه‌های هایزنبرگ در حالت کلی ارائه می شود.

تعریف ۱: مجموعه همه ماتریسهای به شکل $\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ با درایه های حقیقی را که $a, b \in \boldsymbol{R^n}$ (a به صـورت n-تایی سطری و b به صورت n-تایی ستونی) با $H_n(\boldsymbol{R})$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه با ضرب پایین، تبدیل بـه

یک گروه می‌شود که آن را گروه هایزنبرگ نامند.

از تعریف دیده می‌شود که بعد این گروه (2n+1) است.

$$.\begin{bmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1_n & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & \grave{a} & \grave{c}\\ 0 & 1_n & \grave{b}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a+\grave{a} & c+\grave{c}+a.\grave{b}\\ 0 & 1_n & b+\grave{b}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$.\begin{bmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1_n & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -a & -c+a.b\\ 0 & 1_n & -b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1_n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

می‌توان دید گروههای هایزنبرگ، ساده همبند و گروه لی اند[5] و جبرلی متناظر با آن عبارتست از

$$\left\{\begin{bmatrix}0 & a & c\\ 0 & 0_n & b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} : a, b \in \boldsymbol{R}^n\right\}.$$

در این حالت تابع نمایی چنین بدست می‌آید

$$\exp\begin{bmatrix}0 & a & c\\ 0 & 0_n & b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\right)\begin{bmatrix}0 & a & c\\ 0 & 0_n & b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1 & a & c+\left(\frac{1}{2}\right)a.b\\ 0 & 1_n & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

با در نظر گرفتن $e_1, \dots, e_n$ به عنوان پایه استاندارد $\boldsymbol{R}^n$ می‌توان (2n+1) مولد بـرای $H_n(\boldsymbol{R})^a$ چنـین بدسـت آورد

$$p_i=\begin{bmatrix}0 & e_i & 0\\ 0 & 0_n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\ ,\ \ q_j=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0_n & {e_j}^T\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ z=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0_n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

وکروشه لی با رابطه های ذیل، به طور صریح بدست می‌آید

$$.\ [p_i, q_j]=\delta_{ij}z\ ,\quad [p_i, z]=o,\ [q_j, z]=0\ .$$

۲.۲.گروههای هایزنبرگ توسعه یافته

برای معرفی گروههای هایزنبرگ توسعه یافته، ابتدا جبرلی هایزنبرگ توسعه یافته معرفی مـی شـود، گـروه لـی

ساده همبند متناظر با این جبرلی، گروه هایزنبرگ توسعه یافته است.

تعریف ۲: [4] اگر $(\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}})$ یک جبرلی پوچ توان از مرتبه ۲ مجهز، به ضرب داخلی $<,>_{\mathfrak{n}}$ باشد و $\mathfrak{z}$ مرکز آن و $\mathfrak{v}$ مکمل متعامد $\mathfrak{z}$ نسبت به ضرب داخلی $\mathfrak{n}$ باشد. چون $\mathfrak{n}$ از مرتبه ۲ است، برای هر $v \in \mathfrak{v}$، $ad_v|\mathfrak{v}$، نگاشتی از $\mathfrak{v}$ به $\mathfrak{z}$ است. حال تعریف می‌کنیم $\mathfrak{k}_v = \ker(ad_v|\mathfrak{v})$ و تجزیه متعامد $\mathfrak{v} = \mathfrak{k}_v \oplus \mathfrak{v}_v$ رانسبت به $<,>_{\mathfrak{n}}$ در نظر می‌گیریم.

$(\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}})$ را یک جبر هایزنبرگ توسعه یافته گویند هر گاه $ad_v|\mathfrak{v}_v$ برای هر $v \in \mathfrak{v}$ و $|v| = 1$ یک طولپایی پوشا بروی $\mathfrak{z}$ باشد.

در ادامه با استفاده از ترکیب دو فضای داخلی ضرب داخلی یک جبر هایزنبرگ توسعه یافته می‌سازیم و با بیان قضیه‌ای، نشان می‌دهیم هر جبر هایزنبرگ توسعه یافته دارای چنین ساختاری است.

فرض کنیم $(\mathfrak{v}, <,>_{\mathfrak{v}}), (\mathfrak{u}, <,>_{\mathfrak{u}})$ دو فضای ضرب داخلی حقیقی باشند، $\mu: \mathfrak{u} \times \mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{v}$ را ترکیب فرم‌های درجه ۲ این دو فضا در نظر می‌گیریم، یعنی نگاشتی دو خطی که در شرط $\left|\mu(u,v)\right| = |u||v|$ برای هر $u \in \mathfrak{u}$ و $v \in \mathfrak{v}$ صدق می‌کند. می‌توان این فرم را به گونه‌ای در نظر گرفت که برای یک $u_0 \in \mathfrak{u}$ داشته باشیم

$$\mu(u_0, v) = v \quad \forall\, v \in \mathfrak{v}\,;$$

زیرا در غیر این صورت با تعریف نگاشت $T: \mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{v}$ به صورت $T(v) \coloneqq \mu(u_0, v)$، μ' با تعریف پایین، ترکیب فرمهای درجه ۲ است که در شرط مورد نظر صدق می‌کند

$$\mu'(u,v) := \mu(u, T^{-1}(v))$$

توجه کنید که خاصیت نرم برای μ، یک به یک بودن T را تضمین می‌کند، پس $T^{-1}(v)$ بدون ابهام تعریف می شود. حال ویژگی نرم را برای μ' بررسی می‌کنیم

$$\left|\boldsymbol{\mu}'(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right| = \left|\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{v}))\right| = |\boldsymbol{u}|\left|\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{v})\right|\,;$$

از طرفی داریم