دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

بهینه‌سازی مسئله ارزش‌گذاری ازدحام شبکه جاده‌ای با تقاضای متغیر

استادان راهنما

آقای دکتر جواد مهری تکمه

آقای دکتر حسین خیری استیار

پژوهشگر

نازنین عباس‌نژاد

۱۳۸۹

خدایا، مرا از رنج نگریستن به بی برگ و باری خویش رهایی بخش.

تقدیم به

روح بزرگوار پدرم

و مادر فداکارم به خاطر راهنمایی‌ها

و حمایت‌های صمیمانه‌اش

نام خانوادگی دانشجو: عباس‌نژاد نام: نازنین

عنوان: بهینه‌سازی مسئله ارزش‌گذاری ازدحام شبکه جاده‌ای با تقاضای متغیر

استادان راهنما : آقای دکتر جواد مهری تکمه، آقای دکتر حسین خیری استیار

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۸۹ تعداد صفحه: ۱۱۲

کلید واژه‌ها: ارزش‌گذاری ازدحام، مسئله برنامه‌ریزی ریاضی با قیود تعادل، روند ناهموار، زیر گرادیان‌ها، تحلیل حساسیت

چکیده

این پایان‌نامه یک مسئله بهینه‌سازی جدید طراحی‌شده برای ارزش‌گذاری ازدحام شبکه جاده‌ای با تقاضای متغیر (CPRAM) را ارائه می‌کند. شبکه جاده‌ای با تقاضاهای متغیر را می‌توان به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی با قیود تعادل (MPEC) مدل‌بندی کرد، که تعادل کاربر با تقاضاهای متغیر به صورت یک مسئله نامساوی تغییراتی بیان شده است. به دلیل مشتق‌ناپذیری جوابهای پریشیده در قیود تعادل، مدل بهینه‌سازی ناهموار به دست می‌آید. روش تصویر زیرگرادیان باندل تعمیم‌یافته (GSP) برای حل CPRAM با همگرایی سراسری بیان شده است. محاسبات عددی روی شبکه جاده‌ای با مقیاس کوچک اجرا و نتایج به دست آمده گزارش شده است.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

مقدمه و پیشینه پژوهش

مسئله تخصیص ترافیک یا به اختصار TAP، تعیین مسیر برای کاربرانی است که روی یک شبکه حمل و نقل از بعضی از مبدأها به سوی بعضی از مقصدها حرکت می‌کنند. واردراپ دو اصل مهم را بیان کرده است [۲۹]. در اصل اول هیچ کاربری نمی‌تواند با استفاده از یک مسیر دیگر، هزینه (زمان) حرکت خود را کاهش دهد. بر طبق اصل دوم، انتخاب مسیر باید به گونه‌ای باشد که هزینه حرکت کل در سرا سر شبکه کمینه شود. حالت اول به تعادل یا بهینگی کاربر معروف بوده و از حالت دوم به بهینگی سیستم یاد می‌شود. در اکثر موارد تعداد کاربران ثابت در نظر گرفته می‌شود. اما ممکن است زمان حرکت روی تقاضا اثر بگذارد، پس مسئله را به محاسبه تقاضای متغیر توسیع می‌دهیم. مسئله تخصیص ترافیک با تقاضای متغیر اغلب در چارچوب ارزش‌گذاری عوارض با تقاضای متغیر مطالعه شده است. مسئله تصمیم‌گیری ارزش‌گذاری ازدحام روی یال‌ها، به منظور کاهش مؤثر ازدحام در شبکه جاده‌ای حمل و نقل به طور وسیع بررسی شده‌است [۸]، [۱۵]، [۱۹]، [۴۲]، [۴۳]. به منظور محاسبه این مسئله، متخصصان اقتصادی ارزش‌گذاری هزینه حاشیه‌ای اجتماعی (MSCP) را روی کاربران جاده‌ای اعمال می‌کنند. از آن جایی که آن‌ها کاربرد بهین شبکه جاده‌ای را بر پایه نقطه بهینه سیستم به دست می آورند، MSCP به طور کلی به عنوان ارزش‌گذاری ازدحام اولین ـ بهترین نامگذاری می‌شود. می توان این ارزش‌گذاری را با ارائه توابع هدف مناسب جایگزین کرد. هرن و رامانا [۱۷] توانستند یک چارچوب ارزش‌گذاری ازدحام را برای یافتن یک روند اجرای مؤثر و ارزان‌تر MINSYS در مقایسه با MSCP بیان کنند. دراین روند، فرض شده است که کاربران جاده‌ای بر اساس کمینه‌سازی هزینه حرکت از مبدأ به مقصد به علاوه ارزش‌گذاری ازدحام روی یال‌های عوارض‌دار در شبکه جاده‌ای عمل می‌کنند. مسئله بهینه‌سازی ارزش‌گذاری ازدحام را همچنین می‌توان به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی دوترازه مدل‌بندی کرد که در تراز بالا بهینگی سیستم در حالی که در تراز پایین بهینگی کاربر در نظر گرفته می‌شود. در این پایان‌نامه از آن جایی که واکنش رفتار کاربران در روند تصمیم‌گیری به حساب می آید، مسئله ارزش‌گذاری ازدحام شبکه جاده‌ای با تقاضاهای متغیر (CPRAM) به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی با قیود تعادل (MPEC) مدل‌بندی شده است.

در مورد روش حل، یانگ و لَم [۴۲] توانستند روش مبتنی بر تحلیل حساسیت را ارائه کنند. در ضمن ائلدرم و هرن [۴۳] ارزش‌گذاری ازدحام اولین ـ بهترین را برای مسئله‌های تخصیص ترافیک با تقاضای متغیر ارائه کرده‌اند که نتایج عددی را روی یک شبکه با مقیاس کوچک به دست آورده‌اند.

در این پایان‌نامه به دلیل مشتق‌ناپذیری جواب‌های پریشیده در قیود تعادل با توجه به متغیرهای تصمیم، روند حل CPRAM از یک روند تحلیل ناهموار اتخاذ شده است. بر طبق کارهای [۲۰]، [۳۸] و [۲۷]، روش باندل تعمیم یافته همراه با جواب تصویر زیرگرادیان پیشنهاد شده است. در این روش به تحلیل حساسیتی نیاز است که به حل مسئله نامساوی تغییراتی آفین منتهی می‌شود. این روش به روند تصویر زیرگرادیان باندل تعمیم یافته (GSP) معروف بوده که با همگرایی سراسری، نقاط بهین را جستجو می‌نماید.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل ابتدا تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز خواهیم داشت، بیان می‌کنیم و سپس به بیان مسئله نامساوی تغییراتی و تحلیل حساسیت آن پرداخته و مسئله برنامه‌ریزی ریاضی با قیود تعادل را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ فرض کنید $x^1, x^2 \in R^n$ و $0 < \theta < 1$، آنگاه $x = \theta x^1 + (1-\theta)x^2$ **ترکیب محدب** دو نقطه x^1, x^2 نامیده می‌شود.

به همین ترتیب $x = \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i$ با شرط $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$ را **ترکیب محدب** k نقطه $x_1, x_2, \ldots, x_k$ می‌گویند، به طوری که به ازای $i = 1, 2, \ldots, k$، نقاط $x_i \in R^n$ و $\theta_i \geq 0$.

مجموعه $S \subset R^n$ محدب نامیده می‌شود، هرگاه تمام ترکیب‌های محدب هر دو نقطه $x^1, x^2 \in S$ نیز در S باشند. به عبارت دیگر، خط واصل بین هر دو نقطه دلخواه یک مجموعه محدب، درون مجموعه قرار دارد.

فرض کنید S یک مجموعه دلخواه از R^n باشد. **پوسته محدب** S، که با $\text{conv}(S)$ نشان داده می‌شود، تمامی ترکیب‌های محدب اعضای S است. به عبارت دیگر، $x \in \text{conv}(S)$ اگر و تنها اگر بتوان x را به صورت زیر نمایش داد:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i,$$
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$
$$\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

که در آن k یک عدد مثبت بوده و $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$.

تعریف ۲.۱ تابع $f : R^n \to R$ در مجموعه محدب $S \subseteq R^n$، **محدب** است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, x' \in S$ و به ازای هر $\theta \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$f(\theta x + (1-\theta)x') \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(x').$$

اگر نامساوی به صورت اکید باشد، f **اکیداً محدب** خواهد بود.

تعریف ۳.۱ تابع $f : X \to R^n$ را **یکنوا** گویند، هرگاه برای هر $x, x^* \in X$ داشته باشیم:

$$[f(x) - f(x^*)]^t (x - x^*) \geq 0. \tag{۱.۱}$$

تابع $f(x)$ را **اکیداً یکنوا** گویند، هرگاه نامساوی (۱.۱) برای هر $x, x^* \in X$ و $x \neq x^*$ به طور اکید برقرار باشد.

اگر عددی مانند $\alpha > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $x, x^* \in X$ و $x \neq x^*$

$$[f(x) - f(x^*)]^t (x - x^*) \geq \alpha ||x - x^*||^2, \tag{۲.۱}$$

آنگاه تابع $f(x)$ را **قویاً یکنوا** گویند.

تعریف ۴.۱ فرض کنید $f : R^n \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$ یک تابع مفروض باشد.

تابع f روی R^n **نیمه پیوسته پایینی** (l.s.c.) است، اگر به ازای هر $x \in R^n$

$$f(x) = \liminf_{y \to x} f(y).$$

تابع f روی R^n **نیمه پیوسته بالایی** (u.s.c.) است، اگر به ازای هر $x \in R^n$

$$f(x) = \limsup_{y \to x} f(y).$$

شکل استاندارد یک مسئله برنامه‌ریزی خطی را به صورت

$$\min\{c^t x : \ Ax = b, \ x \geq 0\},$$

در نظر بگیرید، که در آن $x \in R^n$، $b \in R^m$ و A یک ماتریس $m \times n$ با رتبه کامل است. همان طور که می‌دانیم متناظر با هر مسئله برنامه‌ریزی خطی (مسئله اولیه)، مسئله برنامه‌ریزی خطی دیگری به نام مسئله ثانویه (دوگان) وجود دارد که عبارت است از

$$\max\{b^t y : \ A^t y + s = c, \ s \geq 0\},$$

که در آن $y \in R^m$ متغیر ثانویه و $s \in R^n$ متغیر کمبود ثانویه است.

قضیه ۵.۱ (شرایط کروش – کان – تاکر(KKT)) اگر x نقطه شدنی برای اولیه و (y, s) نقطه شدنی برای دوگان باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای این که x و (y, s) به ترتیب جواب‌های بهین مسئله اولیه و مسئله دوگان باشند، این است که در شرایط زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x &\geq 0, \\ A^t y + s &= c, \\ x^t s &= 0, \\ s &\geq 0. \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

در شرایط (۳.۱)، اگر مقدار s را از $A^t y + s = c$ به دست آورده و در شرایط دیگر جایگذاری کنیم، آنگاه شرایط جدید معادل با (۳.۱) را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b, \\
x &\geq 0, \\
x^t(c - A^t y) &= 0, \\
c - A^t y &\geq 0.
\end{aligned} \tag{۴.۱}
$$

مسئله بهینه‌سازی محدب را به صورت

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \cdots, m, \\
& x \in D.
\end{aligned}
$$

که در آن $D \subseteq R^n$، یک مجموعه محدب است و توابع $f, g_1, g_2, ..., g_m$ توابع محدب و مشتق‌پذیر روی D هستند.

قضیه ۶.۱ (شرایط KKT برای مسئله بهینه‌سازی محدب) فرض کنید $D = R^n$ و توابع $f, g_1, g_2, ..., g_m$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند. بردار $(\bar{x}, \bar{y}) \in R^{n+m}$ نقطه KKT برای مسئله بهینه‌سازی محدب نامیده می‌شود، هرگاه

$$
\begin{aligned}
& \nabla f(\bar{x}) + \textstyle\sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0, \\
& \textstyle\sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j g_j(\bar{x}) = 0, \\
& g_j(\bar{x}) \leq 0, \qquad \forall j \in J, \\
& \bar{y}_j \geq 0, \qquad \forall j \in J,
\end{aligned}
$$

که در آن $J = \{1, 2, \cdots, m\}$.

تعریف ۷.۱ تابع $f : X \to R^n$ را به طور محلی پیوسته **لیپ‌شیتز** گویند، هرگاه به ازای هر $x \in X$، یک همسایگی مانند $N(x)$ و عدد $L(x) > 0$ وجود داشته باشند، به طوری که

$$||f(x_1) - f(x_2)|| \leq L(x)||x_1 - x_2||, \qquad \forall x_1, x_2 \in N(x). \qquad (۵.۱)$$

اگر نامساوی (۵.۱) برای یک عدد ثابت مانند $L > 0$ روی X به طور یکنواخت برقرار باشد؛ یعنی اگر

$$||f(x_1) - f(x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||, \qquad \forall x_1, x_2 \in X, \qquad (۶.۱)$$

آنگاه تابع f را روی X پیوسته لیپ‌شیتز گویند.

شرط (۶.۱)، به شرط لیپ‌شیتز از مرتبه L معروف است.

توجه کنید که هر تابع مانند f که به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، به طور محلی لیپ‌شیتز است.

قضیه ۸.۱ (**قضیه رادمچر** [1]) اگر تابع $f : R^n \to R^n$ روی مجموعه باز $X \subseteq R^n$ لیپ‌شیتز باشد، آنگاه f روی X تقریباً همه جا (با اندازه لبگ) مشتق‌پذیر است.

قضیه ۹.۱ فرض کنید تابع f در نزدیکی x لیپ‌شیتز بوده و S یک مجموعه در R^n با اندازهٔ لبگ صفر باشد. اگر مجموعه نقاطی را که f در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، با Ω_f نشان دهیم، آنگاه

$$\partial f(x) = \text{conv}\{\lim \nabla f(x_i) : x_i \to x,\ x_i \notin S,\ x_i \notin \Omega_f\}.$$

برهان. رجوع کنید به [۹]. □

تعریف ۱۰.۱ ماتریس $M(x)^{n\times n}$ که مؤلفه‌هایش $m_{ij}(x)$، $i = 1, ..., n$ و $j = 1, ..., n$ توابعی تعریف شده روی مجموعه $X \in R^n$ هستند، **نیمه معین مثبت** روی X نامیده می‌شود، اگر

$$v^t M(x) v \geq 0, \qquad v \in R^n, \quad x \in X.$$

و **معین مثبت** روی X نامیده می‌شود، اگر

$$v^t M(x) v > 0, \qquad v \neq 0, \quad v \in R^n, \quad x \in X.$$

[1] Rademacher's Theorem

قضیه ۱۱.۱ فرض کنید $F(x)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر روی X باشد و ماتریس ژاکوبی

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

بدون نیاز به متقارن بودن، نیمه معین مثبت (معین مثبت) باشد، آنگاه $F(x)$ یکنوا (اکیداً یکنوا) است.

تعریف ۱۲.۱ اگر S یک مجموعه باز محدب در R^n و $f : S \to R$ یک تابع محدب باشد، بردار v در آن فضا **زیرگرادیان** f در نقطه $x_0 \in S$ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in S$ داشته باشیم:

$$f(x) \geq f(x_0) + v(x - x_0).$$

مجموعه تمام زیرگرادیان‌های تابع f، با ∂f نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱ مجموعه $H = \{x : p^t(x - \overline{x}) = 0\}$ یک **ابرصفحه** در R^n نامیده می‌شود، که در آن p بردار غیرصفر در R^n و $\overline{x}$ یک نقطه روی ابرصفحه است. بردار p را گرادیان یا نرمال ابرصفحه می‌گویند.

هر ابرصفحه فضای R^n را به دو نیم‌فضای $H^+ = \{x : p^t(x - \overline{x}) \geq 0\}$ و $H^- = \{x : p^t(x - \overline{x}) \leq 0\}$ تقسیم می‌کند.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنید $D \subseteq R^n$، $D \neq 0$ و x روی مرز D باشد. در این‌صورت ابرصفحه $H = \{x : p^t(x - \overline{x}) = 0\}$ را **ابرصفحه حامی** D در نقطه x می‌نامند، هرگاه مجموعه D کاملاً در یک طرف H قرار گیرد. به عبارت دیگر D زیرمجموعه یکی از نیم‌فضاهای تولید شده H^+ و H^- باشد.

تعریف ۱۵.۱ تابع $f : X \times X \to [0, \infty]$ را متریک روی X گویند، هرگاه به ازای همه $x, y \in X$،

- $f(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$.
- $f(x, y) = f(y, x)$.

- $f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z)$

مجموعه‌ای با یک متریک را **فضای متری** گویند.

قضیه ۱.۱۶ اگر E زیرمجموعه‌ای از فضای متری (X,f) باشد. هر دنباله در E، زیردنباله همگرا به نقطه‌ای در E دارد.

قضیه ۱.۱۷ (**نقطه ثابت باناخ**) فرض کنید فضای X یک فضای باناخ بوده و تابع پیوسته f بر X به توی X یک نگاشت انقباضی باشد. به عبارت دیگر، عددی مانند $0 < \delta < 1$ وجود دارد، به طوری که به ازای هر x_1 و x_2 از X

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \delta\|x_1 - x_2\|. \qquad (۱.۷)$$

در این صورت، نقطه‌ای منحصر به فرد مانند y وجود دارد، به طوری که $f(y) = y$. نقطه y، نقطه ثابت تابع f نامیده می‌شود.

برهان. رجوع کنید به [۳]. □

۱.۱ نامساوی تغییراتی

نامساوی تغییراتی روشی اساسی برای مطالعه مسائل تعادل است که توسط هارتمن و استمپچیا در سال ۱۹۶۶ (به نقل از [۲۵]) برای مطالعه معادلات مشتقات جزئی معرفی شده است که البته آن‌ها از بعد نامتناهی بودند. نظریه بعد متناهی این مسائل در سال ۱۹۸۰ توسط دافرموس بیان شد (به نقل از [۲۵]). بسیاری ازمسائل را می‌توان به صورت مسائل نامساوی تغییراتی مدل‌بندی نمود که از آن‌ها می‌توان به مسائل تعادل شبکه ترافیکی، تعادل مالی، شبکه محیط زیست، شبکه علمی و شبکه تعادل مهاجرت اشاره کرد. همچنین بسیاری از مسائل ریاضی مانند دستگاه معادلات و مسائل بهینه‌سازی را می‌توان به صورت

نامساوی تغییراتی نوشت. در ضمن باید توجه داشت که نامساوی تغییراتی یک مسئله کلی با تابعی با ژاکوبی نامتقارن است. در این بخش به بیان اساس نظریه نامساوی تغییراتی پرداخته و در مورد شرایط لازم برای وجود و یکتایی جواب‌های این مسائل بحث خواهیم کرد.

تعریف ۱۸.۱ فرض کنید $X \in R^n$ یک مجموعه محدب، بسته و ناتهی باشد و $F : X \to R^n$ یک نگاشت پیوسته روی X باشد. مسئله **نامساوی تغییراتی** $VI(F, X)$، یافتن $x^* \in X$ است، چنان که

$$F(x^*)^t(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in X. \tag{۸.۱}$$

یا به طور معادل

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X. \tag{۹.۱}$$

بیان هندسی مسئله نامساوی تغییراتی

از نظر هندسی نامساوی تغییراتی را می‌توان چنین تفسیر کرد که $F(x)$ عمود بر مجموعه شدنی X در نقطه x^* است. بنابراین x^* جواب $VI(F, X)$ است اگر و تنها اگر زاویه بین $F(x^*)^t$ و $x - x^*$ که $x, x^* \in X$، کمتر یا مساوی با $90°$ باشد.

۱.۱.۱ وجود و یکتایی جواب‌ها

در این قسمت در مورد وجود و یکتایی جواب بحث می‌کنیم.

قضیه ۱۹.۱ اگر F روی X اکیداً یکنوا باشد، مجموعه جواب VI، در صورت ناتهی بودن یکتا است.

برهان. فرض کنید x^1 و x^2 هر دو جواب VI هستند و $x^1 \neq x^2$، آنگاه

$$\langle F(x^1)^t, x - x^1 \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X, \tag{۱۰.۱}$$

$$\langle F(x^2)^t, x - x^2 \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X. \tag{۱۱.۱}$$

بعد از قرار دادن x^2 به جای x در (۱۰.۱) و x^1 به جای x در (۱۱.۱) و جمع نامساوی‌های نتیجه شده، خواهیم داشت:

$$\langle F(x^1)^t, x^2 - x^1 \rangle \geq 0,$$

$$\langle F(x^2)^t, x^1 - x^2 \rangle \geq 0,$$

آنگاه

$$\langle (F(x^1) - F(x^2))^t, x^2 - x^1 \rangle \geq 0. \qquad (۱۲.۱)$$

اما نامساوی (۱۲.۱) متناقض با تعریف اکیداً یکنوایی است. پس $x^1 = x^2$. □

اگر F روی X قویاً یکنوا باشد، آنگاه دقیقاً یک جواب برای VI وجود دارد. برای اثبات این مطلب می‌توانید به [۲۵] مراجعه کنید.

قضیه ۲۰.۱ اگر X یک مجموعه محدب فشرده بوده و F روی X پیوسته باشد، آنگاه مسئله $\mathrm{VI}(F, X)$ دارای حداقل یک جواب x^* است.

برهان. رجوع کنید به [۲۵]. □

۲.۱ تحلیل حساسیت پارامتری مسئله نامساوی تغییراتی

مسئله نامساوی تغییراتی ابزاری برای مطالعه تحلیل حساسیت به شمار می‌آید، بنابراین در این بخش به بررسی حساسیت جواب این مسئله می‌پردازیم. ابتدا این مسئله را مدل‌بندی کرده، سپس خاصیت‌های جواب آن را بیان می‌کنیم. در ضمن در این پایان‌نامه تحلیل حساسیت روی یک مجموعه چندوجهی را بررسی خواهیم کرد.

۱.۲.۱ مدل‌بندی

مسئله نامساوی تغییراتی پریشیده را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: