بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی

کاربرد توابع پایه شعاعی در تقریب جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

بشیر نادری قره‌خدیر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما:

دکتر احمد گلبابایی

مهرماه ۱۳۸۳

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم

و به دستهای پر از مهر آنان که درخت جوانی ام را شکوفا
نمودند و اینک به پاس آن همه ایثار ثمره تلاشم را به قلبهای
مهربانشان تقدیم می کنم

چکیده:

در دو دهۀ اخیر برای تقریب توابع چند متغیره ، معمولاً از توابع پایه شعاعی استفاده می‌کنند. توابع پایه شعاعی و مشتقاتش حالت کلاسیکی دارد. این توابع با استفاده از گرهها براحتی بدست می‌آیند.

در این پایان‌نامه ، دقت و کارایی این توابع را در تقریب توابع چندمتغیره توضیح می‌دهیم. و بعد از این توابع برای تقریب جواب PDE به روش هم‌محلی استفاده می‌کنیم. و کاربرد توابع پایه شعاعی، در تقریب جواب PDE را با FEM مقایسه می‌کنیم. توابع پایه شعاعی پارامتری(MQ,IMQ,G) دارای ویژگی همگرایی نمایی نسبت به پارامتر c می‌باشند. هرچند که برای انتخاب c بهینه، راه حلی وجود ندارد، ولی باز هم این توابع وجود تقریب را تضمین می‌کنند. در مثالهای عددی از توابع پایه شعاعی پارامتری استفاده می‌کنیم. و با چند مثال مقدار خطا و جواب تقریبی حاصل را برای درونیابی و تقریب جواب PDE ، به روش هم‌محلی نشان می‌دهیم.

تقدیر و تشکر

با سپاس از الطاف بیکران الهی و تشکر از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر احمدگلبابایی به پاس راهنمایی‌های ارزشمند و حمایت‌های بی‌دریغ ایشان در انجام این پایان‌نامه، بر خود لازم میدانم که از آقایان دکتر امین‌عطایی ، دکتر جلیل رشیدی‌نیا و دکتر خسرو مالک‌نژاد که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از خواهران مهربان و برادران عزیزم که همواره مشوّق و موجب دلگرمی من بودند تشکّر می‌کنم و برای آنها آرزوی پیروزی دارم.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه -- ۱

۱-۱- مقدمه -- ۲

۱-۲- توابع و عملگرها -- ۲

۱-۳- حل عددی دستگاه معادلات خطی -- ۶

۱-۴- فضای توابع -- ۸

۱-۵- خواص یک روش محاسباتی مؤثر -- ۹

فصل دوم

تقریب توابع چند متغیره وتوابع پایه شعاعی -- ۱۰

۲-۱- مقدمه -- ۱۱

۲-۲- فضای هار -- ۱۳

۲-۳- درونیابی -- ۱۶

۲-۳-۱- درونیابی با استفاده از چندجمله ایها -- ۱۶

۲-۳-۲- درونیابی شپارد -- ۱۹

۲-۳-۳- درونیابی با استفاده از توابع پایه شعاعی -- ۲۱

فصل سوم

روشهای تغییراتی و روش عناصر متناهی ---------------------------------- ۳۲

۳-۱- مقدمه -- ۳۳

۳-۲- روشهای تغییراتی -- ۳۴

۳-۲-۱- حالت کلی روش تغییراتی ---------------------------------- ۳۷

۳-۲-۲- روشهای تغییراتی کلاسیک ---------------------------------- ۳۸

۳-۳- روش عناصر متناهی -- ۴۴

۳-۳-۱- مراحل روش عناصر متناهی ---------------------------------- ۴۴

۳-۳-۲- برآورد مرتبۀهمگرائی در روش عناصر متناهی ------------------------ ۵۴

فصل چهارم

تقریب جوابPDE با استفاده از RBF به روش هم‌محلی -------------------------- ۵۶

۴-۱- مقدمه -- ۵۷

۴-۲- تقریب PDE با استفاده ازRBF ------------------------------------ ۵۸

۴-۲-۱- روش Kansa -- ۵۸

۴-۲-۲- روش محلی متقارن -- ۶۱

۴-۲-۳- روش مستقیم با استفاده از گرههای غیر مرزی -------------------------- ۶۲

۴-۳- اصلاح روش MQ برای روش هم‌محلی در کرانها -------------------------- ۶۴

۴-۴-کاربرد توابع پایه شعاعی در روش MFS-DRM برای تقریب PDE ----------- ۶۷

۴-۵- تحلیل همگرایی توابع پایه شعاعی برای تقریب PDE به روش هم‌محلی ---------- ۶۹

فصل پنجم

تحلیلهای عددی و نتایج -- ۷۱

۵-۱- مقدمه --- ۷۲

۵-۲- تقریب تابع با استفاده از ---------------------------------- ۷۳

۵-۳- بررسی عددی FEMو RBF برای تقریب جواب PDE -------------------- ۷۶

۵-۴- بررسی عدد شرطی ماتریس و خطا با تغییر پارامتر C--------------------- ۷۹

۵-۵- نتایج و پیشنهادات-- ۸۴

پیوست ۱ --- ۸۶

مراجع -- ۸۷

مقدمه:

برای بدست آوردن جواب PDE معمولاً از روشهای تقریبی استفاده می‌کنند. برای تقریب جواب PDE روشهای مختلفی مانند تفاضلات متناهی (FDM) ، روش عناصر متناهی (FEM) و روش عناصر کرانی و... وجود دارد. در روش تفاضلات متناهی برای تقریب مش‌بندی مستطیلی را بکار می‌برند. ولی مش‌بندی در اشکال غیر هندسی یا اشکال هندسی در ابعاد بالاتر کار ساده‌ای نیست [۹]. روشهای عناصر متناهی برای اشکال پیچیدهٔ هندسی قابل استفاده می‌باشد. ولی عمومی کردن مش‌بندی در سه بعدی (و ابعاد بالاتر)، برنامه نویسی این روش را پیچیده می‌کند.

در دو دههٔ گذشته توابع پایه شعاعی برای درونیابی توابع بکار گرفته شد. وبرای تعداد زیادی داده در فضای R^s جوابهای بهتری بدست آمد. سپس تئوری همگرایی تقریب، با توابع پایه شعاعی اثبات شد. کاربرد مستقیم توابع پایه شعاعی برای تقریب جواب PDE اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط کنسا (Kansa) صورت گرفت. در این روش، Kansa ، معادلات حاکم بر کل دامنه و کران را بر توابع پایه شعاعی اعمال کرد. سپس در شرایط درونیابی قرار داد. روش دیگری که از مقولهٔ درونیابی برای تقریب جواب PDE استفاده می‌شود، روش MFS-DRM می‌باشد. در این روش توابع پایه شعاعی یکتایی جواب حاصل از درونیابی را تضمین می‌کند. ویکی از مزایای مهم این روش این است که به ساختار شبکه‌ای نیاز ندارد. و می‌توان برای اشکال غیر هندسی بکار برد.

توابع پایه شعاعی بر اساس نرم اقلیدسی تعریف می‌شوند. به این دلیل براحتی برنامه نوشته شده در یک بعد دلخواه را می‌توان با تغییراتی در داده ها دیگر استفاده کرد. توابع پایه شعاعی دارای انواع مختلفی هستند. ما در اینجا بیشتر روی توابع شعاعی پارامتری تاکید می‌کنیم.

هاردی(Hardy) اولین بار در سال ۱۹۷۱ تابع پایه شعاعی MQ را برای درونیابی سطوح نقشه برداری بکار برد. و فرنك (Frank) در سال ۱۹۸۶ از توابع MQ برای درونیابی تعداد زیادی داده استفاده کرد. و نتایج بدست آمده نشان داد که تقریب خوبی حاصل می‌شود. ولی یکتایی جواب حاصل را نتوانستند اثبات کنند سرانجام در سال ۱۹۸۶ میچلی(Michelli) ثابت کرد که یکی از مقادیر ویژهٔ ماتریس حاصل از درونیابی منفی و بقیه مثبت هستند. پس سیستم خطی بدست آمده دارای جواب یکتا می‌باشد. و مدیچ (Medych) و نلسون (Nelson) همگرایی این روش را اثبات کردند.

مطالب این پایان‌نامه بدین صورت می‌باشد که در فصل اول به تعاریف و مفاهیم اولیه اشاره می‌کنیم. در فصل دوم تقریب توابع چند متغیره و توابع پایه شعاعی را توضیح می‌دهیم. در فصل سوم، مختصراً مطالبی از روشهای تغییراتی و عناصر متناهی آورده شده است. در فصل چهارم کاربرد توابع پایه شعاعی در تقریب جواب PDE بیان کرده و در فصل پنجم تحلیلهای عددی ونتایج کلی را می‌آوریم.

فصل اوّل

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱-۱- مقدمه:

در این فصل با توجه به مطالب فصلهای بعدی به تعاریف و مفاهیم اولیه لازم اشاره می‌کنیم. همچنین با توجه به اینکه تقریب جواب هر معادلهٔ دیفرانسیلی یا انتگرالی به حل سیستم خطی $AX=b$ می‌انجامد. مختصراً به حل دستگاه معادلات خطی می‌پردازیم. سپس به خواص یک رابطه محاسباتی خوب اشاره می‌کنیم.

۱-۲- توابع و عملگرها:

۱-۲-۱- تابع شعاعی[1]: فرض کنید x,y متعلق به فضای برداری دلخواه X باشد. و $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد تابع حقیقی مقدار F را روی X را شعاعی گوئیم، هرگاه $\|x\|=\|y\|$ آنگاه :

$$F(x)=F(y)$$

نتیجتاً یک تابع مانند $f:R^{+}\rightarrow R$ وجود دارد که:

$$F(x)=f\left(\|x\|\right)$$

نکته: فضای برداری را R^{s} و نرم را نرم اقلیدسی در نظر می گیریم [۱].

۱-۲-۲- توابع پایهٔ شعاعی[2]: مجموعه توابع $B=\{F_1,F_2,...,F_n\}$ را توابع پایهٔ شعاعی گوئیم هرگاه B یک پایه و هر یک از F_i ها یک تابع شعاعی باشد.

1 – radial function
2 – radial basis function

۱-۲-۳- تابعک[1]: یک تابع که تابعی مانند u را به اسکالر تصویر کند. تابعک نامیده می شود.

مثال: $I(u)=\int_a^b u(x).u^{'}(x)d(x)$

۱-۲-۴- تابعک ارزیاب نقطه‌ای[2] : فرض کنید فرض کنید V یک فضای برداری روی X و x یک گره در X باشد. آنگاه تابعک ارزیاب نقطه ای را به صورت x^* نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^*(f)=f(x) \qquad (f\in V)$$

واضح است که x^* خطی است.

۱-۲-۵- تابع هموار: تابع $\phi: R^s \to R$ هموار نامیده می شود. هرگاه مشتقاتش از هر مرتبه ای موجود باشد.

۱-۲-۶- توابع کاملا یکنواخت[3]: تابع f را $[0,\infty]$ در کاملا یکنواخت گوییم هرگاه:

۱. $f\in C[0,\infty]$

۲. $f\in C^{\infty}(0,\infty)$

۳. به ازای هر $t>0$, $k=0,1,2,3,....$ همواره : $(-1)^k f^k(t)>0$

۱-۲-۷- تعریف support:

فرض کنید $\Omega, G\subseteq R^n$ و $G \subset\subset \Omega$ $(\bar{G}\subset\Omega)$ اگر u تابعی تعریف شده روی Ω باشد. آنگاه Support(u) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sup p(u)=closure\{x\in G: u(x)\neq 0\}$$

گوئیم u دارای compact support در Ω است در صورتیکه:

$$\sup p(u)\subset\subset\Omega$$

1 - functional
2 – Point evaluation functional
3 – Completely monotone function

۱-۲-۸- عملگر خطی: عملگر Lدر روی فضای خطی، خطی نامیده می شود.در صورتیکه به ازای هر x, yمتعلق به دامنهٔ Lوهر اسکالر α, βداشته باشیم:

$$L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

۱-۲-۹- عملگر دوخطی[1]: تابعک $B(u,v)$ را دوخطی گوئیم هرگاه نسبت به دو آرگومان u,v خطی باشد.

۱-۲-۱۰- عملگر دیفرانسیل: فرض کنیم $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)\in Z_+^s$ یک بردار باشد. اگر به ازای هر $1<j<s$ $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ باشد آنگاه:

$$D^a=D_1^{a_1}D_2^{a_2}\cdots D_s^{a_s}$$

را عملگر دیفرانسل جزئی از مرتبه $|\alpha|$ گویند. و $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_s$

فرض کنیم Ω یک ناحیه باز ،کراندار وفشرده، با مرز $\partial\Omega$ در فضای برداری X باشد. عملگر دیفرانسیل خطی درحالت کلی به فرم زیر است:

$$Lu=\sum_{|\alpha|\cdot|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left[a_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}u(x)\right] \tag{۱-۱}$$

ضرایب $a_{\alpha\beta}$ و $u(x)$ توابع حقیقی مقدار، مشتق‌پذیر و دارای مشتق کراندار هستند. وبزرگترین مقدار $|\alpha|\cdot|\beta|$ را مرتبه معادله دیفرانسیل گویند.

حالتهای خاص از معادلات دیفرانسیل:

اگر معادله دیفرانسیل در فضای دو بعدی به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$A\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}C\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,u_x,u_y\right) \tag{۱-۲}$$

1 – Bilinear operator

که در آن A,B,C توابعی از x,y هستند. معادله (۲-۱) به ازای $B^2-4AC>0$ ، $B^2-4AC=0$ و به ترتیب هذلولی‌گون[1]، سهمی‌گون[2] و بیضی‌گون[3] نامیده می‌شود.

بعضی از معادلات علاوه بر متغیرهای وابسته به دامنه تعریف تابع، ممکن است به متغیر زمان نیز بستگی داشته باشد. به این معادلات اصطلاحاً، وابسته زمانی گفته می‌شود. و معادلات اکثراً روی کران $(\partial\Omega)$ به شکلهای مختلفی مشخص می‌شوند. و اگر معادله وابسته زمانی باشد. مقدار تابع در لحظه اول داده می‌شود. معادلات خاص مطرح شده با شرایط کرانی نیومن[4] و دیریکله[5] دارای جواب یکتا می‌باشند [۲].

۱-۲-۱۱- تابع دلتای دیراک[6]: تابع $\delta(x)$ را دلتای دیراک گویند. هرگاه:

$$\delta(x-\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & \|x-\xi\|<\varepsilon\\ 0 & \|x-\xi\|\geq\varepsilon\end{cases} \tag{۱-۳}$$

نکته: به ازای هر تابع پیوسته و دلخواه $f(x)$ داریم:

$$\int_{\Omega} f(x).\delta(x-\xi)dx=f(\xi) \tag{۱-۴}$$

۱-۲-۱۲- تبدیل لاپلاس: اگر f یک تابع حقیقی مقدار بر $[0,\infty)$ باشد. تبدیل لاپلاس $f(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(s)=L(f)=\int_0^{\infty} e^{-sx}f(x)dx$$

۱-۲-۱۳- تبدیل فوریه: اگر f یک تابع از R^s به R باشد. تبدیل فوریه f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{f}_x=\int_{R^s} f(y).e^{ixy}dy$$

1 - hyperbolic
2 - parabolic
3 - elliptic
4 - Neuman
5 - Diricleh
6 – Dirac delta function

۱-۳- حل عددی دستگاه معادلات خطی:

روشهای حل عددی معادلات با مشتقات جزئی به حل دستگاه معادلات خطی $A.X=b$ ختم می‌شود. که A یک ماتریس $n\times n$و b یک بردار $n\times 1$ و X مجهول $n\times 1$ است. روشهای عددی زیادی برای حل این دستگاهها وجود دارد.می توان به روشهای زیر اشاره کرد:

۱. روش حذفی گاوس
۲. روش فاکتورگیری LU
۳. روش ژاکوبی
۴. روش گاس سایدل

البته غیر از روشهای بالا روشهای دیگری نیز وجود دارد. اما در حل معادلات با هر یک از روشها دستگاه باید خوش وضع باشد چون در غیر این صورت خطای محاسباتی زیاد می‌شود.

۱-۳-۱- شرط خوش وضع بودن:

اگر دستگاه $A.X=b$ را به هر روش حل کنیم، و اختلال کوچکی در هر یک از آرگومانهای مساله ایجاد کنیم. آنگاه کران تغییرات برای خطای نسبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\left\|x-\bar{x}\right\|}{\left\|x\right\|}\leq\left(\frac{cond(A)}{1-cond(A)\dfrac{\left\|\delta A\right\|}{\left\|A\right\|}}\right)\left(\frac{\left\|\delta A\right\|}{\left\|A\right\|}+\frac{\left\|\delta b\right\|}{\left\|b\right\|}\right) \qquad (۱-۵)$$

در رابطه ۵-۱ ، δAو δb بترتیب مقدار اختلال د ر A و. b و $\|\cdot\|$ تابع نرم می باشد.و x، $\bar{x}$ بترتیب جواب دقیق و تقریبی دستگاه می‌باشد [۳].

و $cond(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$ را عدد شرطی[1] ماتریس A گویند هر چه عدد شرطی بزرگتر باشد ماتریس بدوضع می‌شود. و هر قدر عدد شرطی به یک نزدیکتر شود دستگاه از حالت بد وضعی به حالت خوش وضعی می‌رسد. وهمواره با توجه به خواص نرم داریم:

$$cond(A) = \|A\|.\|A^{-1}\| \geq 1 \tag{۱-۶}$$

همچنین با توجه به خواص نرم و رابطهٔ آن با مقادیر ویژه داریم:

$$cond(A) \cong \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \tag{۱-۷}$$

$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژهٔ ماتریس از نظر اندازه می‌باشد.

در روش فاکتورگیری LU (L,U به ترتیب ماتریسهای پائین مثلثی وبالامثلثی می‌باشند) معمولا از روشهای چولسکی و دولتیل استفاده می کنند. ولی اگر ماتریس متقارن ومعین مثبت باشد. آنگاه تجزیه LU به صورت LL^t می باشد. به طوریکه تعداد مراحل محاسباتی در این حالت کاهش پیدا می کند [۳].

۱-۳-۲- ماتریسهای معین مثبت: ماتریس $A_{n\times n}$ را معین مثبت گویند هرگاه به ازای هر بردار $x \in C^n$ داشته باشیم:

$$x^t.A.x > 0$$

(x^t ترانهاده x است)

خواص ماتریسهای معین مثبت:

۱. همواره وارون پذیرند.

۲. اگر متقارن باشند. دارای تجزیه ای به صورت LL^t می باشند.

۳. عناصر روی قطر اصلی ،مثبت است.

1 – Condition number

۴. همهٔ مقادیر ویژه، مثبت است.

۵. مجموع، ماتریسهای معین مثبت، معین مثبت است.

۶. ترکیب خطی مثبت از ماتریسهای معین مثبت ،معین مثبت است.

۱-۴- فضای توابع:

۱-۴-۱- تعریف: مجموعهٔ $\{x_1, x_2,...x_n\}$ از نرمدار خطی کامل در Xنامیده می‌شود. در صورتی که هر $x \in X$ را بتوان به صورت ترکیب خطی متناهی از x_iها تقریب زد. یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0, \quad x \in X$ عدد صحیح و اسکالرهائی مانند $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$موجود باشند. بطوریکه:

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . x_i \right\| < \varepsilon$$

اگر مجموعه$\{x_i\}$در X کامل وکراندار باشند(تمام زیر مجموعه های متناهی آن مستقل خطی باشند) آنگاه$\{x_i\}$ها یک پایه برای Xاست و می نویسیم:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i . x_i$$

۱-۴-۲- تعریف : فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار باشد. اگر به ازای هر $0 < p < \infty$ مقدار انتگرال تابع $|f|^p$ در فضای X موجود باشد.آنگاه مجموعه این توابع را با L^p نشان می دهیم. به عبارت دیگر:

$$f \in L^p(X) \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p dx < \infty$$

۱-۴-۳- فضای سوبولوف [1]: مجموعه توابعی که مشتقاتش از درجه $|\alpha| = k$ موجود وعضو فضای $L^2(\Omega)$ باشد. تشکیل فضای سوبولوف می‌دهند. و با $H^k(\Omega)$ نشان می‌دهند.

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : D^{\alpha}(f) \in L^2(\Omega), |\alpha| \le k \right\} \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

1 – sobolev space

۱-۴-۴- تعریف: اگر $f(h), g(h)$ دو تابع از h باشد. همواره $g(h) \neq 0$ و داشته باشیم:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0$$

در این صورت می‌گوییم؛ $f(h) = O(g(h))$ و اگر $g(h) = h^l$ آنگاه :

$$f(h) = O(h^l)$$

و $f(h)$ سریعتر از h^l به صفر میل می کند. و l را مرتبۀ همگرایی گویند.

نکته : اگر u یک تابع حقیقی مقدار در فضای X باشد.و $\overline{u}$ تقریبی از u باشد.و اگر داشته باشیم:

$$E = \|u - \overline{u}\| < C.g(h)$$

آنگاه گوییم:　$E = O(g(h))$

۱-۵- خواص یک روش محاسباتی مؤثر:

روشهای محاسباتی که درتقریب استفاده می‌شوند هرکدام ویژگیهای خاصی دارند. خواص یک رابطۀ محاسباتی مؤثر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۴]:

۱. روش باید از نظر ریاضی درست ودارای پایه فیزیکی باشد.

۲. روش نباید به شکل هندسی و ساختار فیزیکی دامنه محدود باشد

۳. فرایند فورموله کردن نباید به شکل دامنه و شرایط مرزی وابسته باشد.

٤. روش باید انعطاف پذیر باشد تا بتوانیم آن را در مسائل مشابه دوباره استفاده کنیم.

۵. روش باید به یک روش سیستماتیک منجر شود. تا بتوانیم به صورت خودکار استفاده کنیم.

فصل دوّم

تقریب توابع چند متغیره

و

توابع پایه شعاعی