بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد
ریاضی‌محض، گرایش هندسه

مطالعه‌ی تکینی‌های شار خمیدگی میانگین زیرخمینه‌های لاگرانژی

نگارنده

ابوالفضل شعبانی

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقر کاشانی

اسفند ۱۳۸۹

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای ابوالفضل شعبانی** رشته **ریاضی‌محض** تحت عنوان: **«مطالعه تکینی‌های شار خمیدگی میانگین زیر خمینه‌های لاگرانژی»** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر علی رجایی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	استادیار	ناصر بروجردیان
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

پیشکش به

پدرم و مادرم

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده 1: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده 2: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته است که در سال در دانشکده دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده 3: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده 4: در صورت عدم رعایت ماده 3، 50٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده 5: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده 4 را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده 6: اینجانب ابوالفضل شعبانی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد

تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: ابوالفضل شعبانی

تاریخ و امضا:

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده 1- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده 2- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده 3- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده 4- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده 5- این آیین‌نامه در 5 ماده و یک تبصره در تاریخ 87/4/1 در شورای پژوهشی و در تاریخ 87/4/23 در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ 87/7/15 شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب..............................دانشجوی رشته........................ ورودی سال تحصیلی........................ مقطع .... دانشکده .... متعهد می شوم کلِیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:.......................

تاریخ: ....

سپاس فراوان از استاد گرانمایه

جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی

که راهنما و آموزگارم در این دوران بودند.

چکیده

در این پایان‌نامه پس از ارایه‌ی پیش‌نیازهای هندسی و بیان شارخمیدگی‌میانگین لاگرانژی، تکینی‌های این شار بررسی می‌شود. برای این کار در بند دوم پایان‌نامه، پیوندی که بین زیرخمینه‌های لاگرانژی یکنوا با پاسخ‌های خودسان رُمبنده هست، به‌کار گرفته می‌شود و قضیه‌هایی درباره‌ی زمان رخ‌دادن تکینی و گونه‌ی آن اثبات می‌شود. در دو بخش پایانی شار برای زیرخمینه‌های لاگرانژی هموردا بررسی می‌شود. چون شارخمیدگی‌میانگین یکروند است، هموردایی با شار پایدار می‌ماند، ازاین‌رو شارخمیدگی‌میانگین از شار خم‌های نمایه به‌دست می‌آید. همچنین برای تکینی‌های گونه‌ی یکم و دوم نمونه‌هایی ارایه می‌شوند. مرجع اصلی این پایان‌نامه [۱۰] است.

کلمات کلیدی: شارخمیدگی‌میانگین هموردا، زیرخمینه‌ی لاگرانژی، شارخمیدگی‌میانگین

فهرست

نگاره‌ها

بند ۱

پیش‌گفتار

بررسی و شناخت ویژگی‌های توپولوژیک و هندسی خمینه‌ها در نیمه نخست سده‌ی گذشته‌ی میلادی پرسش‌هایی را پیش‌روی ریاضی‌دانان نهاد که با ابزارهای آن زمان برای برخی از آنها پاسخی یافت نشد. یکی از نام‌آورترین این‌ها حدسیه پوانکاره بود.

در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ هندسه‌دانان رویکردی را به هندسه افزودند که پیشتر فیزیکدانان از آن سود برده بودند. در این کار، به جای بررسی هندسه‌ی پایا، آنرا در گذر زمان دگرگون کرده و دوباره بررسی می‌کردند. پارامتر زمان دنیای هندسه‌ی دیفرانسیل را پویایی بخشید. یکی از مناسب‌ترین این روش‌ها به کارگیری معادله‌ی گرما برای دگرگون کردن یک ساختار هندسی بر خمینه می‌باشد. نمونه‌هایی از این کار، شار ریچی و شارخمیدگی‌میانگین می‌باشد که هر دو معادله‌ی گرما را به‌کار می‌گیرند.

شار ریچی متریک خمینه را براساس خمیدگی ریچی آن دگرگون می‌نماید و بنابراین هندسه‌ی درونی خمینه ناپایدار می‌شود.

شارخمیدگی‌میانگین برای زیرخمینه‌ای در یک خمینه‌ی ثابت تعریف شده و هندسه‌ی زیرخمینه را در راستای میدان برداری خمیدگی‌میانگین دگرگون می‌نماید.

ریچارد همیلتون این دو شار را سال‌های ۱۹۸۲ و ۱۹۸۴ برای اثبات حدسیه پوانکاره به کار گرفت. پایان اثبات حدسیه پوانکاره را که رده‌بندی برخی تکینی‌های شار ریچی بر خمینه‌های سه‌بعدی و ارایه‌ی جراحی‌ها بود، گریشا پرلمان در سه مقاله در سال‌های ۲۰۰۲ تا ۲۰۰۳ ارایه داد.

یکی از انگیزه‌های ریاضی‌دانان برای بررسی شارهای هندسی دیگر همچون شارخمیدگی‌میانگین به‌دست آوردن اثباتی ساده‌تر برای حدسیه‌ی پوانکاره می‌باشد. از دیگر کاربردهای این شار، یافتن زیرخمینه‌هایی ویژه در خمینه‌ای داده شده و اثبات بودن یا یافتنی نبودن رده‌هایی از خمینه‌هاست. برای نمونه به مقاله‌های آندره نِوس [۱] در این زمینه نگاه کنید. همچنین این شار کاربردهایی در علوم و تکنولوژی دارد، مانند پردازش نگاره‌ها.

[۱] Andere Neves

بررسی و شناخت این شار نخست برای خم‌ها صورت گرفت و چون شارخمیدگی‌میانگین کمین کننده‌ی درازای خم‌هاست، آنرا شار کوتاه‌کننده‌ی خم [۲] نیز گویند.

ابررویه‌ها زیرخمینه‌هایی با نقص‌بعد یک می‌باشند و فضای نرمال آنها گستره‌ی (بعد) یک دارد. بنابراین فرم‌اساسی‌دوم و خمیدگی‌میانگین بر آنها ساده‌تر از نقص‌بعدهای بالاتر بیان می‌شوند. این ویژگی ابررویه‌ها به ریاضی‌دانان شناخت بسیاری از رفتار شارخمیدگی‌میانگین بر ابررویه‌ها را داده است. ولی برای نقص‌بعدهای بالاتر رفتار این شار بسیار ناشناخته مانده است.

شاید ساده‌ترین زیرخمینه پس از ابررویه‌ها که ابزارهایی بسیارخوب برای بررسی رفتار شارخمیدگی‌میانگین بر آن یافت می‌شود، زیرخمینه‌های لاگرانژی در خمینه‌های کیلری باشد، زیرا برای آنها فضای‌عمود و فضای‌مماس در هر نقطه یکریختند و این یکریختی با ساختار مختلط J داده می‌شود.

برای اینکه بتوان از یک ویژگی زیرخمینه‌ای در هر زمان پاسخ شارخمیدگی‌میانگین بهره برد، نخست باید نشان داد که این ویژگی با شار پایدار می‌ماند. خوشبختانه سامه‌ی (شرط) لاگرانژی بر زیرخمینه‌های فروبرده‌شده در خمینه‌ی کیلری-آینشتاین [۳] با شارخمیدگی‌میانگین تا زمانی که پاسخ هموار داشته باشیم، پایدار می ماند. اثبات پایداری سامه لاگرانژی را نخستین بارِ اسماشیک [۴] برای یک فروبری لاگرانژی در خمینه‌های کالابی-یاو [۵] در سال ۱۹۹۶ در [۲۲] ارایه داد، اثبات وی گسترش‌یابنده به خمینه‌های کیلری-آینشتاین بود [۱۸] ، که در پایان‌نامه پسادکتری وی در سال ۱۹۹۹ آمده است. اثباتی دیگر از پایداری سامه‌ی لاگرانژی را در سال ۲۰۰۲ در مقاله‌ای از وانگ [۶] می‌توان دید.

معادله‌ی شارخمیدگی‌میانگین سهموی است و بنابر نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل برای زمانی کوتاه پاسخ دارد و در زمان‌تکین تکینی می‌گستراند. شناسایی این تکینی‌ها و رفتار شار در زمان‌تکین برای ریاضی‌دانان ارزشمند است.

این پایان‌نامه دارای چهار بند می‌باشد. در نخستین اینها برخی پیشنیازهای بایسته برای شارخمیدگی‌میانگین لاگرانژی‌یکنوا آورده شده است. بندهای دوم تا چهارم به بازشکافی و فرانمون نوشتارهای مرجع [۱۰] می‌پردازد.

[۲] curve shortening flow

[۳] Kähler-Einstein

[۴] Smoczyk

[۵] Calabi-Yau

[۶] Mu Tao Wang

سخنی با خوانندگان

در این پایان‌نامه به جای برخی واژه‌های بیگانه برابر پارسی آنها به‌کار گرفته شده است. برگزینش بیشتر این واژه‌ها از واژه‌نامه‌ی دهخدا و واژه‌نامه‌ی پارسی سره دکتر کزازی می‌باشد. شاید برخی از این واژه‌ها برای خوانندگان تازگی داشته باشد. در اینجا آنها را بیان می‌کنیم

برساخته ⟵ fake

بسامان ⟵ regular/منظم

پرهون ⟵ circle/دایره

پی‌گر ⟵ function/تابع

پیوست ⟵ adjoint/الحاق

تند ⟵ austere

چم ⟵ definition/معنی

دستگاه ⟵ coordinate/مختصات

دستگاه همارا ⟵ دستگاه مختصات

دوکاوی ⟵ hyperbolic/هذلولوی

رام ⟵ tamed

رج ⟵ line/خط

رُمبش ⟵ collapse

سامه ⟵ condition/شرط

سپهر ⟵ sphere/کره

کارور ⟵ operator/عملگر

کوهک ⟵ cone/مخروط

کوهک کمین ⟵ minimal cone

گرداری ⟵ Elliptic

گستره ⟵ dimention/بعد

گوشه ⟵ angle/زاویه

گوی ⟵ disk

فراگستری/آماساندن ⟵ Blow up

فردید ⟵ منظور

نگاره ⟵ picture/تصویر

هموستار ⟵ connection/التصاق

بند ۲

پیش‌نیازها

در این بند از پایان‌نامه پیش‌نیازهای بایسته با بهره‌گیری از [۲۰] ، [۳۱] و [۹] ارایه می‌شود.

۱.۲ هموستار، خمیدگی،لاپلاسین

$(M, g = \langle .,. \rangle)$ را یک خمینه ریمانی با گستره‌ی(بعد) m بگیرید. هموستار یکتای لوی‌چویتا بر کلاف مماس M سازگار با متریک، به چم

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \ .$$

و بدون تاب، به چم

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = XY - YX$$

را داریم.

می‌توان این هموستار را بر برش‌های هر کلاف تانسوری گسترش داد، چنانکه لایبنیتسی و با انقباض‌گیری از تانسورها سازگار باشد.

X ، Y ، Z ، W ، U و V را میدان‌های برداری مماسی بر M بگیرید. تانسور خمیدگی ریمانی

$$Rm\left(X, Y\right) Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

می‌باشد. و $Rm\left(X, Y, Z, W\right) = \langle Rm\left(X, Y\right) Z, W \rangle$ تقارن‌های پایین را دارد.

$$Rm\left(X, Y, Z, W\right) = -Rm\left(Y, X, Z, W\right) \text{ و } Rm\left(X, Y, Z, W\right) = Rm\left(Z, W, X, Y\right) \ .$$

یکانی بیانکی نخست:

$$Rm\left(X, Y, Z, W\right) + Rm\left(Y, Z, X, W\right) + Rm\left(Z, X, Y, W\right) = 0 \ . \qquad (۱.۲)$$

یکانی بیانکی دوم:

$$\left(\nabla_X Rm\right)(U,V,Y,Z)+\left(\nabla_Y Rm\right)(U,V,Z,X)+\left(\nabla_Z Rm\right)(U,V,X,Y)=0\ . \quad (۲.۲)$$

برای $f\in C^\infty(M)$ ، گرادیان f که با ∇f نمایش می‌دهیم، یک میدان برداری مماسی است که برای هر X

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X)\ .$$

هسیان f یک -$(0,2)$تانسور متقارن است که با $\nabla^2 f$ نمایش داده می‌شود و

$$\nabla^2_{X,Y} f = XYf-\left(\nabla_X Y\right) f\ .$$

تانسورهایی نو را می‌توان با انقباض‌گیری از تانسورهای پیشین به‌دست آورد. برای این کار، یک پایه یکه‌متعامد $\{e_A\}_{A=1}^n$ برای کلاف مماس بگیرید.

نکته ۱.۱.۲. در سراسر این پایان‌نامه، نشان‌گزاری ساده‌ی آینشتاین را به‌کار می‌بریم. به چم اینکه بر نشانگرهای تکراری بالا و پایین تانسور، جمع می‌بندیم.

از تانسور خمیدگی ریمان، تانسور خمیدگی ریچی Ric و خمیدگی شماره‌ای R را به‌دست می‌آوریم.

$$Ric(X,Y)=\sum_{e_A} Rm\left(X,e_A,Y,e_A\right)$$

$$R=\sum_{e_A} Ric\left(e_A,e_A\right)\ .$$

لاپلاسین f ، اثر $\nabla^2 f$ می‌باشد:

$$\Delta f = tr\left(\nabla^2 f\right)=\sum_{e_A}\nabla^2_{e_A,e_A} f=\sum_{e_A}\langle \nabla_{e_A}\nabla f, e_A\rangle=\sum_{e_A}\left(\nabla_{e_A} df\right)(e_A)\ .$$

لاپلاسین تانسور T :

$$\Delta T = tr\nabla^2 T=\sum_{e_A}\nabla^2_{e_A,e_A} T\ .$$

نکته ۲.۱.۲. همیشه می‌توان برای سادگی نوشتن یک تانسور در نقطه‌ی p ، دستگاه نرمال به کار برد. برای هر پایه‌ی یکه‌نرمال T_pM ، یک دستگاه $\{y^A\}$ نزدیک p چنان یافت می‌شود که در این نقطه $e_A=\frac{\partial}{\partial y^A}$ و $\nabla_{e_A} e_B=0$.

۲.۲ فرم‌های دیفرانسیل بیرونی بر خمینه‌های ریمانی

(M^n,g) را یک خمینه‌ی ریمانی فشرده و جهت‌دار، با فرم گنجایش dV_g بگیرید. برای دو k-فرم α و β بر M ، ضرب‌درونی نقطه‌ای چنین تعریف می‌شود

$$(\alpha,\beta)=\alpha_{a_1\ldots a_k}\beta_{b_1\ldots b_k}g^{a_1b_1}\ldots g^{a_kb_k}\in C^\infty(M)$$

L^2 ضرب‌درونی α و β نیز چنین تعریف می‌شود.

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha, \beta)\, dV_g$$

ستاره‌ی هاج یکریختی بین کلاف‌های برداری پایین می‌باشد

$$* : \Lambda^k T^* M \to \Lambda^{n-k} T^* M$$

که $*\beta$ ، $(n-k)$-فرم یکتایی است که برای هر k-فرم α بر M

$$\alpha \wedge (*\beta) = (\alpha, \beta)\, dV_g$$

$$*\, 1 = dV_g$$

$$*\,(*\beta) = (-1)^{k(n-k)} \beta$$

پیوست منفی مشتق بیرونی d چنین تعریف می‌شود

$$d^\dagger : C^\infty\left(\Lambda^k T^* M\right) \to C^\infty\left(\Lambda^{k-1} T^* M\right)$$

$$d^\dagger \beta = (-1)^{kn+n+1} * d(*\beta)$$

کارور دیفرانسیل پاره‌ای گرداری و خطی d-لاپلاس چنین تعریف می‌شود

$$\Delta : C^\infty\left(\Lambda^k T^* M\right) \to C^\infty\left(\Lambda^k T^* M\right)$$

$$\Delta = dd^\dagger + d^\dagger d$$

۳.۲ زیرخمینه‌های فروبرده‌شده و فرم اساسی دوم

$F : \Sigma^n \to M^m$ را یک فروبری هموار بگیرید و $\left\{y^A\right\}_{A=1}^m$ یک دستگاه موضعی بر M با تانسور متریک $g_{AB} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^A}, \frac{\partial}{\partial y^B} \right\rangle$ و $\left\{x^j\right\}_{j=1}^n$ دستگاه موضعی بر Σ^n باشد. از آنجا که F فروبری‌ست. فضای مماس Σ در p را می‌توان با $F_* T_p \Sigma$ یکی گرفت، که زیرفضای برداری $T_{F(p)} M$ ساخته‌شده با $\left\{F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right\}_{j=1}^n$ می‌باشد.

بگیرید $F^A = y^A o F$ ، آنگاه $F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial F^A}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^A}$. متریک g_{AB} ، بر Σ متریک σ_{ij} را می‌سازد که

$$\sigma_{ij} = \left\langle F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \right\rangle = \frac{\partial F^A}{\partial x^i} \frac{\partial F^B}{\partial x^j} g_{AB} \; .$$

مکمل عمودی $F_* T_p \Sigma$ در $T_{F(p)} M$ را با $N_p \Sigma$ نمایش داده و فضای عمود Σ در نقطه‌ی p نامند. برای بردار $V \in T_{F(p)} M$ ، افکنش V بر $F_* T_p \Sigma$ را بخش مماسی، $V^\top$ ، و بر $N_p \Sigma$ را بخش عمودی، $V^\perp$ نامند.

$$V^\top = \left\langle V, F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \right\rangle \sigma^{ij} F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \in F_* T_p \Sigma \; ,$$

$$V^{\perp} = V - V^{\top} \in N_p\Sigma \ .$$

σ^{ij} وارون ماتریس σ_{ij} می‌باشد.

هموستار لوی‌چویتا بر M ، بر Σ یک هموستار می‌دهد که برای هر دو میدان برداری مماسی X و Y

$$\nabla^{\Sigma}_X Y = \left(\nabla^M_X Y\right)^{\top} \ .$$

∇^{Σ} همان هموستار لوی‌چویتای متریک σ_{ij} بر Σ می‌باشد.

اگر V یک میدان برداری نرمال بر Σ باشد. هموستار نرمال، ساخته‌شده بر کلاف نرمال چنین می‌باشد:

$$\nabla^{\perp}_X V = \left(\nabla^M_X V\right)^{\perp} \ .$$

خمیدگی کلاف نرمال چنین است:

$$Rm^{\perp}(X,Y)V = -\nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y V + \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X V + \nabla^{\perp}_{[X,Y]} V$$

تعریف ۱.۳.۲. فرم اساسی دوم II بر Σ ، برشی از کلاف تانسوری $T^*\Sigma \otimes T^*\Sigma \otimes N\Sigma$ است

$$II(X,Y) = \left(\nabla^M_X Y\right)^{\perp} = \nabla^M_X Y - \left(\nabla^{\Sigma}_X Y\right) \ .$$

اگر $\{e_i\}_{i=1}^n$را پایه‌ای یکه‌متعامد برای $T_p\Sigma$ بگیریم و $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ برای $N_p\Sigma$ ، آنگاه مولفه‌های فرم اساسی دوم چنین است.

$$h_{\alpha ij} = \frac{1}{n}\sum_{e_i}\left\langle \nabla^M_{e_i} e_j, e_\alpha \right\rangle \ . \tag{۳.۲}$$

تعریف ۲.۳.۲. بردار خمیدگی میانگین

$$\overrightarrow{H} = \sum_{e_i} II(e_i,e_i) = \sigma^{ij}\left(\nabla^M_{F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)} F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)^{\perp} \ . \tag{۴.۲}$$

گزاره ۳.۳.۲. اگر $M = \mathbb{R}^m$ و

$$F : \Sigma \to \mathbb{R}^m$$
$$F = \left(F^1\left(x^1,...,x^n\right),...,F^n\left(x^1,...,x^n\right)\right)$$
$$H^F = \left(\nabla^{\Sigma}\right)^2 F := \left(\left(\nabla^{\Sigma}\right)^2 F^1,...,\left(\nabla^{\Sigma}\right)^2 F^n\right)$$

آنگاه هسیان F به‌دست‌آمده از هموستار ∇^{Σ} برابر فرم اساسی دوم Σ می‌باشد.

اثبات.

$$
\begin{aligned}
H^{F^j} &= \left(\nabla^\Sigma\right)^2_{X,Y} F^j = XYF^j - \left(\nabla^\Sigma_X Y\right) F^j \\
&= XdF^jY - dF^j\left(\nabla^\Sigma_X Y\right) \\
&= F^j_*\left(X\right)\left(F^j_*\left(Y\right)\right) - \nabla^\Sigma_{F^j_*(X)} F^j_*\left(Y\right) \\
&= II\left(F^j_*\left(X\right), F^j_*\left(Y\right)\right) \\
\left(\nabla^\Sigma\right)^2 F &= \left(\left(\nabla^\Sigma\right)^2 F^1, ..., \left(\nabla^\Sigma\right)^2 F^n\right) = II
\end{aligned}
$$

□

پی‌آمد ۴.۳.۲. اگر $M = \mathbb{R}^m$ آنگاه خمیدگی‌میانگین Σ با لاپلاسین F به‌دست آمده از متریک $\sigma = F^*g$ برابر است.

اثبات.

$$
\begin{aligned}
&\Delta F = \left(\Delta F_1, \cdots, \Delta F_n\right) \\
&\overrightarrow{H} = tr_\sigma II = tr_\sigma \left(\nabla^\Sigma\right)^2 F = \Delta^\Sigma F
\end{aligned}
$$

□

نمونه ۵.۳.۲. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ را باز بگیرید و $n > 1$. برای نگاشت هموار $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ، نمودار آن Γ_u ابررویه‌ای در $\mathbb{R}^{n+1}$ می‌باشد، با نگاشت

$$
\begin{aligned}
&F : \Omega \to \Omega \times \mathbb{R} \\
&F\left(x\right) := \left(x, u\left(x\right)\right) \in \mathbb{R}^{n+1} .
\end{aligned}
$$

اگر دستگاه همارای $\left(x^i\right)_{i=1,\cdots,n}$ را بر Ω بگیریم، بردارهای مماسی $dF\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ چنین است.

$$
\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} .
$$

متریک ریمانی القایی σ_{ij} بر Γ_u :

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right\rangle = \delta_{ij} + u_i u_j \\
&\sigma^{ij} = \delta^{ij} - \frac{1}{\varpi^2} \delta^{ik} u_k \delta^{jl} u_l \\
&\varpi := \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \left(u_i\right)^2} .
\end{aligned}
$$