دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی‌ارشد (M.Sc.)

گرایش: تحقیق در عملیات

عنوان:

داده‌های نسبی در تحلیل پوششی داده‌ها

استاد راهنما:

دکتر مهدی طلوع

استاد مشاور:

دکتر قاسم توحیدی

نگارش:

سارا حسن‌نژاد

تابستان ۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها

۱-۱ مقدمه

DEA روش علمی است که کاربرد وسیعی در برآورد عملکرد بسیاری از داده‌ها را دارد. از زمان‌های قدیم استفاده بهینه از منابع موجود، همواره بیشتر مورد توجه بشر بوده است. محدودیت عواملی چون سرمایه، نیروی انسانی و انرژی، مدیران ارشد را به این فکر واداشت که روشی برای استفاده بهینه از این عوامل را پیدا کنند. در این راستا استفاده از روش‌های علمی به منظور ارزیابی واحدها مورد توجه بیشتر قرار گرفت. از طرفی اطلاع از عملکرد واحدهای تحت امر مدیر، مهمترین وظیفه مدیریت در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب جهت کنترل آنان است.

پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار زیاد عملکرد، اثرات عوامل بیرونی، اثرات واحدهای رقیب بر عملکرد، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب، تغییرات ناگهانی خط‌مشی به علت برخوردهای انفعالی با مشکلات حاد مانند بیکاری از عواملی است که مدیر بودن برخورد علمی نمی‌تواند از کارکرد واحد مطلع و تصمیم‌گیری مناسبی در جهت بهبود کارایی[1] و بهره‌وری اتخاذ نماید.

1) Efficiency

تاریخچه: اولین بار فارل در سال ۱۹۵۷ تحقیقات گسترده‌ای برای تعیین کارایی روش‌های غیرپارامتری انجام داد. او با استفاده از ورودی‌ها و تک خروجی‌های تصمیم‌گیری[1]، تابع مرزی را چنان بر مجموعه ورودی‌ها و تک خروجی برازش داد که حاصل برازش فوق یک تابع قطعه‌قطعه[2] خطی بود. او در سال ۱۹۷۸ مورد توجه کوپر[3]، چارنز[4] و رودز[5] (CCR) قرارگرفت. آنها تحلیل اولیه فارل که در حالت تک خروجی و چند ورودی مطرح شد را به حالت چند ورودی و چند خروجی تعمیم دادند و پس از آن بنکر و چارنز و کوپر در سال ۱۹۸۴ مدل BCC را ارائه دادند و این دو مقاله پایه بسیاری از مطالعات تحلیل کارایی شدند و این شاخه از علم تحقیق در عملیات به سرعت پیشرفت کرده و تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها نام گرفت.

۱-۲ تابع تولید[6]

برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری نیاز به تولید داریم. پیچیدگی مسائل، حجم بسیار اطلاعات و ... از عواملی است که بدون برخورد علمی با آنها راه‌کار مناسبی در جهت بهره‌وری حاصل نمی‌شود و در این صورت رابطه عملکرد با عوامل تأثیرگذار تابعی است که به تابع تولید معروف است. به صورت $y = f(u, v)$ تعریف می‌شود که در آن بردار ورودی (u, v) خروجی y را تولید می‌کند. بردار ورودی از دو قسمت تشکیل شده است. u عوامل قابل کنترل و v عوامل غیرقابل کنترل است و f را تابع تولید گویند و تابعی است که از ترکیب ورودی‌ها ماکزیمم خروجی را تولید می‌کند. در اغلب موارد به دلیل پیچیدگی فرآیند تولید، تغییر در تکنولوژی و چند مقداره بودن تولید، صورت دقیق تابع تولید در دسترس نیست از این رو ناچاریم تقریبی از تابع تولید داشته باشیم.

تقریب تابع تولید به دو صورت امکان‌پذیر است:

۱ـ روش‌های پارامتری

۲ـ روش‌های غیرپارامتری

1) Decision Making Units 2) Piecewise Linear 3) Cooper 4) Charnes 5) Rodes
6) Production Function

۱-۲-۱ روش‌های پارامتری برای تقریب تابع تولید

در این روش، شکل خاصی از یک تابع برای تخمین زدن تابع تولید درنظر می‌گیرند و با استفاده از روش‌های ریاضی، پارامترهای تابع را مشخص می‌کنند، روش‌های پارامتری دو شکل عمده دارند. یکی این که شکل تابع تولید از قبل مشخص نیست و دیگر این که برای سیستم‌هایی با یک خروجی مناسب است. بدین ترتیب فارل[۱] در سال ۱۹۵۷ روش غیرپارامتری را ارائه نمود.

۱-۲-۲ روش غیرپارامتری برای تقریب تابع تولید

فارل با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های یک واحد تصمیم‌گیری تابع مرزی را چنان بر مجموعه‌ای از خروجی‌ها و ورودی‌ها برازش داد که حاصل برازش فوق یک تابع قطعه‌قطعه خطی به وجود آورد او یک مجموعه امکان تولید[۲] ساخت و مرز آن را تقریبی از تابع تولید در نظر گرفت. کار فارل اساس کار چارنز، کوپر، رودز در سال ۱۹۷۸ قرار گرفت. آنها با توجه به مجموعه امکان تولیدی که فارل معرفی کرده بود روش CCR را برای محاسبهٔ کارایی واحدهای تصمیم‌گیری معرفی کردند. سپس از آن مدل‌های زیادی از جمله BCC، SBM و FDH و...معرفی شدند که با توجه به شرایط حاکم بر سیستم می‌توان از آنها استفاده کرد.

۱-۳ ورودی[۳] و خروجی[۴]

به طورکلی هر عاملی که افزایش آن با ثابت ماندن سایر عوامل باعث افزایش کارایی شود، خروجی و هر عاملی که افزایش آن با ثابت ماندن سایر عوامل باعث کاهش کارایی شود، ورودی درنظر گرفته می‌شود.

۱-۴ مجموعه امکان تولید

فرض کنید، به دنبال ارزیابی n واحد تصمیم‌گیری، $\mathrm{DMU}_۱, \dots, \mathrm{DMU}_n$ هستیم که هر کدام از واحدها بردار ورودی $x_j \in R^m$ را جهت تولید بردار خروجی $y_j \in R^s$ به کار می‌گیرند.

1) Farell 2) Product Possibility Set (PPS) 3) Input 4) Output

فرض کنیم تمامی ورودی‌ها و خروجی‌های یک DMU نامنفی‌اند و هر کدام از DMUها حداقل یک ورودی مثبت و یک خروجی مثبت دارد.

مجموعه امکان تولید n واحد تصمیم‌گیری با m ورودی $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ و s خروجی $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ به صورت زیر و با نماد T تعریف می‌گردد.

$$T = \{(x, y) | \text{ورودی } x \text{ بتواند خروجی } y \text{ را تولید کند}\}$$

مجموعه امکان تولید دارای اصول موضوعه زیر است:

۱ـ اصل شمول مشاهدات[1]

$$(x_j, y_j) \in T$$

۲ـ اصل امکان‌پذیری[2]

$$(x, y) \in T; \qquad \bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y \Longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in T$$

۳ـ اصل تحدب[3]

$$(x, y) \in T, (x', y') \in T \Longrightarrow \lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y') \in T$$

۴ـ اصل بیکرانی اشعه (بازده به مقیاس)[4]

اگر $(x, y) \in T$ باشد آنگاه برای هر $\lambda \geq 0$، $(\lambda x, \lambda y) \in T$

۵ـ اصل کمینه برون‌یابی[5]

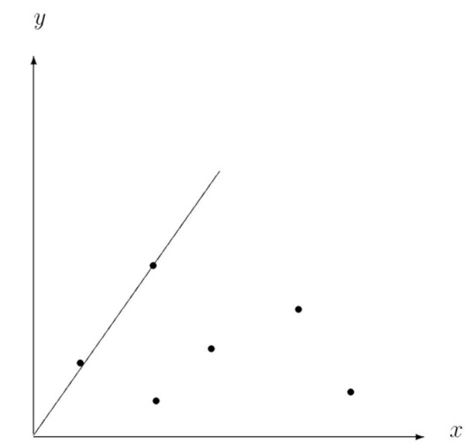
T کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول ۳،۲،۱ و ۴ صدق می‌کند.

مجموعه امکان تولید با اصول ۳،۲،۱ و ۴ با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$T_c = \left\{ (x, y) | x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \right\}$$

مرز مجموعه T_c یک سطح قطعه‌ای خطی است.

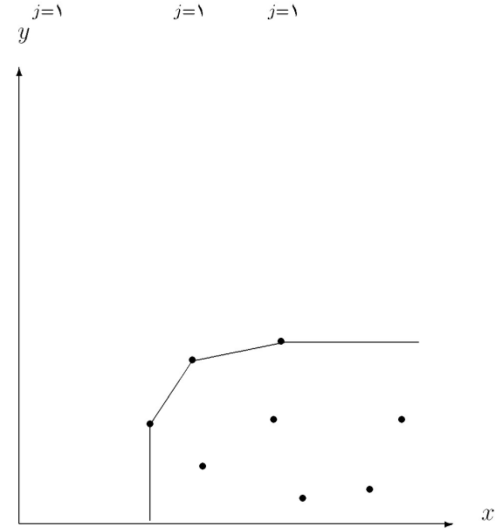
1) Non-Empty 2) Possibility 3) Convexity 4) Unbounded Ray Postulate 5) Minimality



شکل (۱ـ۱)

با حذف اصل ۴ مجموعه امکان تولید T_v که به صورت زیر و با نماد T_v تعریف می‌گردد به دست می‌آید:

$$T_v = \left\{ (x,y) | x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ \lambda_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \right\}$$



شکل (۲ـ۱)

شکل (۲ـ۱) مجموعه امکان تولید T_v (در حالت یک ورودی و یک خروجی است).

۱-۵ کارایی

کارایی به معنای ارزیابی عملکرد یک مجموعه امکان تولید نسبت به بهترین عملکرد در مقطعی از زمان است.

تعریف: DMU_k را غالب بر DMU_h گوییم هرگاه:

$$\begin{bmatrix} -x_k \\ y_k \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -x_h \\ y_h \end{bmatrix}$$

و حداقل در یک نامساوی به‌صورت اکید است.

در این قسمت چند تعریف از کارایی مختلف می‌آوریم:

۱-۵-۱ کارایی نسبی

DMU_O $(O \in \{1, \ldots, n\})$ را کارای نسبی گوییم هرگاه هیچ DMUای یافت نشود که غالب بر DMU_O باشد.

اگر در واحدهای تصمیم‌گیری تمام ورودی‌ها قابل قیمت‌گذاری باشند در این حالت نوعی از کارایی به نام کارایی اقتصادی تعریف می‌شود.

۱-۵-۲ کارایی اقتصادی

کارایی اقتصادی یک DMU عبارت است از نسبت مجموع وزن‌دار خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار ورودی‌ها. در این جا DMU کارا، DMUای است که ماکزیمم نسبت‌ها را دارا باشد.

۱-۵-۳ کارای پاراتو

DMU_o را کارای پاراتو می‌نامیم هرگاه بهتر شدن یکی از عوامل ورودی و یا خروجی بدون بدتر شدن حداقل یکی از سایر عوامل ورودی و یا خروجی امکان‌پذیر نباشد.

۱-۶ ویژگی تحلیل پوششی داده‌ها

تحلیل پوششی داده‌ها دارای ویژگی‌های منحصر به‌فردی است که آن را از سایرروش‌های اندازه‌گیری کارایی متمایز می‌سازد. این ویژگی‌های عبارتند از:

۱) ارزیابی واقع بینانه

۲) ارزیابی همزمان مجموعه‌ی عوامل

۳) ارزیابی با گرایش مرزی به جای گرایش‌های مرکزی

۴) عدم نیاز به وزن‌های از قبل تعیین شده

۵) تصویر کردن بهترین وضعیت عملکرد به جای وضعیت مطلوب

۱-۷ قابلیت‌های کاربردی در تحلیل پوششی داده‌ها

علاوه بر ویژگی‌های ذکر شده از نظر علمی نیز روش فوق دارای قابلیت‌های غیرقابل رقابت است. قابلیت‌های اساسی این روش عبارتند از:

۱) رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری

۲) ارائه واحدهایی با بیشترین مقیاس بهره‌وری و تخمین بازده به مقیاس

۳) ارائه راه‌کارهای توسعه‌ای شامل انبساط و انقباض واحدها

۴) تعیین پیشرفت و پسرفت تکنیکی واحدها

۵) تعیین تراکم در ورودی‌ها

۶) تخصیص بهینه منابع

۱-۸ مدل‌های معروف و کاربردی در تحلیل پوششی داده‌ها

مدل‌های معروف و کاربردی در تحلیل پوششی داده‌ها به شرح ذیل است:

۱ـ CCR

۲ـ BCC

۳ـ FDH

۴ـ SBM

۵ـ مدل جمعی و ...

۱-۸-۱ مدل CCR

مدل CCR را به سه طریق می‌توانیم به دست آوریم:

۱ـ ساختن مدل CCR با استفاده از مجموعه امکان تولید.

۲ـ ساختن مدل CCR با استفاده از تعریف کارایی نسبی.

۳ـ ساختن مدل CCR با استفاده از روش Min Max یا Max Min.

حالت اول: فرض کنیم DMU_o واحد تحت ارزیابی است اگر DMU_o ناکارا باشد به طور شعاعی به دو طریق می‌توانیم DMU_o را مرز کارایی تصویر کنیم اولاً ورودی آن را کاهش دهیم، ثانیاً خروجی آن را افزایش دهیم بنابراین در ماهیت ورودی (input oriented) سعی در پیدا کردن واحد مجازی[1] داریم، که همان خروجی را با حداقل ورودی ممکن پیدا می‌کند. پس هدف حل مسئله زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & (\theta x_o, y_o) \in T_c \end{aligned}$$

1) Virtual unit

با توجه به ساختار T_c مسئله فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io} \qquad i = 1, \ldots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \qquad r = 1, \ldots, s \\
& \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \\
& \theta \ \text{آزاد}
\end{aligned}
\tag{1-1}
$$

مدل فوق، مدل پوششی CCR در ماهیت ورودی است.

در ماهیت خروجی[1] سعی در پیدا کردن واحدهای مجازی داریم که با همان ورودی حداکثر خروجی را تولید کند بنابراین هدف حل مسئله زیر است:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \varphi \\
\text{s.t.} \quad & (x_o, \varphi y_o) \in T_c
\end{aligned}
$$

با توجه به ساختار T_c مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \varphi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \qquad i = 1, \ldots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \phi y_{ro} \qquad r = 1, \ldots, s \\
& \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \\
& \varphi \ \text{آزاد}
\end{aligned}
\tag{1-2}
$$

مسئله‌ی بالا مدل پوششی[2] در ماهیت خروجی نامیده می‌شود. دوآل مدل (۱ـ۱) به فرم مضربی[3] مدل CCR

1) Output Oriented 2) Envelopment Model 3) Multiplier Form

در ماهیت ورودی معروف است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} & \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{m} u_i x_{io} = 1 & \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} u_i x_{ij} \leq 0 & j = 1, \ldots, n, \\
& u_r \geq 0 & r = 1, \ldots, s \\
& u_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m
\end{array}
\qquad (1-3)
$$

دوآل مدل (۲ـ۱) به طور مشابه تعریف می‌شود که به فرم مضربی مدل CCR در ماهیت خروجی معروف است.

۱-۹ مدل پوششی BCC

۱-۹-۱ فرم پوششی مدل BCC در ماهیت ورودی

یکی دیگر از مدل‌های معروف DEA مدل BCC است که به صورت زیر است:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \theta & \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_o & \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_o & \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 & \\
& \lambda_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n
\end{array}
\qquad (1-4)
$$

۱-۹-۲ فرم مضربی مدل BCC در ماهیت ورودی

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & u'y_o - u_o \\
\text{s.t.} \quad & u^t y_j - v^t x_j + u_o \leq ۰, \quad j = ۱, \dots, n \\
& v^t x_o = ۱ \\
& u \geq ۰, v \geq ۰
\end{aligned}
\tag{۱ - ۵}
$$

۱-۹-۳ فرم مضربی BCC در ماهیت خروجی

فرم مضربی مدل BCC در ماهیت خروجی به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{io} - v_o \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=۱}^{s} ur y_{ro} = ۱ \\
& \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - v_o \geq ۰, \quad j = ۱, \dots, n \\
& v_i \geq ۰, \quad i = ۱, \dots, m \\
& u_r \geq ۰, \quad r = ۱, \dots, s \\
& v_o \quad \text{آزاد}
\end{aligned}
\tag{۱ - ۶}
$$

و مدل کسری[1] معادل BCC برای مدل (۶ـ۱) به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & v^t x_o - v_o \\
\text{s.t.} \quad & \frac{v^t x_j - u^t y_j}{u^t y_o} \geq ۰, \quad j = ۱, \dots, n \\
& v \geq ۰, u \geq ۰ \\
& v_o \quad \text{آزاد}
\end{aligned}
$$

1) Fractional model

تعریف: در مدل (۲ـ۱)، DMU_o کاراست اگروتنهااگر در یکی از جواب‌های بهینه فرم مضربی مدل CCR داشته باشیم

$$u^t y_o = ۱, \quad u > ۰, \quad v > ۰$$

و به همینصورت برای مدل BCC خواهیم داشت.

تعریف: در مدل مضربی BCC، DMU_o کاراست اگروتنهااگر در یکی از جواب‌های بهینه (۵ـ۱) داشته باشیم

$$u^t y_o + u_o = ۱ \quad u > ۰, v > ۰$$

تعریف: اگر مقدار بهینه θ یعنی θ^* در (۱ـ۱) و در (۴ـ۱) برابر یک شود و در یک جواب بهینه بعضی از متغیرهای کمکی صفر باشند آنگاه DMU_o کارای ضعیف است.

تعریف: DMU_o به مفهوم فارل یا شعاعی، کاراست اگروتنهااگر در ارزیابی آن با مدل CCR پوششی با ماهیت ورودی داشته باشیم $\theta^* = ۱$.

تعریف: مقدار θ^* در مدل پوششی CCR و مدل پوششی BCC را کارایی تکنیکی و $(۱ - \theta^*)$ را ناکارایی تکنیکی می‌نامند.

۱-۱۰ بازده به مقیاس

یکی از مهمترین مباحث در اقتصاد و مدیریت و تحلیل پوششی داده‌ها مفهوم بازده به مقیاس است. بازده به مقیاس عبارت است از نسبت افزایش در خروجی به‌ازای افزایش در میزان ورودی‌ها.

این نسبت می‌تواند ثابت، افزایشی و یا کاهشی باشد. نسبت بازده مقیاس وقتی برقرار است که افزایش در ورودی موجب افزایش در خروجی به همان نسبت شود. بازده‌ی افزایشی نسبت به مقیاس وقتی صادق است که میزان خروجی به نسبی بیش از افزایش در ورودی‌ها افزایش یابد. در صورتی که میزان افزایش در خروجی‌ها کمتر از نسبتی باشد که ورودی‌ها افزایش داده می‌شوند آنگاه بازده‌ی کاهشی نسبت به مقیاس برقرار است.

رابطه ریاضی بازده مقیاس برای تولید f در حالت چند ورودی و یک خروجی به صورت ذیل است:

α	بازده به مقیاس	تعریف
$\alpha \geq ۰$	ثابت	$f(\alpha x_۱, \alpha x_۲, \dots) = \alpha f(x_۱, x_۲, \dots)$
$\alpha > ۱$	صعودی	$f(\alpha x_۱, \alpha x_۲, \dots) > \alpha f(x_۱, \dots)$
$\alpha < ۱$	صعودی	$f(\alpha x_۱, \dots) < \alpha f(x_۱, \dots)$
$\alpha < ۱$	نزولی	$f(\alpha x_۱, \alpha x_۲, \dots) > \alpha f(x_۱, \dots)$
$\alpha > ۱$	نزولی	$f(\alpha x_۱, \dots) < \alpha f(x_۱, \dots)$

در صورتی که چند ورودی و چند خروجی داشته باشیم بازده به مقیاس به صورت زیر تعریف می‌گردد.

تعریف: فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری موجود است که هر واحد j، $j \in \{۱, ۲, \dots, n\}$ از m ورودی $x_{ij}, \dots, x_{mj}$ و برای تولید s خروجی $y_{۱j}, \dots, y_{sj}$ استفاده می‌کند و T مجموعه امکان تولید است.

فرض کنید $(x_o, y_o) \in T$ و $o \in \{۱, ۲, \dots, n\}$ و $\beta > ۰$ مقدار ثابتی باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\beta) = \mathrm{Max}\{\alpha | \beta x_o, \alpha y_o) \in T\}$$
$$\gamma = \lim_{\beta \to ۱} \frac{\alpha(\beta) - ۱}{\beta - ۱}$$

در این صورت اگر $\gamma = ۱$، واحد تصمیم‌گیرنده‌ی (x_o, y_o) دارای بازده به مقیاس ثابت[1] است.

اگر $\gamma > ۱$، واحد تصمیم‌گیرنده (x_o, y_o) دارای بازده به مقیاس صعودی است.

اگر $\gamma < ۱$، واحد تصمیم‌گیرنده (x_o, y_o) دارای بازده به مقیاس نزولی است.

۱-۱۰-۱ بازده به مقیاس مدل CCR

قضیهٔ زیر در سال ۱۹۹۲ توسط بنکر و ترال برای تعیین بازده به مقیاس (x_o, y_o) در ارزیابی مدل CCR بیان شد.

قضیه: فرض کنید که (x_o, y_o) روی مرزکارا باشد و $(\lambda_۱^*, \dots, \lambda_n^*)$ جواب بهین حاصل از ارزیابی (x_o, y_o) با فرم پوششی مدل CCR باشد در این صورت بازده به مقیاس این نقطه را می‌توان به صورت زیر مشخص کرد.

۱ـ اگر در یک جواب بهین $\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^* = ۱$، آنگاه بازده به مقیاس ثابت است.

۲ـ اگر در همهٔ جواب‌های بهین $\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^* < ۱$، آنگاه بازده به مقیاس نزولی است.

1) Constant Return to Scall

۳ـ اگر در همهٔ جواب‌های بهین $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* < 1$، آنگاه بازده به مقیاس صعودی است.

حال اگر (x_o, y_o) روی مرز کارا نباشد مسئله را در دو مرحله حل می‌کنیم.

مرحله اول:

فرض کنید که (x_o, y_o) روی مرز کارا نباشد. فرم پوششی مدل CCR را برای ارزیابی (x_o, y_o) به کار می‌بریم فرض کنید (θ^*, λ^*) جواب بهین حاصل از این مدل باشد.

مرحله دوم:

۱ـ اگر $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* = 1$، آنگاه طبق قضیه قبل (x_o, y_o) دارای بازده به مقیاس ثابت است.

۲ـ اگر $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* < 1$، آنگاه مسئله‌ی ذیل را برای تعیین بازده به مقیاس این نقطه حل می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{s}_i^- + \sum_{r=1}^{s} \hat{s}_r^+ \right) \\
\text{s.t.} \quad & \theta_o^* x_o = \sum_{j=1}^{n} x_j \hat{\lambda}_j + \hat{s}^- \\
& y_o = \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j y_j - \hat{s}^+ \\
& \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j \geq 1 \\
& \hat{\lambda}_j, \hat{s}^-, \hat{s}^+ \geq 0 \qquad \forall j
\end{aligned} \tag{۱ − ۸}
$$

حال اگر در جواب بهین مدل فوق $\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j^* < 1$، آنگاه بازده به مقیاس صعودی است و اگر $\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j^* = 1$ بازده به مقیاس ثابت است.

اگر در پایان مرحله اول $\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j^* > 1$، آنگاه کافی است در مدل (۱ـ۶) تابع هدف را با

$$
\text{Max} \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{s}_i^- + \sum_{r=1}^{s} \hat{s}_r^+ \right)
$$

و قید $\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j \geq 1$ را با قید $\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j \leq 1$ جایگزین کنیم و نتایج مشابهی به دست آوریم.

۱-۱۱ مدل CCR/ε

در ارزیابی یک DMU با مدل مضربی CCR ممکن است بعضی از وزن‌ها مقدار صفر را اختیار کنند و یک DMU ناکارا، کارا تشخیص داده شود برای این که همهٔ وزن‌ها در ارزیابی دخیل شوند قیدی روی تمام وزن‌ها تحمیل نمودند تا از صفر شدن آنها جلوگیری شود به عبارت دیگر برای این که تشخیص دهیم DMU_o کارای قوی است مدل زیر را درنظر می‌گیریم:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} & \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1 & \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 & i = 1, \ldots, m \\
& u_r > 0, & r = 1, \ldots, s \\
& v_i > 0, & i = 1, \ldots, m
\end{array}
\qquad (1-9)
$$

با معرفی متغیرهای $u_r > 0$ و $v_i > 0$ مشکل مسئله LP که ممکن است جواب بهینه نداشته باشد مطرح گردید. برای رفع مشکل جدید قیدها را به صورت زیر اصلاح نمودند.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} & \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1 & \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 & i = 1, \ldots, m \\
& u_r \geq \varepsilon, & r = 1, \ldots, s \\
& v_i \geq \varepsilon, & i = 1, \ldots, m
\end{array}
\qquad (1-10)
$$

که ε یک عدد غیرارشمیدسی است و دوآل آن به صورت زیر می‌باشد که به فرم پوششی مدل ε/CCR معروف است.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=۱}^{m} s_i^- + \sum_{r=۱}^{s} s_r^+\right) & \\
\text{s.t.} & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io} & i = ۱,\dots,m \\
& \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} + s_r^+ y_{ro} & r = ۱,\dots,s \\
& \lambda_j \geq ۰ & j = ۱,\dots,n \\
& s_i^- \geq ۰, & i = ۱,\dots,m \\
& s_r^+ \geq ۰, & r = ۱,\dots,s \\
& \theta \text{ آزاد} &
\end{array}
\qquad (۱-۱۱)
$$

اگر ε به اندازهٔ کافی کوچک نباشد ممکن است مسئلهٔ نشدنی شود یا بخشی از ناحیه از بین برود و برای یک DMU_o که کارای قوی است نتواند وزن‌های مثبتی که با آن وزن‌ها، DMU کارا شود پیدا کند و جواب بهینه مدل ε از یک کوچکتر نشود. برای رفع این مشکل یک بازهٔ اطمینان برای ε می‌یابیم.

روشی برای پیدا کردن ناحیه اطمینان ε

مدل ε/CCR فرم پوششی و فرم مضربی را درنظر بگیرید. در این مدل‌ها هدف پیدا کردن بزرگترین کران بالای ε است به طوری که این کران بالا، شدنی بودن مدل مضربی و کران‌دار بودن مدل پوششی را تضمین می‌کند.

بنابراین مسئله‌های زیر را درنظر می‌گیریم و کرانی برای ε به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
P_k: \quad & \text{Max} \quad \varepsilon_k \\
& \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
& \qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \qquad j = 1, \dots, n \\
& \qquad u_r \geq \varepsilon_k, \qquad\qquad r = 1, \dots, s \\
& \qquad v_i \geq \varepsilon_k, \qquad\qquad i = 1, \dots, m
\end{aligned}
\tag{1-12}
$$

ناحیه اطمینان متناظر DMU_k به صورت بازه $(o,\ ,\varepsilon^*_k)$ است که ε^*_k مقدار بهین مسئله P_k است. بازه اطمینان کلی به صورت اشتراک تمام بازه‌های اطمینان در مجموعه‌ی داده‌ها تعریف می‌شود یعنی (o,ε^*) که ε^* برابر است با $\varepsilon^* = \text{Min}\{\varepsilon^*_1, \dots, \varepsilon^*_n\}$.

۱-۱۲ مدل جمعی[1]

در مدل‌های ارائه شده‌ی قبلی چه در ماهیت ورودی و چه در ماهیت خروجی، انقباض همه‌ی ورودی‌ها و انبساط همه‌ی خروجی‌ها به یک نسبت صورت می‌گرفت. اما در سال ۱۹۸۵، چارنز و همکاران مدلی را معرفی نمودند که هم ماهیت ورودی و هم ماهیت خروجی دارد و انقباض ورودی‌ها و انبساط خروجی‌ها معمولاً به یک نسبت نیست. این روش به روش جمعی معروف است.

1) Additive Model