دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

برنامه‌ریزی پویا برای کنترل بهینه‌ی مقید سیستم‌های هیبریدی خطی

طاهره صمصامی

استاد راهنما:

دکتر محمد تقی دستجردی

مهر ۱۳۸۹


إنه من سليمان وإنه
بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

در این پایان‌نامه، جواب مسائل کنترل بهینه‌ی سیستم‌های هیبریدی خطی زمان— گسسته‌ی مقید را بر اساس تابع هدف درجه دوم یا خطی مطالعه می‌کنیم. در این راستا دو هدف را دنبال می‌کنیم. اول، نتایج نظری اصلی، در مورد ساختار جواب فیدبک وضعیت بهینه و تابع مقدار را ارائه می‌دهیم. دوم، چگونگی به دست آوردن قانون کنترل بهینه‌ی فیدبک وضعیت را با تأثیرپذیری از ترکیب برنامه‌ریزی چند پارامتری و برنامه‌ریزی پویا بررسی می‌کنیم.

قدردانی و تشکر

سپاس خدای بزرگ و مهربان را، آن یگانه وجود مقدسی که همواره یار و یاور و ره گشای من بوده و هست و هر چه دارم از اوست.

در اینجا لازم میدانم از همه‌ی عزیزانی که در انجام این پایان نامه به نحوی مرا یاری نمودند سپاسگذاری کنم.

از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر دستجردی، کمال تشکر و قدردانی را دارم که در همه‌ی زمینه‌ها همکاری لازم را مبذول داشته‌اند و همیشه با صبر و حوصله مرا یاری نموده‌اند. هر چند زحمات و راهنمایی‌های ایشان در طول این مدت فراتر از آن بوده که بتوان در قالب یک تشکر حق شان را ادا کرد.

هم چنین از اساتید گرامی: جناب آقای دکتر میرزاپور، جناب آقای دکتر ادیب و جناب آقای دکتر کولایی که در طول این دو سال افتخار شاگردی شان را داشته‌ام سپاسگذارم.

به جاست از دوستان عزیزم خانم‌ها: لیلا کریمی، سهیلا سلطانی و مریم قربانی که در طول این مدت لحظه به لحظه همراه و همیار من بوده و خاطرات ماندگاری را به دفتر زندگی‌ام هدیه کرده‌اند تشکر کنم.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه‌ی ایثار و از خود گذشتگی...

به پاس عاطفه‌ی سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است...

به پاس قلب‌های بزرگ شان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناه شان به شجاعت می‌گراید...

و به پاس محبت‌های بی‌دریغ شان که هرگز فروکش نمی‌کند...

اندک توشه‌ام را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم

اگر چه هیچ تقدیمی در هیچ تقویمی یارای حق شناسی سزاوارانه تان را نخواهد داشت.

فهرست مندرجات

مقدمه

بسیاری از مسائل کاربردی کنترل شامل مشخصه‌های زیر هستند:

- محدودیت‌هایی روی وضعیت و ورودی
- تغییرات بین عمل‌گرهای مختلف اداره کننده‌ی سیستم
- تداخل سیستم‌های زمان– پیوسته و سیستم‌های زمان– گسسته

سیستم با مشخصات فوق، سیستم هیبریدی مقید نامیده می‌شود.

در سال‌های اخیر، مدل‌های متفاوت جهت آنالیز و طراحی کنترل‌گرها برای سیستم‌های هیبریدی به وجود آمده است. در این راستا می‌توان به منابع [۶]، [۱۵] و [۱۸] مراجعه کرد. از میان این مدل‌ها، کلاس کنترل‌گرهای بهینه بیشترین زمینه‌ی مطالعه را دارد.

جواب مسائل کنترل بهینه برای سیستم‌های هیبریدی زمان– گسسته، اولین بار توسط سونتاگ [۱] در سال ۱۹۸۱ مطرح شده است [۱۸].

در سال ۲۰۰۱، مین [۲] در یک ارائه‌ی جامع و کامل در کنفرانس کنترل اروپا نشان داد که جواب فیدبک وضعیت برای مسائل کنترل بهینه‌ی سیستم‌های هیبریدی خطی، بر اساس تابع هدف خطی و درجه دوم، قانون کنترل تکه‌ای آفین است [۱۶]. روش ارائه شده در پایان‌نامه بر اساس همین ایده خواهد بود.

در طول پایان‌نامه، روی دو گروه از سیستم‌های دینامیکی زمان– گسسته متمرکز خواهیم شد: سیستم‌های خطی و سیستم‌های هیبریدی خطی مقید. برای این دو گروه از سیستم‌ها، مسائل کنترل بهینه و جواب فیدبک وضعیت آن‌ها را بررسی خواهیم کرد. روش ارائه شده از برنامه‌ریزی چند پارامتری استفاده می‌کند.

فصل اول، شامل تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز است.

فصل دوم، مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی چند پارامتری است. برنامه‌ریزی چند پارامتری تکنیک اصلی استفاده شده

[۱] Sontag

[۲] Mayne

برای مطالعه و محاسبه‌ی کنترل بهینه‌ی فیدبک وضعیت است. در واقع ما مسائل کنترل بهینه‌ی زمان متناهی را به عنوان مسائل ریاضی فرمول‌بندی می‌کنیم که دنباله‌ی ورودی مسأله‌ی کنترل بهینه، یک بردار بهینه‌سازی در مسأله‌ی ریاضی است. وابسته به مدل دینامیکی سیستم، محدودیت‌ها و تابع هدف استفاده شده، یک مسأله‌ی ریاضی متفاوت به دست می‌آید. در این فصل الگوریتم‌هایی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چند پارامتری، برنامه‌ریزی درجه دوم چند پارامتری، برنامه‌ریزی خطی صحیح ترکیبی چند پارامتری و برنامه‌ریزی درجه دوم صحیح ترکیبی چند پارامتری توصیف می‌شود.

در فصل سوم، روی سیستم‌های خطی که یک دسته‌ی بسیار مهم از سیستم‌های دینامیکی هستند، متمرکز می‌شویم. برای این سیستم‌ها، مسائل کنترل بهینه‌ی زمان متناهی با توابع هدف بر اساس ۲− نرم، ۱− نرم و ∞− نرم بیان می‌شود و ثابت می‌شود که جواب مسائل کنترل بهینه برای این قبیل سیستم‌ها به عنوان یک قانون کنترل تکه‌ای آفین است.

در فصل چهارم، روی سیستم‌های هیبریدی خطی مقید متمرکز می‌شویم. در ابتدا، مقدمه‌ای از انواع سیستم‌های هیبریدی را خواهیم آورد. در ادامه، برای این قبیل سیستم‌ها مسائل کنترل بهینه‌ی زمان متناهی با توابع هدف بر اساس ۲− نرم، ۱− نرم و ∞− نرم بیان می‌شود. نشان داده می‌شود که در حالت کلی، جواب مسائل کنترل بهینه برای چنین سیستم‌هایی، قانون کنترل تکه‌ای آفین روی مجموعه‌های نامحدب و ناهمبند است. در طول تحلیل ویژگی‌های جواب، الگوریتم‌هایی ارائه می‌شود که به طور مؤثر قانون کنترل بهینه را برای تمام حالات در نظر گرفته شده محاسبه می‌کند.

نمادگذاری

مجموعه توابع با n بار مشتق پیوسته	C^n
مجموعه اعداد صحیح نامنفی	$\mathbb{N}^+$
مجموعه بردارهای حقیقی با n مؤلفه	$\mathbb{R}^n$
مجموعه ماتریس‌های حقیقی با n سطر و m ستون	$\mathbb{R}^{n\times m}$
ترانهاده‌ی بردار x	x^T
ترانهاده‌ی ماتریس A	A^T
معکوس ماتریس A	A^{-1}
A ماتریس معین (نیمه معین) مثبت است، یعنی به ازای $x \neq 0$ داریم $x'Ax > (\geq) 0$	$A > (\geq) 0$
$i-$ امین مؤلفه‌ی بردار x	x_i
$i-$ امین سطر ماتریس A	A_i
به ازای $i = 1, \cdots, n$ داریم $x_i > 0 (x_i \geq 0)$	$x \in \mathbb{R}^n, \;\; x > 0 (x \geq) 0$
نرم اقلیدسی مربعی بردار $x \in \mathbb{R}^n$، $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$	$\|x\|_2$
$1-$ نرم بردار $x \in \mathbb{R}^n$، $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|$	$\|x\|_1$
$\infty-$ نرم بردار $x \in \mathbb{R}^n$، $\|x\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \cdots, \|x_n\|\}$	$\|x\|_\infty$
نرم اقلیدسی مربعی بردار Qx که $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $\|Qx\|_2 = (x'Qx)^{\frac{1}{2}}$	$\|Qx\|_2$
$1-$ نرم بردار Mx که $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$، یعنی $\|Mx\|_1 = \sum_{i=1}^m \|M_i x\|$	$\|Mx\|_1$
$\infty-$ نرم بردار Mx که $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$، یعنی $\|Mx\|_\infty = \max\{\|M_1 x\|, \cdots, \|M_m x\|\}$	$\|Mx\|_\infty$
$\infty-$ نرم ماتریس $S \in \mathbb{C}^{m\times n_z}$، $\|S\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n_z} \|s_{i,j}\|$	$\|S\|_\infty$
$1-$ نرم ماتریس $S \in \mathbb{C}^{m\times n_z}$، $\|S\|_1 = \max_{1\leq j\leq n_z} \sum_{i=1}^{m} \|s_{i,j}\|$	$\|S\|_1$

مجموعه‌ی تهی .... $\emptyset$

مجموعه‌ی اشتراک، $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{x \,:\, x \in \mathcal{P} \;\; and \;\; x \in \mathcal{Q}\}$ .... $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$

مجموعه‌ی اجتماع، $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \{x \,:\, x \in \mathcal{P} \;\; or \;\; x \notin \mathcal{Q}\}$ .... $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$

مجموعه‌ی تفاضل، $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q} = \{x \,:\, x \in \mathcal{P} \;\; and \;\; x \notin \mathcal{Q}\}$ .... $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$

مجموعه‌ی $\mathcal{P}$ زیرمجموعه‌ی $\mathcal{Q}$ است، $\{x \,:\, x \in \mathcal{P} \Rightarrow x \in \mathcal{Q}\}$ .... $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$

مرز مجموعه‌ی $\mathcal{P}$ .... $\partial\mathcal{P}$

کاردینالیتی مجموعه‌ی $\mathcal{P}$، یعنی تعداد عناصر مجموعه‌ی $\mathcal{P}$ .... $|\mathcal{P}|$

علایم اختصاری

CFTOC	(Constrained Finite Time Optimal Control)	کنترل بهینه‌ی زمان متناهی مقید
CR	(Critical Region)	ناحیه‌ی بحرانی
DP	(Dynamic Programming)	برنامه‌ریزی پویا
ELC	(Extended Linear Complementarity (Systems))	سیستم‌های مکمل خطی توسیع یافته
HJB	(Hamilton-Jacobi-Bellman)	همیلتون– ژاکوبی– بلمن
KKT	(Karush-Kuhn-Tucker)	کروش کان تاکر
LC	(Linear Complementarity (Systems))	سیستم‌های مکمل خطی
LP	(Linear Programming)	برنامه‌ریزی خطی
LTI	(Linear Time Invariant)	خطی تغییرناپذیر با زمان
MILP	(Mixed Integer Linear Programming)	برنامه‌ریزی خطی صحیح ترکیبی
MINLP	(Mixed Integer Non-Linear Programming)	برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح ترکیبی
MIQP	(Mixed Integer Quadratic Programming)	برنامه‌ریزی درجه دوم صحیح ترکیبی
MLD	(Mixed Logic Dynamical (Systems))	سیستم‌های دینامیکی منطق ترکیبی
mp-LP	(multi-parametric Linear Programming)	برنامه‌ریزی خطی چند پارامتری
mp-MILP	(multi-parametric Mixed Integer Linear Programming)	برنامه‌ریزی خطی صحیح ترکیبی چند پارامتری
mp-MIQP	(multi-parametric Mixed Integer Quadratic Programming)	برنامه‌ریزی درجه دوم صحیح ترکیبی چند پارامتری
mp-QP	(multi-parametric Quadratic Programming)	برنامه‌ریزی درجه دوم چند پارامتری

PWA	(Piecewise Affine)	تکه‌ای آفین
PWAP	(Piecewise Affine on Polyhedra)	تکه‌ای آفین روی چندوجهی
PWQ	(Piecewise Quadratic)	تکه‌ای درجه دوم
PWQP	(Piecewise Quadratic on Polyhedra)	تکه‌ای درجه دوم روی چندوجهی
QP	(Quadratic Programming)	برنامه‌ریزی درجه دوم

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل، ابتدا تعاریف و مفاهیم پایه را بیان خواهیم کرد و سپس در ادامه به یادآوری خلاصه‌ای از مسائل بهینه‌سازی مقید و نامقید و شرایط بهینگی آن‌ها خواهیم پرداخت و به ویژه نظریه‌ی دوگانی لاگرانژ بررسی شده و شرایط بهینگی کروش کان تاکر (KKT)[۱] و مکمل زاید [۲] از آن به دست آورده می‌شود. در انتهای فصل خلاصه‌ای از برنامه‌ریزی خطی (LP) [۳]، برنامه‌ریزی درجه دوم (QP) [۴]، برنامه‌ریزی خطی صحیح ترکیبی $(MILP)$ [۵] و برنامه‌ریزی درجه دوم صحیح ترکیبی $(MIQP)$ [۶] را خواهیم آورد.
در جمع آوری مطالب این فصل به جز در موارد خاص از منابع [۱۰] و [۲۲] استفاده شده است.

۱.۱ تعاریف

[۱] Karush-Kuhn-Tucker
[۲] Complementary Slackness
[۳] Linear Programming
[۴] Quadratic Programming
[۵] Mix Integer Linear Programming
[۶] Mix Integer Quadratic Programming

تعریف ۱.۱.۱ یک نیم فضا مجموعه‌ای از نقاط به صورت $\{x \ : \ p^T x \leq k\}$ است که در آن p یک بردار ناصفر در $\mathbb{R}^n$ و k اسکالر است.

تعریف ۲.۱.۱ اشتراک تعداد متناهی از نیم فضاهای بسته را چندوجهی می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱ چندوجهی $P = \{Ax \leq b\}$ با $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $x \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^m$ داده شده است. وجوه چندوجهی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\{x \ : \ Bx = c \ , \ Dx \leq d\}, \quad A = [B \ \ D], \quad b = [c \ \ d]$$

یعنی، بعضی از محدودیت‌ها به صورت مساوی و بعضی به صورت نامساوی برقرارند. وجوه با بعد صفر نقاط رأسی چندوجهی هستند.

تعریف ۴.۱.۱ دو چندوجهی P_j و P_i از $\mathbb{R}^n$، چندوجهی مجاور نامیده می‌شوند، هرگاه $P_i \cap P_j$ یک وجه باشد.

تعریف ۵.۱.۱ یک چندوجهی غیرمحدب، یک مجموعه‌ی غیرمحدبی است که با اجتماع یک تعداد متناهی از چندوجهی‌ها داده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱ مجموعه‌ی $\Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ محدب است، هرگاه به ازای هر $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ داشته باشیم

$$\lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2 \in \Theta, \quad \lambda \in (0, 1)$$

تعریف ۷.۱.۱ تابع $h(\theta) : \Theta \subseteq \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب است، هرگاه برای هر $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ داشته باشیم

$$h(\lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2) \leq \lambda h(\theta_1) + (1-\lambda)h(\theta_2), \quad \lambda \in (0, 1)$$

تعریف ۸.۱.۱ تابع $h(\theta) : \Theta \subseteq \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ اکیداً محدب است، هرگاه برای هر $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ داشته باشیم

$$h(\lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2) < \lambda h(\theta_1) + (1-\lambda)h(\theta_2), \quad \lambda \in (0, 1)$$

تعریف ۹.۱.۱ تابع $h(\theta):\Theta\subseteq\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}$ شبه‌محدب[۷] است، هرگاه برای هر $\theta_1,\theta_2\in\Theta$ داشته باشیم

$$h(\lambda\theta_1+(1-\lambda)\theta_2)\leq\max\{h(\theta_1),h(\theta_2)\},\qquad \lambda\in(0,1)$$

تعریف ۱۰.۱.۱ یک گردایه از مجموعه‌های $R_1,\cdots,R_n$، یک افراز از Θ است، هرگاه

(i) $\bigcup_{i=1}^{n}R_i=\Theta$

(ii) $R_i\cap R_j=\emptyset,\quad\forall i\neq j$

علاوه بر آن $R_1,\cdots,R_n$، یک افراز چندوجهی، از یک مجموعه‌ی Θ است، هرگاه $R_1,\cdots,R_n$ افرازی از Θ بوده و $\bar{R}_i$ مجموعه‌های چندوجهی باشند ($\bar{R}_i$ بستار مجموعه‌ی R_i است).

تعریف ۱۱.۱.۱ یک گردایه از مجموعه‌های $R_1,\cdots,R_n$، یک افراز به مفهوم وسیع از یک مجموعه‌ی Θ است، هرگاه

(i) $\bigcup_{i=1}^{n}R_i=\Theta$

(ii) $(R_i\backslash\partial R_i)\cap(R_j\backslash\partial R_j)=\emptyset,\quad\forall i\neq j$

علاوه بر آن $R_1,\cdots,R_n$، یک افراز چندوجهی به مفهوم وسیع، از یک مجموعه‌ی Θ است، هرگاه $R_1,\cdots,R_n$ یک افراز به مفهوم وسیع از Θ بوده و $\bar{R}_i$ ها مجموعه‌های چندوجهی باشند.

تعریف ۱۲.۱.۱ تابع $h(\theta):\Theta\subseteq\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع تکه‌ای آفین (PWA)[۸] است، هرگاه یک افراز $R_1,\cdots,R_n$ از Θ وجود داشته باشد به طوری که

$$h(\theta)=H_i\theta+k_i,\qquad\forall\theta\in R_i,\qquad i=1,\cdots,n.$$

تعریف ۱۳.۱.۱ تابع $h(\theta):\Theta\subseteq\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع تکه‌ای آفین روی چندوجهی $(PWAP)$ [۹] است، هرگاه یک افراز چندوجهی $R_1,\cdots,R_n$ از Θ وجود داشته باشد به طوری که

$$h(\theta)=H_i\theta+k_i,\qquad\forall\theta\in R_i,\qquad i=1,\cdots,n.$$

[۷] quasiconvex

[۸] Piecewise Affine

[۹] Piecewise Affine on Polyhedra

تعریف ۱۴.۱.۱ تابع $q:\Theta\subseteq\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع تکه‌ای آفین چندگانه از مرتبه‌ی $d\in\mathbb{N}^+$ است، هرگاه

$$q(\theta)=\min\{q^1(\theta)=l^1\theta+c^1,\cdots,q^d(\theta)=l^d\theta+c^d\},$$

که در آن Θ چندوجهی محدب است.

تعریف ۱۵.۱.۱ تابع $h(\theta):\Theta\subseteq\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع تکه‌ای درجه دوم (PWQ) [10] است، هرگاه یک افراز $R_1,\cdots,R_n$ از Θ وجود داشته باشد به طوری که

$$h(\theta)=\theta^TH_i\theta+k_i\theta+l_i,\quad\forall\theta\in R_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

تعریف ۱۶.۱.۱ تابع $h(\theta):\Theta\subseteq\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع تکه‌ای درجه دوم روی چندوجهی $(PWQP)$ [11] است، هرگاه یک افراز چندوجهی $R_1,\cdots,R_n$ از Θ وجود داشته باشد به طوری که

$$h(\theta)=\theta^TH_i\theta+k_i\theta+l_i,\quad\forall\theta\in R_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

تعریف ۱۷.۱.۱ تابع $q:\Theta\subseteq\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع درجه دوم چندگانه با چندگانگی $d\in\mathbb{N}^+$ است، هرگاه

$$q(\theta)=\min\{q^1(\theta)=\theta^TQ^1\theta+l^1\theta+c^1,\cdots,q^d(\theta)=\theta^TQ^d\theta+l^d\theta+c^d\},$$

$$Q^i>0,\quad\forall i=1,\cdots,d$$

که در آن Θ چندوجهی محدب است.

تعریف ۱۸.۱.۱ تابع $q:\Theta\subseteq\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع تکه‌ای درجه دوم چندگانه روی چندوجهی $PWQP$ است، هرگاه یک افراز چندوجهی $R_1,\cdots,R_N$ از Θ وجود داشته باشد به طوری که

$$q(\theta)=\min\{q_i^1(\theta)=\theta^TQ_i^1\theta+l_i^1\theta+c_i^1,\cdots,q_i^d(\theta)=\theta^TQ_i^d\theta+l_i^d\theta+c_i^d\},$$

$$\forall\theta\in R_i,\quad i=1,\cdots,N$$

که d_i چندگانگی تابع q در چندوجهی R_i است و $d=\sum_{i=1}^N d_i$ چندگانگی تابع q است (توجه کنید که Θ لزوماً محدب نیست).

[10] Piecewise Quadratic

[11] Piecewise Quadratic on Polyhedra

تعریف ۱۹.۱.۱ (تصویر)[12] چندوجهی $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \ : \ P^x x + P^y y \leq P^c\}$ با $P^x \in \mathbb{R}^{n_p \times n}$، $x \in \mathbb{R}^n$، $P^y \in \mathbb{R}^{n_p \times m}$، $y \in \mathbb{R}^m$ و $P^c \in \mathbb{R}^{n_p}$ داده شده است. تصویر روی فضای x از $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$proj_x(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \exists y \in \mathbb{R}^m \ : \ P^x x + P^y y \leq P^c\}.$$

تعریف ۲۰.۱.۱ [۲۲] نقطه‌ی $x^* \in \Omega$ را نقطه‌ی مینیمم نسبی یا نقطه‌ی مینیمم موضعی تابع f روی Ω گویند اگر یک $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in \Omega$ در فاصله‌ی حداکثر ϵ از x^* (یعنی $x \in \Omega$ و $|x - x^*| < \epsilon$) داشته باشیم $f(x) \geq f(x^*)$. اگر به ازای هر $x \in \Omega$، $x \neq x^*$، در فاصله‌ی حداکثر ϵ از x^* داشته باشیم $f(x) > f(x^*)$، در این صورت x^* را نقطه‌ی مینیمم نسبی اکید f روی Ω گویند.

تعریف ۲۱.۱.۱ [۲۲] نقطه‌ی $x^* \in \Omega$ را نقطه‌ی مینیمم سراسری f روی Ω گویند اگر به ازای هر $x \in \Omega$، داشته باشیم $f(x) \geq f(x^*)$. اگر به ازای هر $x \in \Omega$، $x \neq x^*$، داشته باشیم $f(x) \geq f(x^*)$، در این صورت x^* را نقطه‌ی مینیمم سراسری اکید f روی Ω گویند.

تعریف ۲۲.۱.۱ (گوی چیبیشف)[13] یک چندوجهی $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P^x x \leq P^c\}$ با $P^x \in \mathbb{R}^{n_p \times n}$ و $P^c \in \mathbb{R}^{n_p}$ داده شده است. گوی چیبیشف متناظر است با گویی با بزرگترین شعاع $B(x_c, R)$ که x_c مرکز گوی است به طوری که $B(x_c, R) \subset P$. مرکز و شعاع گوی چیبیشف با حل مسأله‌ی بهینه‌سازی خطی زیر به دست آورده می‌شود

$$\begin{aligned} &\max_{x_c, R} \ R \\ &s.t. \ \ P_i^x x_c + R \parallel P_i^x \parallel_2 \leq P_i^c, \quad i = 1, \cdots, n_p \end{aligned}$$

که P_i^x، $i-$امین سطر P^x را نشان می‌دهد.

- اگر شعاع به دست آمده $R = 0$ باشد، آنگاه چندوجهی از کمترین بعد است.
- اگر شعاع به دست آمده $R < 0$ باشد، آنگاه چندوجهی تهی است.

نمایش هندسی گوی چیبیشف در شکل ۱.۱ داده شده است.

---
[12] Projection

[13] Chebychev ball