بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش آنالیز

خواص توسیع و جداسازی توابع معین مثبت مُعین روی گروههای موضعاً فشرده

استاد راهنما:

دکتر محمود لشکری زاده بمی

پژوهشگر:
مهراب تقوی زاده

دی ماه ۱۳۸۷

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،ابتکارات

و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه

متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز آقای مهراب تقوی زاده

تحت عنوان:

خواص توسیع و جداسازی توابع مثبت معین روی گروههای موضعاً فشرده

در تاریخ ... ۸۷/۱۰/۲۵ ..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر علی رجالی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر رسول نصر اصفهانی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه..............

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بیکران، خدایی را که شکر خود را در تشکر از مخلوق به ودیعه نهاد و رسم سپاسگزاری را به ما آموخت، و به رغم قصور و مشکلات فراوان اینجانب، ابراز لطف و کرمش مقدمات انجام این تکالیف را فراهم ساخت.

در اینجا لازم است از زحمات استاد گرانقدر علم و اخلاق جناب آقای دکتر محمود لشکری زاده بمی که بزرگوارانه راهنمایی پایان‌نامه را تقبل نموده و با سعه‌ی صدر، استادانه و در کمال متانت و بردباری با راهنمایی‌های محققانه‌ی خود، زمینه‌ی بهتر شدن این اثر را فراهم نمودند، صمیمانه تشکر نموده و با ارزش‌ترین مراتب قدردانی‌ام را تقدیمشان می‌نمایم.

همچنین از پدر و مادر عزیزم و خواهران و برادرانم که همواره مشوق و پشتیبان من در تمامی مراحل زندگی بوده اند صمیمانه تشکر می کنم.

از دوستان عزیزم آقایان اسماعیل حسینی، محمد رحیم رنجبر، مهدی مرادی،ایمان گلستانی، سجاد حیدری، باقر غفاری، ابوالفضل نظری، مصطفی مرتضوی، خلیل غفاری، محمد ثقفی، محمد صیادی، روح الله همتی، اصغر روزپیکر، ذبیح الله خنجرخانی، هادی محمدزاده، جواد نخودساز، رضا حسینی، علی موسوی و محسن امینی و همچنین آقایان آذرپیرا، رمضانی، نامداری و حکمتی که در دوران تحصیلم همواره یار و همراه من بوده‌اند سپاس‌گذاری می‌کنم.

از اساتید و کادر زحمتکش گروه ریاضی دانشگاه یاسوج و دانشگاه اصفهان بالاخص خانمها گرامی، فرهمند و غازی و آقایان نصیری، رضایی و تسلیمی نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

پدر و مادر عزیزم نامتان زیباترین گلواژه هستی است که خدای عشق آن را بر دفتر دلم نوشت.

تقدیم به

یگانه دانا، که هر چه دارم از اوست.

پدرم که همواره یاری شفیق و آموزگاری داناست.

مادرم که آموزگار عشق و یاری همراه.

او که جسم و جانم در انتظار اوست.

چکیده:

دراین رساله برای یک گروه موضعاً فشردهٔ G دو مسالهٔ زیر را در مورد $P(G)$ (مجموعهٔ توابع معین مثبت پیوسته روی G)مورد بررسی و حل قرار می دهیم.

مسالهٔ اول: برای یک زیرگروه بستهٔ H از G ، چه موقع می توان یک تابع در $P(H)$ را به عضوی در $P(G)$ توسیع داد.

مسالهٔ دوم: آیا عناصر $G \setminus H$ را می‌توان به وسیلهٔ توابع در $P(G)$ که بر H برابر یک هستند از H مجزا نمود.

به‌علاوه شرایطی را مشخص می‌کنیم که G یک گروه SIN (دارای همسایگی‌های پایای کوچک) باشد.

کلید واژه: توسعه‌پذیر، جدایی‌پذیر، موضعاً فشرده، معین مثبت.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

پیش گفتار

فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و P(G) مجموعه تمام توابع معین مثبت روی G باشد. زیرگروه بسته H از G را توسعه پذیر گوییم، اگر هر تابع معین مثبت پیوسته روی H دارای توسیع در P(G) باشد. همچنین گوییم G دارای خاصیت توسیع است اگر هر زیرگروه بسته از G توسعه پذیر باشد.

برای زیرگروه بسته H از G قراردهیم

$$P_H(G)=\{\Phi\in P(G):\Phi(h)=1\forall h\in H\}$$

حال گوییم H زیرگروه جدایی پذیر از G است اگر برای هر $x\in G\setminus H$، $\Phi\in P_H(G)$ بگونه‌ای موجود باشد که $\Phi(x)\neq 1$. یعنی برای هر $x\in G\setminus H$، $\Phi\in P(G)$ بگونه‌ای موجود باشد که $\Phi(x)\neq 1$ و $\Phi(h)=1$ برای هر $h\in H$. همچنین گوییم G دارای خاصیت جداسازی است، اگر هر زیرگروه بسته از G جدایی پذیر باشد.

کائولینگ[1] و رودوی[2] در [۳] نشان می‌دهند که اگر $G\in[SIN]$ باشد، آنگاه H زیر گروه توسعه پذیر است.

به همین ترتیب فورست[3] در [۴] نیز نشان می‌دهد اگر $G\in[SIN]_H$ باشد، آنگاه H زیر گروهی جدایی پذیر است.

در نتیجه اگر G یک گروه SIN باشد، آنگاه G دارای هر دو خاصیت توسیع و جداسازی است.

هدف از این پایان نامه این است که نشان دهیم اگر G دارای خاصیت توسیع و جداسازی باشد آنگاه تحت چه شرایطی G، یک گروه SIN است.

این پایان نامه هشتمل بر پنج فصل به شرح زیر است.

در فصل اول برخی مقدمات اولیه مورد نیاز این پایان‌نامه را مطرح می‌کنیم.

در فصل دوم مقدمه‌ای از خاصیت توسیع را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم و چهارم این مسأ له را بیان می کنیم که چه موقع زیر گروههای دوری بسته از G جدایی پذیر و توسعه پذیر هستند.

در نهایت در فصل پنجم کاربردها و مثالهایی از نتایج به دست آمده در فصول قبلی را بیان می‌کنیم.

---

1 -M.Cowling.
2 -P.Rodway.
3 -Forrest.

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف اولیه، قضایا، لم ها و گزاره‌هایی را که در فصول آینده مورد استفاده قرارمی‌گیرند، گردآوری شده، بعضی از قضایا اثبات و برخی دیگر را بدون اثبات پذیرفته‌ایم.

۱—۱ تورها و فیلترها

تعریف ۱.۱ فرض کنیم A یک مجموعه غیرتهی باشد، هر زیرمجموعه از $A \times A$ را یک رابطه روی A گوییم و با $\leq$ نشان می‌دهیم و به‌علاوه به جای $(\alpha, \beta) \in \leq$ می‌نویسیم $\alpha \leq \beta$.

تعریف ۲.۱ رابطه $\leq$ روی A را یک ترتیب جزیی می‌نامیم هرگاه

۱) برای هر $\alpha \in A$، $\alpha \leq \alpha$.

۲) برای $\alpha, \beta \in A$ اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ دراین صورت $\alpha = \beta$.

۳) برای $\alpha, \beta, \gamma \in A$، اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ دراین صورت $\alpha \leq \gamma$.

تعریف ۳.۱ مجموعه غیرتهی A را یک مجموعه مرتب گوییم، هرگاه یک رابطه ترتیب جزیی $\leq$ روی A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر زوج α و β از A، عنصر $\gamma \in A$ موجود باشد به‌گونه‌ای که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

تعریف ۴.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد، دراین صورت منظور از یک تور در X یک نگاشت چون $f : A \longrightarrow X$ از مجموعه مرتب A به مجموعه X می‌باشد که $\alpha \in A \longmapsto f(\alpha)$. معمولاً $f(\alpha)$ را با x_α نشان می‌دهیم و لذا تور f را با $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ یا $(x_\alpha)_\alpha$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱ خانواده $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه های ناتهی X را یک فیلتر روی X گوییم، هرگاه مقطع هر دو عضو $\mathcal{F}$، عضوی از $\mathcal{F}$ و هر زیر مجموعه B از X که شامل عضوی از $\mathcal{F}$ است، متعلق به $\mathcal{F}$ باشد.

۱—۲ آنالیز تابعی

تعریف ۶.۱ فرض کنیم Y و X دو فضای نرم‌دار روی میدان اعداد مختلط باشند. دراین صورت

الف) نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک عملگر خطی گوییم هرگاه

$$\forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C} : T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

ب) $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار گوییم هرگاه

$$\sup\{\frac{||T(x)||}{||x||} : x \in X, x \neq o\} = \sup\{||T(x)|| : x \in X, ||x|| \leq ۱\} < \infty$$

ج)فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد، آنگاه مجموعه تمام تابعک‌های خطی کراندار روی X را با X^* نشان می‌دهیم و آن را دوگان X می گوییم. که X^* با نرم $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X, ||x|| \leq ۱\}$ یک فضای نرم دار است.

لذا برای $f \in X^*$، مقدار f در $x \in X$ را با نماد $\langle f, x\rangle$ نشان می‌دهیم و آن را دوگانگی بین X و X^* می‌نامیم.

تعریف ۷.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان آن باشد، دراین صورت ضعیف ترین توپولوژی روی X^* به‌طوری‌که برای هر $x \in X$، $\hat{x} \in X^{**}$ نسبت به این توپولوژی پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* گوییم و آن را با $\sigma(X^*, X)$

نشان می‌دهیم.

برای $\varepsilon > 0$ و $f \in X^*$ زیرمجموعه متناهی $\{x_1, ..., x_n\}$ از X تعریف می‌کنیم:

$$U(f; x_1, ..., x_n; \varepsilon) = \{g \in X^* : |\langle \hat{x}_i, g\rangle - \langle \hat{x}_i, f\rangle| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots\}$$
$$= \{g \in X^* : |\langle g, x_i\rangle - \langle f, x_i\rangle| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots\} \qquad (1)$$

در این صورت مجموعه تمام مجموعه‌های به فرم (۱) تشکیل یک پایه برای توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می دهند.

لذا طبق تعریف توپولوژی ضعیف ستاره روی X^*، همگرایی در این توپولوژی به صورت زیر می‌باشد

تور (f_α) را در X^* همگرای ضعیف ستاره به $f \in X^*$ گوییم اگروتنها اگر برای هر $x \in X$،

$$\langle \hat{x}, f_\alpha\rangle = \langle f_\alpha, x\rangle \longrightarrow \langle \hat{x}, f\rangle = \langle f, x\rangle$$

و یا

$$f_\alpha \xrightarrow{\omega^*} f \Leftrightarrow f_\alpha(x) \to f(x)$$

تعریف ۸.۱ فضای برداری مختلط $\mathcal{H}$ را فضای ضرب داخلی می نامیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x, y در $\mathcal{H}$، یک تابع مختلط مقدار روی $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ موجود باشد به‌گونه‌ای که هر جفت (x, y) مقدار $\langle x, y\rangle$ را نسبت می دهد و دارای خواص زیر است

الف) برای هر $x, y, z \in \mathcal{H}$ داریم: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

ب) برای $x, y \in \mathcal{H}$ و اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم: $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

ج) برای $x, y \in \mathcal{H}$ داریم: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

د) اگر $x \in \mathcal{H}$ و $x \neq \circ$ دراین صورت $\langle x, x\rangle > \circ$.

آنگاه تابع $\langle x, y\rangle \longmapsto (x, y)$ را ضرب داخلی و $\mathcal{H}$ را فضای ضرب داخلی می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که با استفاده از نرم $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ یک فضای نرم‌دار است. هرگاه این فضای نرم‌دار تام باشد، یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا باشد $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱ نگاشت خطی T از فضای خطی نرم‌دار E بروی فضای نرم‌دار E' که حافظ نرم باشد، یعنی برای هر $x \in E$ داشته باشیم: $||T(x)|| = ||x||$، را طولپایی خطی می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنیم E و E' دو فضای خطی روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ باشند. نگاشت جمعی w روی E به‌طوری‌که $w(\alpha x) = \overline{\alpha} w(x)$ برای هر $x \in E$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ را نگاشت خطی—مزدوج می‌نامیم.

$E^{\sim}$ را مجموعه تمام تابعک‌های کراندار خطی—مزدوج روی E قرارمی‌دهیم. برای هر $w \in E^{\sim}$، نگاشت $\langle w, T\xi\rangle \longmapsto \xi$ متعلق به $E^{\sim}$ است. ما این نگاشت را با $T^{\sim}w$ نشان می‌دهیم، پس داریم؛ $\langle w, T\xi\rangle = \langle T^{\sim}w, \xi\rangle$ برای هر $w \in E^{\sim}$ و $\xi \in E$.

تابعک $T^{\sim}$ که $E^{\sim}$ را به $E^{\sim}$ می برد، را عملگر الحاقی T می‌نامیم.

فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و T هم یک عملگر کراندار روی $\mathcal{H}$ باشد. اگر $T = T^{\sim}$، دراین صورت T را عملگر هرمیتی [۱] می نامیم.

اگر T یک طولپایی خطی از $\mathcal{H}$ بروی $\mathcal{H}$ باشد در این صورت T را عملگر یکانی می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱ مجموعه E در فضای برداری V را محدب گوییم اگر دارای خاصیت هندسی زیر باشد:

هرگاه $x, y \in E$ و $\circ \leq t \leq ۱$ آنگاه $z_t = (۱ - t)x + ty$ نیز در E واقع باشد. حال فرض کنیم C یک زیرمجموعه محدب از یک فضای برداری E باشد، نقطه‌ی x از C را نقطه‌ی فرین گوییم اگر شرط $x = ty + (۱ - t)z$ جایی که $y, z \in C$ و $\circ \leq t \leq ۱$ ایجاب کند که $x = y = z$. یا به طور معادل x نقطه‌ی فرین از C است اگر و تنها اگر هنگامی که $y, z \in C$ و $x = \frac{y+z}{۲}$ آنگاه $x = y = z$.

تعریف ۱۲.۱ اگر X یک فضای برداری و $A \subseteq X$، اشتراک تمامی مجموعه های محدب شامل A را غلاف A گفته و با $Co(A)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۳.۱ محمل تابع مختلط f برفضای توپولوژیک X، بستار مجموعه $\{x : f(x) \neq \circ\}$ می‌باشد. گردایه تمام توابع مختلط پیوسته بر X که محمل فشرده دارند

[۱] Hermitian

را با $C_c(x)$ نشان می‌دهیم.

۱—۳ نظریه گروهها و گروههای توپولوژیکی

تعریف ۱۴.۱ فرض کنیم $\{X_i : i \in I\}$ یک خانواده ناتهی از مجموعه‌ها باشد. $\Pi_{i\in I}X_i$ را مجموعه تمام توابع x از I بروی $\bigcup_{i\in I} X_i$ به‌طوری‌که $x_i = x(i) \in X_i$ برای هر $i \in I$ تعریف می‌کنیم. این مجموعه را حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌های X_i می‌نامیم. هر عنصر $\Pi_{i\in I}X_i$ به‌صورت (x_i) می‌باشد که برای هر $i \in I$، x_i عنصری از X_i می‌باشد.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنیم $\{G_i : i \in I\}$ یک خانواده ناتهی از گروهها باشند و $\Pi_{i\in I}G_i$ حاصل ضرب دکارتی از مجموعه‌های G_i باشد. برای (x_i) و (y_i) در $\Pi_{i\in I}G_i$، فرض کنیم $(x_i)(y_i) = (x_iy_i)$ و (x_iy_i) متعلق به $\Pi_{i\in I}G_i$ باشد. تحت این ضرب $\Pi_{i\in I}G_i$ یک گروه است و آن را حاصل ضرب مستقیم گروههای G_i می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنیم G و H دو گروه دلخواه باشند و همسانی $h \longmapsto \alpha_h$ موجود باشدبه‌طوری‌که H را برروی گروه خودسانی‌های G می‌برد و برای هر $h, h' \in H$ داشته باشیم:

$$\alpha_h \circ \alpha_{h'} = \alpha_{hh'}$$

حال فرض می‌کنیم $H \circledS G$ حاصل ضرب دکارتی از G و H باشد. برای (h,x) و (h',x') در $H \circledS G$ قرارمی‌دهیم:

$$(h,x)(h',x') = (hh', x\alpha_{h'}(x')).$$

دراین صورت $H \circledS G$ یک گروه است و حاصل‌ضرب نیم مستقیم H و G نامیده می‌شود.

عنصر وارون نیز به‌صورت $(h,x)^{-1} = (h^{-1}, \alpha_{h^{-1}}(x^{-1}))$. در حالت خاص اگر برای هر $h \in H$ و $g \in G$ داشته باشیم که: $\alpha_h(g) = g$ آنگاه حاصل ضرب نیم مستقیم H و G با حاصل ضرب مستقیم H و G برابر است، یعنی $H \circledS G = H \times G$.

تعریف ۱.۱۷ اگر گروه G توسط تعدادی زیرمجموعه متناهی تولید شده باشد، آنگاه گروه G را متناهیاً تولید شده می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۸ اگر هر عضو از گروه G دارای مرتبهٔ متناهی باشد، گروه G را گروه تابی می‌نامیم. اگر هر عضو از G بجز عنصر همانی (e) دارای مرتبه نامتناهی باشد، در این صورت G را گروه آزاد تابی می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۹ فرض کنیم G یک گروه باشد. $Z(G)$ مرکز گروه G، یک زیرگروه نرمال است (نتیجه ۷.۴.۲[۱۰]). فرض کنیم $Z_2(G)$ تصویر معکوس $Z(G/Z(G))$ تحت

تصویر کانونی $G \longrightarrow G/Z(G)$ باشد. دراین صورت طبق برهان قضیه ۱۱.۵.۱ [۱۰]، $Z_2(G)$ در G نرمال است و شامل $Z(G)$ می‌باشد. این فرآیند را با تعریف استقرایی زیرا ادامه می دهیم:

$Z_1(G) = Z(G)$ و $Z_i(G)$ را تصویر معکوس $Z(G/Z_{i-1}(G))$ تحت تصویر کانونی $G \longrightarrow G/Z_{i-1}(G)$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، دنباله‌ای از زیرگروههای نرمال G، بنام سری مرکزی افزایشی G، مانند $e \leq Z(G) \leq Z_2(G) \leq ......$، به‌دست می آوریم.

حال گروه G را پوچ توان می‌نامیم اگر $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $Z_n(G) = G$.

هرگروه آبلی پوچ توان است زیرا: $G = Z(G) = Z_1(G)$

تعریف ۲۰.۱ فرض کنیم G گروه باشد. زیرگروه G تولید شده بوسیله مجموعه $\{aba^{-1}b^{-1} | a, b \in G\}$ زیرگروه جابجاگر نام دارد و با $[G, G]$ نموده می‌شود.

مجموعه عناصر $aba^{-1}b^{-1}$ $(a, b \in G)$ را مجموعه جابجاگر می‌نامند. جابجاگرها فقط $[G, G]$ را تولید می‌کنند؛ در نتیجه $[G, G]$ ممکن است شامل عنصری باشد که جابجاگر نیستند. G آبلی است اگروفقط اگر $[G, G] = e$. به عبارت دیگر $[G, G]$، تفاوت G از یک گروه آبلی را می‌سنجد.

تعریف ۲۱.۱ فرض کنیم G گروه و $G^{(1)}$ مساوی $G' = [G, G]$ باشد. به ازای $i \geq 1$، $G^{(i)}$ را با $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ تعریف می‌کنیم. $G^{(i)}$ زیرگروه مشتق iام G نامیده می‌شود.

از آنجا دنبالهٔ زیر از زیرگروههای G به‌دست می آید: $G \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq ......$

که بنابر قضیه ۸.۷.۲ [۱۰] هریک در ماقبل خود نرمال است. حال گوییم گروه G حلپذیر است اگر $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که $G^{(n)} = e$.

تعریف ۲۲.۱ گروه G را بخش‌پذیر می‌نامیم اگر برای هر $x \in G$ و $n = 2, 3, ...$، عنصر y متعلق به G موجود باشد به‌گونه‌ای که $x = y^n$.

تعریف ۲۳.۱ فرض کنیم G یک گروه و یک فضای توپولوژی باشد که در شرایط زیرصدق کند؛

الف) نگاشت $(x, y) \longmapsto xy$ از $G \times G$ روی G یک نگاشت پیوسته از حاصل ضرب دکارتی $G \times G$ برروی G باشد.

ب) نگاشت $x \longmapsto x^{-1}$ بروی G پیوسته باشد.

دراین صورت G را گروه توپولوژیکی می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱ فرض کنیم G یک گروه توپولوژیکی باشد، همسایگی U در G را متقارن گوییم، هرگاه $U = U^{-1}$.

تعریف ۲۵.۱ گروه توپولوژیکی G را σ—فشرده می‌نامیم اگر اجتماع شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های فشرده G باشد.

تعریف ۲۶.۱ گروه توپولوژیکی G را موضعاً فشرده می‌نامیم اگر هر نقطه از G دارای همسایگی U باشد به‌طوری‌که $\overline{U}$ زیرمجموعه فشرده از گروه G باشد.

تعریف ۲۷.۱ فرض کنیم G گروه توپولوژیکی و a عضوی از G باشد. عنصر a را فشرده گوییم اگر کوچکترین زیرگروه بسته از G و شامل a، فشرده باشد. مجموعه تمام عناصر فشرده از G را با G^c نمایش می‌دهیم.

لم ۲۸.۱ فرض کنیم G گروه توپولوژیکی و G^c مجموعه عناصر فشرده G باشد، اگر G پوچ توان باشد آنگاه G^c زیرگروه بسته از G است.

برهان به [۵] رجوع شود. □

تعریف ۲۹.۱ فرض کنیم G یک گروه توپولوژیکی باشد، دراین صورت گوییم G، به‌طور فشرده تولید می شود اگر توسط یک زیرمجموعه فشرده F از G تولید شود.

در این حالت داریم:

$$G = \{e\} \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \bigcup F^{-1})^n$$