دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی وآمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض، گرایش جبر(حلقه-مدول)

عنوان

زیر مدول های به طور قوی اول، ارزیابی گسسته و مدول های شبه ارزیابی

استاد راهنما

دکتر محمدحسین حسینی

استاد مشاور

دکتر حسین فضائلی مقیمی

نگارنده

محبوبه ذوالفقاری

شهریور۱۳۹۳

چکیده

فرض کنید R دامنه‌ی صحیح با میدان خارج‌قسمتی K باشد. در این پایان‌نامه ابتدا تعمیمی از حلقه‌های ارزیابی و حلقه‌های ارزیابی گسسته به مدول‌های ارزیابی و مدول‌های ارزیابی گسسته بررسی می‌شود. R-مدول بدون تاب M را یک مدول ارزیابی (VM) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $y \in K$، $yM \subseteq M$ یا $y^{-1}M \subseteq M$ (یا به طور معادل به ازای هر $y \in K$ و $x \in M$، $yx \in M$ یا $y^{-1}M \subseteq M$). نشان خواهیم داد که اگر M یک مدول ارزیابی ضربی باشد، آن‌گاه با تولید متناهی است. هم‌چنین به بررسی و ارتباط بین حلقه‌های ارزیابی و مدول‌های ارزیابی خواهیم پرداخت.

R-زیرمدول N از M_T را یک زیرمدول کسری از M می‌نامیم، هرگاه $r \in T = R - \{0\}$ وجود داشته باشد به طوری‌که $rN \subseteq M$. ثابت خواهیم کرد اگر M یک مدول ارزیابی ضربی باشد، مجموعه‌ی زیرمدول‌های کسری M، تحت شمول به طور خطی مرتب هستند.

هم‌چنین در یک دامنه موضعی یک بعدی، هرگاه هر زیرمدول کسری ناصفر از مدول نوتری باوفای M، وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه M یک مدول ارزیابی گسسته است. هم‌چنین نشان خواهیم داد که با این شرایط، اگر M یک DVM باشد، آن‌گاه M یک مدول ددکیند است.

علاوه بر این موارد، به بررسی مدول‌های شبه ارزیابی (PVM) خواهیم پرداخت. مدول M را یک مدول شبه ارزیابی می‌نامیم، هرگاه هر زیرمدول اول از M به طور قوی اول باشد. نشان خواهیم داد که اگر M یک مدول شبه ارزیابی به طور صحیح بسته نوتری باشد، آن‌گاه M یک VM است.

واژگان کلیدی: مدول ضربی؛ حلقه ارزیابی؛ مدول ارزیابی؛ زیرمدول کسری؛ مدول ارزیابی گسسته؛ زیرمدول به طور قوی اول؛ مدول شبه ارزیابی

تعداد صفحات پایان نامه: ۹۳

تقدیم به

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، معرفت را، عشق را

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید:

پدرم

کوهی استوار و حامی من در تمام طول زندگی

مادرم

سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت

و تقدیم به

شهید گمنام مسجد امام جعفر صادق (ع) دانشگاه بیرجند.

سپاس گزاری...

سپاس آفریدگاری را که آغاز همه از اوست و انجام همه بدوست، بلکه خود همه اوست. خداوندی که سخنوران از ستودن او عاجزند و حسابگران از شمارش نعمت‌های او ناتوان و افکار ژرف‌اندیش، قاصر از درک ذات او. پروردگارا؛ من که در دانش خود جاهلم، چگونه در جهل خویش نادان نباشم! من که در توانگری خود نیازمندم، چگونه نباشم نیازمند، در نداری خود!

معبودا؛ پناه می‌برم به تو از نفسی که سیر نشود، از قلبی که خاشع نشود و از دانشی که بهره ندهد، بار خدایا آنچه دارم از توست. هم اکنون که به لطف تو این مهم را به پایان رسانیده‌ام بر خود واجب می‌دانم از زحمات عزیزانی که در این راه مرا یاری نموده‌اند سپاسگزاری نمایم. از پدر و مادر و خانواده‌ی عزیزم که همواره موجبات دلگرمی‌ام را فراهم نموده‌اند، سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر محمدحسین حسینی که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند، از جناب اقای دکتر حسین فضائلی مقیمی که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و از ایشان نیز بهره‌ی فراوان برده‌ام، از استاد فرزانه و دلسوز جناب اقای دکتر حسین اقدامی که مطالعه و داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و از محضر پر فیض تدریسشان، بهره‌ها برده‌ام، از جناب آقای دکتر محمدمهدی نصرآبادی که با وجود مشغله‌ی فراوان زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، تشکر و قدردانی می‌نمایم و تشکر و سپاس از جناب آقای دکتر مهدی سمیعی و خانم زارعی جلال آبادی که از راهنمایی‌های ایشان نیز بی‌بهره نماندم.

در پایان از تمامی دوستانم که گرمای وجودشان تحمل رنج دوری را بر من سهل نمود و در انجام این مهم مرا یاری نمودند سپاسگزارم. از خداوند منان توفیق و کامیابی روزافزون را برای همگی‌شان آرزومندم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

محبوبه ذوالفقاری

شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

این پایان‌نامه به تعمیمی از حلقه‌های ارزیابی، ارزیابی گسسته و شبه ارزیابی به مدول‌های ارزیابی، ارزیابی گسسته و شبه ارزیابی می‌پردازد. در واقع مدول‌های ارزیابی را روی مدول‌های ضربی بررسی خواهیم کرد. ویژگی‌های مدول‌های ضربی در مقالات متعددی از زوایای گوناگون مورد بررسی قرارگرفته است. [۱]، [۴]، [۱۷]، [۲۰]. به عنوان مثال ز. ال باست [۲] و پی. اف. اسمیت [۳] در [۱] نشان دادند که هر مدول ضربی باوفا با تولید متناهی است. هم‌چنین در [۲] نشان داده شده است که اگر M یک مدول ددکیند با تولید متناهی روی حلقه‌ی به طور صحیح بسته‌ی R باشد آن‌گاه M یک مدول ضربی است.

دامنه‌ی صحیح R با میدان خارج‌قسمتی K یک حلقه‌ی ارزیابی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $y \in K - \{0\}$، $y \in R$ یا $y^{-1} \in R$ [۷]. همچنین دامنه‌ی R را یک دامنه‌ی شبه ارزیابی می‌نامیم هرگاه هر ایده‌آل اول از R به طور قوی اول باشد. جی. ر. هدستورم [۴] و ای. جی. هاستون [۵] با استفاده از تعریف ایده‌آل به طور قوی اول، دامنه‌های شبه ارزیابی را معرفی کردند. [۸]، [۹]. در [۸] نشان داده شده است که هر دامنه‌ی ارزیابی یک دامنه‌ی شبه ارزیابی است. در اینجا نشان خواهیم داد که این مسأله برای مدول‌ها صادق نیست.

ر. نکوئی و ج. مقدری به تعمیم این مفاهیم به مدول‌ها و بررسی ارتباط بین مدول‌های ارزیابی و مدول‌های شبه ارزیابی پرداختند که موضوع اصلی این پایان‌نامه می‌باشد. [۱۳]، [۱۴].

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول که شامل سه بخش است ابتدا تعاریف مقدماتی را یادآوری خواهیم کرد، سپس در بخش دوم به معرفی مختصری از مدول‌های ضربی و ویژگی‌های آن‌ها پرداخته و در بخش سوم به معرفی و بررسی مدول‌های ارزیابی خواهیم پرداخت. در فصل دوم در سه بخش به معرفی زیرمدول‌های کسری، مدول‌های ارزیابی گسسته و مدول‌های ددکیند می‌پردازیم و ارتباط بین آن‌ها را بررسی خواهیم کرد. در فصل سوم زیرمدول‌های به طور قوی اول را بررسی کرده و سپس مدول‌های شبه ارزیابی را معرفی می‌کنیم و ارتباط آن‌ها را با مدول‌های ارزیابی به دست خواهیم آورد.

---
[۲] Z. Abd El-bast
[۳] P. F. Smith
[۴] J. R. Hedstrom
[۵] E. G. Houston

فصل ۱
مدول های ارزیابی

.

در ابتدا چند تعریف و قضیه را جهت یادآوری ارائه می‌دهیم. سپس به معرفی مدول‌های ارزیابی پرداخته و نتایج مهم و قابل توجهی را برای مدول‌های ارزیابی ضربی اثبات می‌کنیم. در این فصل از [۱]، [۴]، [۶]، [۷]، [۱۳] و [۲۰] استفاده شده است.

۱.۱ یادآوری

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت زیر مجموعه‌ی S از R یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی نامیده می شود، هرگاه

۱) $1 \in S$

۲) برای هر $a, b \in S$، $ab \in S$.

مثال ۲.۱.۱. اگر $R = \mathbb{Z}_6$ و $S = \{\bar{1}, \bar{3}\}$ آن‌گاه S مجموعه‌ی بسته ضربی است.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $S = R - P$ بسته‌ی ضربی است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. رابطه‌ی هم ارزی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall (a, s), (b, t) \in R \times S$$

$$(a,s) \sim (b,t) \Longleftrightarrow \exists u \in S \;; \quad u(ta-sb)=\circ$$

کلاس هم ارزی $(a,s) \in R \times S$ را با $\frac{a}{s}$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم ارزی را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم. لذا $S^{-1}R = \{\frac{a}{s} | a \in R, s \in S\}$.

لم ۵.۱.۱. *مجموعه‌ی $S^{-1}R$ با جمع وضرب زیر تشکیل یک حلقه می‌دهد:*

$$\forall a, a', b, b' \in R, \forall s, s' \in S$$

$$(\frac{a}{s}) + (\frac{a'}{s'}) = \frac{as' + a's}{ss'} \qquad (\frac{a}{s})(\frac{a'}{s'}) = \frac{aa'}{ss'}$$

حلقه‌ی $S^{-1}R$ را حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S می‌گوئیم.

برهان. به گزاره‌ی ۱.۳.۲ از [۷] رجوع شود. □

تبصره ۶.۱.۱. *اگر R دامنه‌ی صحیح باشد و $S = R - \{\circ\}$، آن‌گاه $S^{-1}R$ یک میدان است که آن را میدان کسرهای R می‌نامیم.*

تبصره ۷.۱.۱. *فرض کنید P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت اگر $S = R - P$ آن‌گاه $S^{-1}R$ را با R_P نشان می‌دهیم.*

تعریف ۸.۱.۱. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی شبه موضعی گوئیم، هرگاه تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. در حالتی که حلقه‌ی R نوتری نیز باشد، آن را یک حلقه‌ی موضعی می‌نامیم.

مثال ۹.۱.۱. میدان‌ها موضعی هستند.

مثال ۱۰.۱.۱. در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_۴$ ، $\{\bar{\circ}, \bar{۲}\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال آن است. لذا $\mathbb{Z}_۴$ یک حلقه شبه موضعی است.

مثال ۱۱.۱.۱. حلقه کسرهای R_P یک حلقه شبه موضعی است، زیرا $P_P = \{\frac{a}{s} | a \in P, s \in S\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R_P است که در آن P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R است. (مثال ۳.۳.۲ از [۷] را ملاحظه کنید).

تبصره ۱۲.۱.۱. *روند طی شده از R به R_P موضعی سازی R در P نامیده می‌شود.*

در ادامه به‌طور مشابه، مدول کسرها را نیز تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول و S یک مجموعه‌ی بسته ضربی از R باشد. رابطه‌ی هم ارزی $\sim$ را روی $M \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall m, m' \in M, \forall s, s' \in S$$

$$(m, s) \sim (m', s') \iff \exists t \in S \; ; \qquad t(sm' - s'm) = ۰$$

مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم ارزی $\frac{m}{s}(m \in M, s \in S)$، ناشی از این رابطه‌ی هم ارزی را با $S^{-۱}M$ و یا M_S نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر $M_S = \{\frac{m}{s} | m \in M, s \in S\}$
با جمع وضرب زیر می‌توان M_S را به یک R_S- مدول تبدیل کرد.

$$\forall m, m' \in M, \forall s, s' \in S, \forall a \in R$$

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{ms' + m's}{ss'}, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} = \frac{am}{ss'}$$

هم چنین اگر P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R باشد و $S = R - P$، آن‌گاه M_S را با M_P نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۴.۱.۱. *فرض کنید $M_۱ \longrightarrow M_۲ \longrightarrow M_۳$ دنباله‌ای دقیق از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها باشد و S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این‌صورت دنباله‌ی زیر، دنباله‌ای دقیق از R_s- مدول‌هاست.*

$$S^{-۱}M_۱ \longrightarrow S^{-۱}M_۲ \longrightarrow S^{-۱}M_۳$$

برهان. به گزاره‌ی ۳.۳ از [۵] رجوع شود. □

نتیجه ۱۵.۱.۱. *فرض کنید N و P زیرمدول‌هایی از M باشند و S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرار است:*

۱) $S^{-۱}(N + P) = S^{-۱}(N) + S^{-۱}(P)$

۲) $S^{-۱}(N \cap P) = S^{-۱}(N) \cap S^{-۱}(P)$

۳) $S^{-۱}(\frac{M}{N}) \cong \dfrac{S^{-۱}(M)}{S^{-۱}(N)}$

برهان. به نتیجه‌ی ۴.۳ از [۵] رجوع شود. □

گزاره ۱۶.۱.۱. *فرض کنید M یک R-مدول با تولید متناهی و S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. دراین‌صورت $S^{-۱}(ann(M)) = ann(S^{-۱}(M))$.*

برهان. به گزاره‌ی ۱۴.۳ از [۵] رجوع شود. □

گزاره ۱۷.۱.۱. *فرض کنید M یک R-مدول نوتری و S یک مجموعه‌ی بسته ضربی از R باشد. در این‌صورت M_s یک R_s-مدول نوتری است.*

برهان. به گزاره‌ی ۳.۱.۳ از [۷] رجوع شود. □

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت زیرمجموعه‌ی $T(M) = \{m \in M | \exists \circ \neq r \in R;\ rm = \circ\}$ یک زیرمدول از R-مدول M است. زیرمدول $T(M)$ را زیرمدول تابدار می‌نامیم. اگر $T(M) = M$، آن‌گاه مدول M را مدول تابدار و اگر $T(M) = \circ$، آن‌گاه M را بدون تاب می‌نامیم.

مثال ۱۹.۱.۱. $\mathbb{Z}$- زیرمدول صفر از $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$، یک مدول تابدار است.

مثال ۲۰.۱.۱. $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}$، یک مدول بدون تاب است.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید S یک حلقه و R زیر حلقه‌ای از آن باشد. دراینصورت عنصر x از S روی R یک عنصر صحیح نامیده می‌شود، هرگاه x در یک چند جمله‌ای تکین با ضرایب در R صدق کند. به عبارت دیگر $(1 \leq i \leq n) a_i \in R$ به قسمی موجود باشند که $x^n + a_\circ x^{n-1} + \ldots + a_n = \circ$
واضح است که عناصر R روی R صحیح هستند.
مجموعه‌ی همه اعضای S که روی R صحیح باشند را بستار صحیح R در S می‌نامیم که زیر حلقه‌ای از S شامل R می‌باشد.
اگر بستار صحیح R در S دقیقا R باشد، آن‌گاه گوئیم R به طور صحیح بسته است.
اگر بستار صحیح R در S دقیقا S باشد، آن‌گاه حلقه‌ی S یک توسیع صحیح از R نامیده می‌شود. [۷].

مثال ۲۲.۱.۱. $\mathbb{Z}$ در میدان $\mathbb{Q}$ به طور صحیح بسته است. (مثال ۴.۱.۴ از [۷] را ملاحظه کنید).

قضیه ۲۳.۱.۱. *فرض کنید R و S دو حلقه باشند به طوری‌که R زیرحلقه‌ای از S باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

۱) *هرعنصر $\alpha \in S$ روی R صحیح است؛*

۲) *$R[\alpha]$ به عنوان R-مدول با تولید متناهی است؛*

۳) *$R[\alpha]$- مدول باوفای M وجود دارد به طوری‌که به عنوان R-مدول با تولید متناهی است.*

برهان. به قضیه‌ی ۱.۱.۴ از [۷] رجوع شود. □

گزاره ۲۴.۱.۱. *فرض کنید $S \supset R$ دو حلقه باشند به طوری‌که S روی R صحیح است. در این‌صورت برای هر ایده‌آل اول P از R، ایده‌آل اول P' از S وجود دارد به طوری‌که $P = P' \cap R$.*

برهان. به گزاره‌ی ۲.۲.۴ از [۷] رجوع شود. □

تعریف ۲۵.۱.۱. مجموعه‌ی غیر تهی S یک مجموعه به طورکلی مرتب (به طور خطی مرتب) نامیده می‌شود، هرگاه یک رابطه مانند $\leq$ روی S تعریف شود به طوری‌که دارای خاصیت های بازتابی، پادتقارنی و تعدی باشد و برای هر $\lambda, \mu \in s$ داشته باشیم $\mu \leq \lambda$ یا $\lambda \leq \mu$. در این حالت $\leq$ یک رابطه ترتیب کلی روی S نامیده می‌شود.

تعریف ۲۶.۱.۱. مجموعه‌ی غیر تهی S را یک مجموعه به طور جزئی مرتب می‌نامیم، هرگاه یک رابطه مانند $\leq$ روی S تعریف شود به طوری‌که دارای خاصیت های بازتابی، پادتقارنی و تعدی باشد. در این حالت $\leq$ را یک رابطه ترتیب جزئی روی S می‌نامیم.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید K یک میدان باشد. در این‌صورت زیر حلقه‌ی R از میدان K یک حلقه‌ی ارزیابی از K نامیده می‌شود هرگاه برای هر $0 \neq a \in K$ داشته باشیم $a \in R$ یا $a^{-1} \in R$.

مثال ۲۸.۱.۱. میدان K یک حلقه ارزیابی از K است.

مثال ۲۹.۱.۱. فرض کنید $K = \mathbb{Q}$ و p یک عدد اول ثابت باشد. در این‌صورت اگر R را مجموعه‌ی همه اعداد گویا به فرم $p^r \frac{m}{n}$ در نظر بگیریم که $r \geq 0$ و p هیچ کدام از m و n را عاد نکند، آن‌گاه به‌وضوح مشاهده می‌کنیم که R یک حلقه ارزیابی از K است (مثال ۴.۱.۵ از [۷] را ملاحظه کنید).

مثال ۳۰.۱.۱. اگر V' یک حلقه ارزیابی از میدان K'، و K یک زیر میدان از K' فرض شود، آن‌گاه V' یک حلقه ارزیابی از K است.

گزاره ۳۱.۱.۱. *اگر V یک حلقه ارزیابی از میدان K باشد، آن‌گاه*

۱) *میدان کسرهای V همان K می باشد؛*

۲) *هر زیرحلقه‌ی K شامل V، یک حلقه ارزیابی از K است؛*

۳) *V یک حلقه‌ی شبه موضعی می باشد؛*

۴) V به طور صحیح بسته است.

برهان. به گزاره‌ی ۳.۱.۵ از [۷] رجوع شود. □

گزاره ۳۲.۱.۱. *اگر I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی ارزیابی V باشند، آن‌گاه $I \subseteq J$ یا $J \subseteq I$. بنابراین ایده‌آل‌های V تحت شمول به طور کلی مرتب می‌باشند. برعکس فرض کنید V یک حوزه‌ی صحیح با میدان کسرهای K باشد، در این‌صورت اگر ایده‌آل‌های V تحت شمول به طور کلی مرتب باشند، آن‌گاه V یک حلقه ارزیابی از K است.*

برهان. به گزاره‌ی ۴.۱.۵ از [۷] رجوع شود. □

نتیجه ۳۳.۱.۱. *اگر P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی ارزیابی V باشد، آن‌گاه V_p و $\frac{V}{P}$ حلقه‌های ارزیابی هستند.*

برهان. به نتیجه‌ی ۱.۱.۵ از [۷] رجوع شود. □

نتیجه ۳۴.۱.۱. *اگر V یک حلقه ارزیابی نوتری باشد، آن‌گاه V یک PID است. علاوه بر آن، هر ایده‌آل از V به شکل p^m است، که در آن p یک عدد اول است، $m \geq ۰$ و $\bigcap_{m=۱}^{\infty}(p^m) = ۰$.*

برهان. به نتایج ۲.۱.۵ و ۳.۱.۵ از [۷] رجوع شود. □

۲.۱ مدول ضربی

در این بخش به معرفی مختصری از مدول‌های ضربی پرداخته و پاره‌ای از خصوصیات آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. در این‌صورت M را ضربی گوئیم هرگاه برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R وجود داشته باشد به طوری‌که $N = IM$.
هم چنین ایده‌آل A از حلقه‌ی R را ایده‌آل ضربی می‌نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آل B از R که $B \subseteq A$ ایده‌آل C از حلقه‌ی R وجود داشته باشد به طوری‌که $B = AC$. بنابراین ایده‌آل‌های ضربی، مدول‌های ضربی هستند.

لم ۲.۲.۱. *فرض کنید M یک مدول ضربی و N یک زیر مدول از M باشد. در این‌صورت*

$$N = (ann(\frac{M}{N}))M.$$

برهان. قرار می‌دهیم $A = ann(\frac{M}{N})$. چون M ضربی است ایده‌آل I از R وجود دارد که $N = IM$. لذا $I \subseteq A$ و بنابراین $N = IM \subseteq AM \subseteq N$ که ایجاب می‌کند $N = AM$. □

گزاره ۳.۲.۱. *فرض کنید M یک R-مدول باشد. دراین‌صورت M یک مدول ضربی است اگر وتنها اگر به ازای هر $m \in M$، ایده‌آل I از R وجود داشته باشد به طوری‌که $Rm = IM$.*

برهان. ($\Leftarrow$) بنا به تعریف مدول ضربی واضح است.
($\Rightarrow$) فرض می‌کنیم N زیرمدولی از M باشد و به ازای هر $m \in M$، ایده‌آل I از R وجود داشته باشد به طوری‌که $Rm = IM$. در این‌صورت به ازای هر $x \in N$، ایده‌آل I_x وجود دارد به طوری‌که $Rx = I_xM$. قرارمی‌دهیم $I = \Sigma_{x \in N} Ix$. از این‌رو $N = IM$ و بنابراین M یک مدول ضربی است. □

مثال ۴.۲.۱. هر R-مدول دوری، یک مدول ضربی است، زیرا اگر M یک R-مدول دوری باشد، یعنی $m \in M$ وجود داشته باشد که $M = Rm$ و N زیر مدولی از M باشد، آن‌گاه

$$N = (ann(\frac{M}{N}))M.$$

برای این منظور، دیدیم $(ann(\frac{M}{N})).M \subseteq N$. هم‌چنین برای هر $x \in N$، $r \in R$ وجود دارد که $x = rm$. از این رو

$$\begin{aligned} rM = Rrm = Rx \subseteq N \Longrightarrow rM \subseteq N &\Longrightarrow r.\frac{M}{N} = 0 \\ &\Longrightarrow r \in ann(\frac{M}{N}) \\ &\Longrightarrow x = rm \in ann(\frac{M}{N})M \\ &\Longrightarrow N \subseteq ann(\frac{M}{N})M \end{aligned}$$

لذا M یک R-مدول ضربی می‌باشد.

در مثال قبل دیدیم که هر R-مدول دوری، ضربی است. حال به بررسی عکس این مطلب می‌پردازیم.
ابتدا به لم زیر که مشابه لم ناکایاما می‌باشد، توجه کنید؛

لم ۵.۲.۱. *فرض کنید M یک R-مدول ضربی و I ایده‌آلی از R و مشمول در $J(R)$ باشد. در این‌صورت اگر $M = IM$ آن‌گاه $M = 0$.*

برهان. فرض می‌کنیم $x \in M$. در این‌صورت چون M ضربی است، ایده‌آلی مانند E از R وجود دارد به طوری‌که $Rx = EM$. بنابراین

$$\begin{aligned} Rx &= EM = EIM = IRx = Ix \\ &\Longrightarrow \exists a \in I; x = ax \\ &\Longrightarrow (1-a)x = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه $M = 0$. □

گزاره ۶.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه‌ی شبه موضعی باشد. در این‌صورت هر R-مدول ضربی، دوری است.*

برهان. فرض می‌کنیم P تنها ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی R و M یک R-مدول ضربی ناصفر باشد. دراین‌صورت طبق لم قبل، $M \neq PM$. از طرفی چون M ضربی است، برای $x \in M$، ایده‌آلی مانند I از R وجود دارد به قسمی که $Rx = IM$. نشان می‌دهیم $I = R$.
اگر $I \neq R$ آن‌گاه $I \subseteq P$ و بنابراین

$$\begin{aligned} IM \subseteq PM &\Longrightarrow Rx \subseteq PM \\ &\Longrightarrow x \in PM \end{aligned}$$

که تناقض است. بنابراین $M = Rx$. لذا M دوری می‌باشد. □

در لم زیر ارتباط ضربی بودن R-مدول M را با ضربی بودن R_s-مدول M_s بررسی می‌کنیم که S یک زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از R است. البته در روند اثبات آن به لم زیر نیز نیاز داریم.

لم ۷.۲.۱. *فرض کنید M یک R-مدول با تولید متناهی و S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این‌صورت برای هر زیرمدول N از M، $S^{-1}(N:M) = (S^{-1}N : S^{-1}M)$.*

برهان. می‌دانیم $(N:M) = ann(\frac{M}{N})$. بنابراین

$$S^{-1}(N:M) = S^{-1}(ann(\frac{M}{N}))$$

و بنا به گزاره‌ی ۱۶.۱.۱، $S^{-1}(ann(\frac{M}{N})) = ann(S^{-1}(\frac{M}{N}))$. از طرف دیگر بنا به نتیجه‌ی ۲۷.۲.۱،

$$ann(S^{-1}(\frac{M}{N})) \cong ann(\frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}) = (S^{-1}N : S^{-1}M)$$

□

لم ۸.۲.۱. *۱) اگر S یک مجموعه‌ی بسته ضربی از R و M یک R-مدول ضربی باشد آن‌گاه M_s یک R_s-مدول ضربی است.*

۲) R- مدول باتولید متناهی M، ضربی است اگر وتنها اگر برای هر ایده‌آل اول (یا ماکسیمال) مانند P از حلقه‌ی R، M_P یک R_p-مدول ضربی باشد.

برهان. ۱) فرض می‌کنیم M یک R-مدول ضربی و T زیر مدولی از R_s-مدول M_s باشد. در این‌صورت زیر مدولی مانند N از M وجود دارد به طوری‌که $T = N_s$. با توجه به ضربی بودن M ایده‌آلی مانند I از R وجود دارد به طوری‌که $N = IM$. پس $N_s = I_sM_s$ و لذا M_s یک R_s-مدول ضربی است.

۲) ($\Leftarrow$) فرض می‌کنیم M یک R-مدول ضربی و P یک ایده‌آل اول (یا ماکسیمال) از R باشد. در این‌صورت کافیست در قسمت (۱)، قرار دهیم $S = R - P$. لذا M_P یک R_P-مدول ضربی است.

($\Rightarrow$) فرض می‌کنیم برای هر ایده‌آل اول (یا ماکسیمال) از حلقه‌ی R، M_P یک R_P-مدول ضربی باشد. در این‌صورت اگر N زیر مدول دلخواهی از R-مدول M باشد، آن‌گاه N_P یک زیر مدول از R_P-مدول M_P می‌باشد. چون M_P ضربی است، پس $N_P = (N_P : M_P)M_P$. از طرفی چون M با تولید متناهی است بنا به لم ۷.۲.۱،

$$(N_P : M_P) = (N : M)_P$$

از این‌رو

$$N_P = (N : M)_P M_P \Longrightarrow N_P = ((N : M)M)_P$$

چون P ایده‌آل اول (یا ماکسیمال) دلخواهی بود، لذا $N = (N : M)M$ و در نتیجه M یک R-مدول ضربی است. $\square$

قضیه ۹.۲.۱. *هر تصویر همریخت از یک مدول ضربی، مدول ضربی است.*

برهان. فرض می‌کنیم $\phi : M \longrightarrow M'$ یک برووریختی و N' زیرمدولی از M' باشد. در این‌صورت چون ϕ پوشاست، زیرمدول N از M موجود است که $\phi(N) = N'$. حال چون M ضربی است پس ایده‌ال I از R وجود دارد که $N = IM$. بنابراین

$$N' = \phi(N) = \phi(IM) = I\phi(M) = IM'$$

در نتیجه M' یک R-مدول ضربی است. $\square$

نتیجه ۱.۲.۱۰. *فرض کنید M یک R-مدول ضربی و N یک زیر مدول سره از M باشد. در این‌صورت $\frac{M}{N}$ ، یک R-مدول ضربی است.*

برهان. با توجه به قضیه‌ی قبل بدیهی است. □

در ادامه یک شرط لازم و کافی بسیار مهم برای ضربی بودن مدول را بیان و ثابت می‌کنیم. در ابتدا به بیان چند تعریف می‌پردازیم:

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنید M یک R-مدول و P یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه‌ی R باشد. قرار می‌دهیم $T_P(M) = \{m \in M | \exists p \in P; (1-p)m = 0\}$. در این‌صورت به‌وضوح $T_P(M)$ زیر مدولی از M است. اگر $T_P(M) = M$ آن‌گاه مدول M را یک مدول P- تابی می‌نامیم.

مثال ۱.۲.۱۲. $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}_4$، $3\mathbb{Z}$- تابی است.

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنید M یک R- مدول و P یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت M را P- دوری گوئیم، هرگاه $q \in P$ و $m \in M$ وجود داشته باشد به طوری‌که $(1-q)M \subseteq Rm$.

مثال ۱.۲.۱۴. $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}$، $2\mathbb{Z}$- دوری است.

لم ۱.۲.۱۵. *فرض کنید M یک R-مدول ضربی و P یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد. در این‌صورت M، P- تابی است اگر وتنها اگر $M = PM$.*

برهان. $(\Leftarrow)$ واضح است.
$(\Rightarrow)$ فرض می‌کنیم M یک R-مدول ضربی و $M = PM$. در این‌صورت به ازای هر $m \in M$، ایده‌آل I از R وجود دارد به طوری‌که $Rm = IM$. داریم

$$Rm = IM = IPM = PIM = PRm = Pm$$

$$\Longrightarrow (R-P)m = 0 \Longrightarrow \exists p \in P; (1-p)m = 0 \Longrightarrow m \in T_P(M)$$

بنابراین M، P- تابی است. □

قضیه ۱.۲.۱۶. R- *مدول M ضربی است اگر وتنها اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال P از R، مدول M، P- دوری یا P- تابی باشد.*

برهان. ($\Leftarrow$) فرض می‌کنیم M یک مدول ضربی و P یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد و M، P- تابی نباشد. در این‌صورت نشان می‌دهیم M، P- دوری است. چون M، P- تابی نیست طبق لم ۱۵.۲.۱، $M \neq PM$. بنابراین $x \in M \backslash PM$ وجود دارد. چون M ضربی است لذا ایده‌آل B از R وجود دارد به طوری‌که $Rx = BM$. چون $x \in BM \backslash PM$، پس $B \nsubseteq P$. از این‌رو

$$
\begin{aligned}
P + B = R &\Longrightarrow \exists q \in P, b \in R; ۱ - q = b \in B \\
&\Longrightarrow (۱ - q)M \subseteq BM = Rx
\end{aligned}
$$

در نتیجه M، P- دوری خواهد بود.

($\Rightarrow$) فرض می‌کنیم برای هر ایده‌آل ماکسیمال P از R، مدول M، P- تابی یا P- دوری باشد. در این‌صورت نشان می‌دهیم M ضربی است. فرض می‌کنیم N زیرمدولی از M و $I = ann(\frac{M}{N})$. در این‌صورت به‌وضوح $IM \subseteq N$. نشان می‌دهیم $N \subseteq IM$. عنصر $y \in N$ را در نظرگرفته و $K = \{r \in R | ry \in IM\}$ قرار می‌دهیم. به‌وضوح K ایده‌آلی از حلقه‌ی R است. اگر $K = R$، آن‌گاه $۱ \in K$ و لذا $y \in IM$ واثبات تمام است. چنان‌چه $K \neq R$، ایده‌آل ماکسیمال Q از R وجود دارد به‌طوری که $K \subseteq Q$. اگر $M = T_Q(M)$، آن‌گاه:

$$
\begin{aligned}
y \in N \subseteq M &\Longrightarrow y \in T_Q(M) \\
&\Longrightarrow \exists s \in Q; (۱ - s)y = ۰ \in IM \\
&\Longrightarrow ۱ - s \in K \subseteq Q \Longrightarrow ۱ \in Q
\end{aligned}
$$

که تناقض است. پس M، Q- دوری است. بنابراین عناصر $t \in Q$ و $z \in M$ وجود دارند به‌طوری که $(۱ - t)M \subseteq Rz$. از این‌رو $r_۰ \in R$ وجود دارد به‌طوری که $(۱ - t)y = r_۰ z \in N$ ودر نتیجه

$$(۱ - t)r_۰ M \subseteq Rr_۰ z \subseteq N$$

لذا $(۱ - t)r_۰ \in ann(\frac{M}{N}) = I$. بنابراین

$$
\begin{aligned}
(۱ - t)^۲ y = (۱ - t)(۱ - t)y &= (۱ - t)r_۰ z \in IM \\
&\Longrightarrow (۱ - t)^۲ \in K \subseteq Q \\
&\Longrightarrow (۱ - t) \in Q \\
&\Longrightarrow ۱ \in Q
\end{aligned}
$$

که مجدداً تناقض است. بنابراین $K = R$ و لذا اثبات کامل است. □

نتیجه ۱.۲.۱۷. *R- مدول M، ضربی است اگر وتنها اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال P از R، مدول M، P- تابی یا زیرمدول N از M وعنصر $p \in P$ وجود داشته باشد به طوری‌که $(1-p)M \subseteq N$.*

برهان. به [۲۰] رجوع شود. □

نتیجه ۱.۲.۱۸. *فرض کنید M یک R-مدول و عناصر $m_\lambda \in M$ $(\lambda \in \Lambda)$، وجود داشته باشد به قسمی که $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} Rm_\lambda$. در این‌صورت M ضربی است اگر وتنها اگر ایده‌آل‌های I_λ $(\lambda \in \Lambda)$ از R وجود داشته باشند به طوری‌که برای هر $\lambda \in \Lambda$، $Rm_\lambda = I_\lambda M$.*

برهان. به [۱] رجوع شود. □

نتیجه ۱.۲.۱۹. *فرض کنید I یک ایده‌آل ضربی از حلقه‌ی R و M یک R-مدول ضربی باشد. در این‌صورت IM یک R- مدول ضربی است.*

برهان. فرض می‌کنیم P یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد. در این‌صورت اگر $I = T_P(I)$ یا $M = T_P(M)$ آن‌گاه نشان می‌دهیم $IM = T_P(IM)$. فرض می‌کنیم $x \in IM$. در این‌صورت $a_i \in I$ و $m_i \in M$ وجود دارند که $x = \sum_{i=1}^{K} a_i m_i$. ابتدا فرض می‌کنیم $I = T_P(I)$. چون $a_i \in I$ $(1 \leqslant i \leqslant K)$، لذا $p_i \in P$ وجود دارد که

$$\begin{aligned}(1-p_i)a_i = 0 &\Longrightarrow (1-p_i)a_i m_i = 0\\ &\Longrightarrow a_i m_i \in T_P(IM)\end{aligned}$$

بنابراین $x \in T_P(IM)$ و لذا $IM = T_P(IM)$ خواهد بود.
حال فرض می‌کنیم $M = T_P(M)$. در این‌صورت چون $m_i \in M$ $(1 \leqslant i \leqslant K)$، لذا

$$\begin{aligned}m_i \in T_P(M) &\Longrightarrow \exists p_i \in P \ \ ; (1-p_i)m_i = 0\\ &\Longrightarrow (1-p_i)a_i m_i = 0\\ &\Longrightarrow a_i m_i \in T_P(IM)\\ &\Longrightarrow x \in T_P(IM)\\ &\Longrightarrow IM = T_P(IM)\end{aligned}$$

بنابراین IM، P- تابی خواهد بود.
بالاخره فرض می‌کنیم

$T_P(I) \neq I$ و $T_P(M) \neq M$. در این‌صورت چون I یک ایده‌آل ضربی و M یک R-مدول ضربی است پس بنا بر قضیه‌ی ۱۶.۲.۱، I و M، P-دوری می‌باشند. لذا

$$\begin{aligned} \exists p_1, p_2 \in P, a \in I, m \in M;\ (1-p_1)I \subseteq Ra, (1-p_2)M \subseteq Rm \\ \Longrightarrow (1-p_1)(1-p_2)IM \subseteq Ram \\ \Longrightarrow (1-p')IM \subseteq Ram \quad ; p' = p_1 + p_2 - p_1p_2 \in P \end{aligned}$$

بنابراین IM، P-دوری بوده و لذا IM یک مدول ضربی است. □

نتیجه ۲۰.۲.۱. *فرض کنید R حلقه‌ای با رادیکال ژاکوبسن J باشد. گزاره‌های زیر را برای R-مدول M در نظر بگیرید:*

۱) *M یک R- مدول ضربی است؛*

۲) *$\frac{M}{JM}$ یک R-مدول ضربی است؛*

۳) *برای هر ایده‌آل ماکسیمال P از R، R-مدول $\frac{M}{PM}$ دوری است؛*

در این‌صورت ۱ ⇐ ۲ ⇐ ۳.
بعلاوه اگر M با تولید متناهی باشد، آن‌گاه ۳ ⇐ ۱.

برهان. به [۱] رجوع شود. □

قضیه ۲۱.۲.۱. *فرض کنید M یک R-مدول باوفا باشد. در این‌صورت M ضربی است اگر وتنها اگر*

۱) *برای هر خانواده‌ی غیرتهی $\{I_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ از ایده‌آل‌های R، $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda M) = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)M$.*

۲) *برای هر زیرمدول N از M و ایده‌آل A از R به طوری‌که $N \subsetneqq AM$، ایده‌آل B از R وجود داشته باشد به قسمی که $A \subsetneqq B$ و $N \subseteq BM$.*

برهان. به [۱] رجوع شود. □

تعریف ۲۲.۲.۱. زیرمدول سره N از M اول نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $r \in R$ و به ازای هر $m \in M$، $rm \in N$ ایجاب کند $m \in N$ یا $r \in (N : M)$.